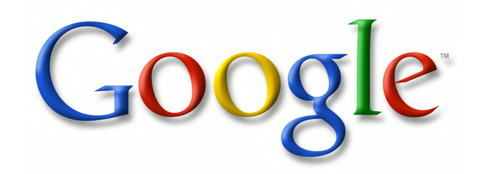
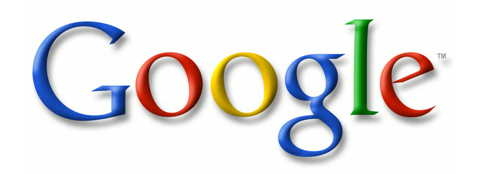






Stanford University Libraries
3 6105 000 993 555

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.

Vierundneunzigster Band.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1883.

Druck und Verlag von G. Reimer.

Inhaltsverzeichniss des vierundneunzigsten Bandes.

Ueber die Perioden solcher eindeutiger, $2n$-fach periodischer Functionen, welche im Endlichen überall den Charakter rationaler Functionen besitzen und reell sind für reelle Werthe ihrer n Argumente.

(Von Herrn *Adolf Hurwitz* in Göttingen.)

Die vorliegenden Untersuchungen sind entsprungen aus einer Anregung, welche ich Herrn *Weierstrass,* meinem hochverehrten Lehrer, verdanke. Es handelte sich darum, die speciellen Eigenthümlichkeiten der Perioden solcher *Abel*scher Integrale zu erforschen, welche zu einem reellen algebraischen Gebilde gehören. Hierbei ist unter einem „reellen" algebraischen Gebilde die Gesammtheit aller Werthepaare (x, y) zu verstehen, welche einer irreducibeln algebraischen Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

Genüge leisten, deren Coefficienten sämmtlich *reell* sind. Die sich hier darbietenden, auf die Realität der Perioden bezüglichen Fragen sind an und für sich von Interesse; man darf aber auch von einer gründlichen Erforschung dieses Gegenstandes kräftige Hülfsmittel erhoffen für die Untersuchung der Realitäts-Verhältnisse bei algebraischen Curven, welche durch Gleichungen mit durchaus reellen Coefficienten definirt werden.

Es stellt sich nun heraus, dass die gekennzeichneten Fragen sich erledigen lassen durch Betrachtungen rein arithmetischer Natur, nämlich durch die Untersuchung eines Systems von $n.2n$ Grössen, welches gewisse arithmetische Eigenthümlichkeiten darbietet. Diese Eigenthümlichkeiten treten ein, wenn jene Grössen ein System primitiver Periodicitäts-Moduln für n zweckmässig gewählte Integrale erster Gattung eines reellen algebraischen Gebildes vom Range (oder Geschlechte) n bilden. Sie finden aber auch Statt für ein System primitiver Periodicitäts-Moduln einer $2n$-fach

periodischen Function von n unbeschränkt veränderlichen Argumenten, wenn dieselbe einer sogleich näher zu charakterisirenden Classe von Functionen dieser Art angehört. Hiernach sind die Resultate, welche wir gewinnen werden, sowohl gültig für die Perioden *Abel*scher Integrale bei reellen algebraischen Gebilden, als auch für die Perioden gewisser $2n$-fach periodischer Functionen.

Wir wollen unsere Ausführungen behufs leichterer Darstellungsweise an diese letzteren Functionen anknüpfen. Dabei erlaube ich mir, die folgende für viele Untersuchungen zweckmässige Bezeichnung vorzuschlagen, von welcher ich im Folgenden durchgängig Gebrauch mache. Ist

$$\varphi(u_1+P_1,\ u_2+P_2,\ \dots\ u_n+P_n) = \varphi(u_1,\ u_2,\ \dots u_n),$$

so nenne ich den Complex der Grössen

$$P_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\dots n)$$

„eine Periode" der Function $\varphi(u_1, u_2, \dots u_n)$, und wie üblich die einzelnen Grössen P, welche die Periode constituiren, „Periodicitäts-Moduln". Hiernach ist klar, was unter einem „Systeme primitiver Perioden" oder unter einem „Systeme primitiver Periodicitäts-Moduln" zu verstehen ist; beide Bezeichnungen sind gleichbedeutend. Eine Periode heisse reell, bez. rein imaginär, wenn die sie constituirenden Periodicitäts-Moduln sämmtlich reelle, bez. rein imaginäre Grössen sind.

Das Hauptresultat der nachfolgenden Entwickelungen lässt sich jetzt folgendermaassen aussprechen:

Es bedeute

$$\varphi(u_1,\ u_2,\ \dots\ u_n)$$

eine eindeutige 2n-fach periodische Function, welche im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function besitzt*), und welche reelle Werthe an-

---

*) Diese von Herrn *Weierstrass* herrührende Terminologie besagt:
„Für endliche Werthe von

$$a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n$$

und gehörig beschränkte Werthe der absoluten Beträge von

$$u_1-a_1,\ u_2-a_2,\ \dots\ u_n-a_n$$

ist

$$\varphi(u_1,\ \dots\ u_n) = \frac{\mathfrak{P}_1(u_1-a_1, \dots u_n-a_n)}{\mathfrak{P}_2(u_1-a_1, \dots u_n-a_n)},$$

wo die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ihre Argumente u_i-a_i nur in Potenzen mit positiven Exponenten enthalten.

nimmt, sobald alle Argumente reelle Grössen sind. Dann lassen sich immer n Perioden-Paare der Function φ herstellen

$$(P_{1,\beta},\ P_{2,\beta},\ \ldots\ P_{n,\beta});\quad (P_{1,n+\beta},\ P_{2,n+\beta},\ \ldots\ P_{n,n+\beta});\qquad (\beta = 1, 2, \ldots n)$$

(wo sich die Periodicitätsmoduln

$$P_{i,1},\quad P_{i,2},\quad \ldots\quad P_{i,2n}$$

auf das Argument u_i beziehen),
welche zusammen ein System primitiver Perioden der Function bilden und von der Beschaffenheit sind, dass für jedes Periodenpaar einer der beiden folgenden Fälle eintritt: Die erste Periode

$$P_{1,\beta},\quad P_{2,\beta},\quad \ldots\quad P_{n,\beta}$$

ist reell und die zweite Periode

$$P_{1,n+\beta},\quad P_{2,n+\beta},\quad \ldots\quad P_{n,n+\beta}$$

rein imaginär, oder die erste Periode ist reell und die aus der ersten und zweiten zusammengesetzte Periode

$$2P_{1,n+\beta} - P_{1,\beta};\quad 2P_{2,n+\beta} - P_{2,\beta};\quad \ldots\quad 2P_{n,n+\beta} - P_{n,\beta}$$

ist rein. imaginär." *)

Der Beweis dieses Satzes beruht nun einerseits auf den weiter unten anzugebenden Relationen und Bedingungen, welchen ein System von primitiven Perioden *jeder* eindeutigen $2n$-fach periodischen Function, die im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function besitzt, Genüge leistet, andererseits auf folgender Eigenschaft der von uns betrachteten specielleren Functionen dieser Art:

„Bedeutet A'_i den zu der Grösse A_i conjugirt-complexen Werth, so constituiren die Zahlen

$$A'_1,\quad A'_2,\quad \ldots\quad A'_n$$

nothwendig eine Periode der Function

$$\varphi(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n),$$

wenn die Zahlen

$$A_1,\quad A_2,\quad \ldots\quad A_n$$

eine Periode bilden."

*) Nach dem, was oben bemerkt wurde, gilt dieser Satz auch für die Perioden der *Abel*schen Integrale bei reellen algebraischen Gebilden. Für den hyperelliptischen Fall ist dieses seit langem bekannt: cf. *Henoch:* „De Abelianarum Functionum Periodis". Inaugural-Dissertation; Berlin. Für den allgemeinen Fall $n = 3$, siehe auch: *F. Klein:* „Ueber den Verlauf der *Abel*schen Integrale bei den Curven vierten Grades". Math. Annalen Bd. 10 pag. 365.

Um zunächst diesen Hülfs-Satz zu beweisen, bemerken wir, dass man auf unzählig viele Arten reelle endliche Grössen

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_n$$

bestimmen kann, so dass für genügend kleine Werthe der absoluten Beträge von

$$u_1 - a_1, \quad u_2 - a_2, \quad \ldots \quad u_n - a_n$$

die Gleichung

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots u_n) = \mathfrak{P}(u_1 - a_1, u_2 - a_2, \ldots u_n - a_n)$$

Statt findet, wo die Potenzreihe $\mathfrak{P}$ ihre Argumente

$$u_1 - a_1, \quad u_2 - a_2, \quad \ldots \quad u_n - a_n$$

nur in Potenzen mit positiven Exponenten enthält. Diese Potenzreihe $\mathfrak{P}$ besitzt nun nothwendig reelle Coefficienten. In der That sind die partiellen Differentialquotienten von $\varphi(u_1, \ldots u_n)$ reell für reelle Werthe der u, woraus die Richtigkeit unserer Behauptung folgt, da ja die Werthe

$$\left[\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\varphi(u_1, \ldots u_n)}{(\partial u_1)^{\lambda_1}(\partial u_2)^{\lambda_2}\ldots(\partial u_n)^{\lambda_n}}\right]_{(u_1=a_1,\ u_2=a_2,\ \ldots\ u_n=a_n)}$$

abgesehen von reellen Zahlfactoren die Coefficienten der mit $\mathfrak{P}$ bezeichneten Potenzreihe werden.

Hieraus schliesst man sofort, dass

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots u_n) \quad \text{und} \quad \varphi(u_1', u_2', \ldots u_n')$$

conjugirt-complexe Werthe haben, wenn u_i' die zu u_i conjugirte Grösse bezeichnet und die absoluten Beträge

$$|u_i - a_i| = |u_i' - a_i| \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

gewisse Grössen

$$\delta_i$$

nicht überschreiten. Diese Eigenschaft der Function $\varphi(u_1, \ldots u_n)$ gilt also für einen $2n$-fach ausgedehnten Bereich der Argumente und setzt sich folglich in das *ganze* $2n$-fach ausgedehnte Gebiet fort, für welches die Function definirt ist.

Bilden nun

$$\varDelta_1, \quad \varDelta_2, \quad \ldots \quad \varDelta_n$$

eine Periode der Function, so dass

$$\varphi(u_1 + \varDelta_1, u_2 + \varDelta_2, \ldots u_n + \varDelta_n) = \varphi(u_1, u_2, \ldots u_n),$$

so folgt aus dem Vorhergehenden, dass auch die Gleichung:

$$\varphi(u_1'+A_1',\ u_2'+A_2',\ \dots\ u_n'+A_n') = \varphi(u_1',\ u_2',\ \dots\ u_n')$$

Statt hat. Es bilden also in der That die Grössen

$$A_1',\quad A_2',\quad \dots\quad A_n'$$

gleichzeitig mit den conjugirt-imaginären Werthen

$$A_1,\quad A_2,\quad \dots\quad A_n$$

eine Periode der Function.

Wir werden nun zunächst aus diesem Umstande erschliessen, dass stets $2n$ ***linear von einander unabhängige*** Perioden

$$\begin{array}{cccc} \omega_{11}, & \omega_{21}, & \dots & \omega_{n1}, \\ \omega_{12}, & \omega_{22}, & \dots & \omega_{n2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{1r}, & \omega_{2r}, & \dots & \omega_{nr}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{1\,2n}, & \omega_{2\,2n}, & \dots & \omega_{n\,2n} \end{array}$$

aufgestellt werden können, welche aus r Reihen reeller und $s = 2n - r$ Reihen rein imaginärer Grössen bestehen, ohne dass wir jedoch vorläufig einen näheren Aufschluss über die Werthe von r und s erhielten.

Seien

$$\begin{array}{cccc} p_{11}, & p_{21}, & \dots & p_{n1}, \\ p_{12}, & p_{22}, & \dots & p_{n2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{1\,2n}, & p_{2\,2n}, & \dots & p_{n\,2n} \end{array}$$

ein System primitiver Perioden unserer Function, so werden nach dem Vorhergehenden auch die zu den p conjugirt-imaginären Grössen

$$p_{1i}',\quad p_{2i}',\quad \dots\quad p_{ni}'$$

Perioden unserer Function bilden. Es wird daher ein System von Gleichungen folgender Gestalt bestehen:

$$p_{\alpha i}' = \sum_1^{2n}{}_\mu\, m_\mu^{(i)} p_{\alpha\mu} \qquad \binom{i = 1, 2, \dots 2n}{\alpha = 1, 2, \dots n},$$

wobei die $m_\mu^{(i)}$ ganze Zahlen bedeuten. Wenn man nun, unter $A_{\alpha\mu}$ und $A_{\alpha\mu}'$ reelle Grössen verstehend,

$$p_{\alpha\mu} = A_{\alpha\mu} + iA_{\alpha\mu}'$$

und also

$$p_{\alpha\mu}' = A_{\alpha\mu} - iA_{\alpha\mu}'$$

setzt, so ergeben die zwischen den p und den p' bestehenden Gleichungen durch Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$A_{\alpha i} = \sum_1^{2n}{}_\mu m_\mu^{(i)} A_{\alpha\mu}, \qquad -A'_{\alpha i} = \sum_1^{2n}{}_\mu m_\mu^{(i)} A'_{\alpha\mu}, \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\dots 2n \\ \alpha=1,2,\dots n \end{smallmatrix}\right)$$

oder ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned}
(m_1^{(1)}-1)A_{\alpha 1} + m_2^{(1)}A_{\alpha 2} + \cdots + m_{2n}^{(1)}A_{\alpha\, 2n} &= 0,\\
m_1^{(2)}A_{\alpha 1} + (m_2^{(2)}-1)A_{\alpha 2} + \cdots + m_{2n}^{(2)}A_{\alpha\, 2n} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \qquad (\alpha=1,2,\dots n)\\
m_1^{(2n)}A_{\alpha 1} + m_2^{(2n)}A_{\alpha 2} + \cdots + (m_{2n}^{(2n)}-1)A_{\alpha\, 2n} &= 0,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(m_1^{(1)}+1)A'_{\alpha 1} + m_2^{(1)}A'_{\alpha 2} + \cdots + m_{2n}^{(1)}A'_{\alpha\, 2n} &= 0,\\
m_1^{(2)}A'_{\alpha 1} + (m_2^{(2)}+1)A'_{\alpha 2} + \cdots + m_{2n}^{(2)}A'_{\alpha\, 2n} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \qquad (\alpha=1,2,\dots n)\\
m_1^{(2n)}A'_{\alpha 1} + m_2^{(2n)}A'_{\alpha 2} + \cdots + (m_{2n}^{(2n)}+1)A'_{\alpha\, 2n} &= 0.
\end{aligned}$$

Bezeichnet man also, unter k irgend eine Zahl der Reihe

$$1,\ 2,\ \dots\ 2n$$

verstehend, mit

$$\varepsilon_1^{(k)},\ \varepsilon_2^{(k)},\ \dots\ \varepsilon_k^{(k)},\ \dots\ \varepsilon_{2n}^{(k)}$$

ganze Zahlen, welche proportional sind zu den Zahlen

$$m_1^{(k)},\ m_2^{(k)},\ \dots\ (m_k^{(k)}-1),\ \dots\ m_{2n}^{(k)},$$

so bilden, wegen der von den $A_{\alpha\mu}$ befriedigten Gleichungen, die n Grössen

$$\varepsilon_1^{(k)} p_{\alpha 1} + \varepsilon_2^{(k)} p_{\alpha 2} + \cdots + \varepsilon_{2n}^{(k)} p_{\alpha\, 2n} \qquad (\alpha=1,2,\dots n)$$

eine rein imaginäre Periode. Desgleichen wird

$$\eta_1^{(k)} p_{\alpha 1} + \eta_2^{(k)} p_{\alpha 2} + \cdots + \eta_{2n}^{(k)} p_{\alpha\, 2n} \qquad (\alpha=1,2,\dots n)$$

eine reelle Periode sein, wenn die ganzen Zahlen

$$\eta_1^{(k)},\ \eta_2^{(k)},\ \dots\ \eta_k^{(k)},\ \dots\ \eta_{2n}^{(k)}$$

proportional sind zu den Zahlen

$$m_1^{(k)},\ m_2^{(k)},\ \dots\ m_k^{(k)}+1,\ \dots\ m_{2n}^{(k)}.$$

Hiernach ist einleuchtend, wie man $2n$ linear unabhängige Perioden herstellen kann, von denen r nur reelle, $s = 2n - r$ nur rein imaginäre Grössen enthalten, wenn es sicher ist, dass mindestens *eine* der 2^{2n} Determinanten von Null verschieden ist, welche entstehen, wenn man in

$$\begin{vmatrix} m_1^{(1)}\pm 1 & m_2^{(1)} & m_3^{(1)} & \dots & m_{2n}^{(1)} \\ m_1^{(2)} & m_2^{(2)}\pm 1 & m_3^{(2)} & \dots & m_{2n}^{(2)} \\ m_1^{(3)} & m_2^{(3)} & m_3^{(3)}\pm 1 & \dots & m_{2n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_1^{(2n)} & m_2^{(2n)} & m_3^{(2n)} & \dots & m_{2n}^{(2n)}\pm 1 \end{vmatrix}$$

alle möglichen Zeichen-Combinationen plus-minus annimmt. Der erforderliche Beweis ist aber leicht zu führen. Sind nämlich:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

Determinanten, welche beide verschwinden und (formal) nur durch die Werthe a_{11}, a'_{11} der ersten Zahlen unterschieden sind, so folgt durch Subtraction der zweiten von der ersten, dass auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

gleich Null ist.

Angenommen nun, es seien alle 2^{2n} Determinanten

$$\begin{vmatrix} m_1^{(1)}\pm 1 & m_2^{(1)} & \dots & m_{2n}^{(1)} \\ m_1^{(2)} & m_2^{(2)}\pm 1 & \dots & m_{2n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_1^{(2n)} & m_2^{(2n)} & \dots & m_{2n}^{(2n)}\pm 1 \end{vmatrix}$$

gleich Null; so müssten, nach dem soeben Bemerkten, auch alle 2^{2n-1} Determinanten

$$\begin{vmatrix} m_2^{(2)}\pm 1 & \dots & m_{2n}^{(2n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_2^{(2n)} & \dots & m_{2n}^{(2n)}\pm 1 \end{vmatrix}$$

verschwinden; folglich auch — aus demselben Grunde — alle 2^{2n-2} Determinanten

$$\begin{vmatrix} m_3^{(3)}\pm 1 & \dots & m_{2n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_3^{(2n)} & \dots & m_{2n}^{(2n)}\pm 1 \end{vmatrix}$$

und so fort. Schliesslich müsste sowohl

$$m_{2n}^{(2n)}+1 \quad \text{wie} \quad m_{2n}^{(2n)}-1$$

gleich Null sein, was offenbar nicht angeht.

Nach den vorstehenden Entwickelungen ist es also immer möglich — ob auf eine oder mehrere Weisen, bleibt dahingestellt — durch die Gleichungen

$$\omega_{\alpha\lambda} = \sum_{1}^{2n}{}_{\mu}\, \eta_{\mu}^{(\lambda)} p_{\alpha\mu}, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots r)$$

$$\omega_{\alpha\nu} = \sum_{1}^{2n}{}_{\mu}\, \varepsilon_{\mu}^{(\nu)} p_{\alpha\mu} \qquad (\nu = r+1, r+2, \dots 2n),$$

$2n$ linear unabhängige Perioden zu definiren, wobei die Coefficienten η und ε den folgenden Proportionen genügende ganze Zahlen sind:

$$\eta_1^{(\lambda)} : \eta_2^{(\lambda)} : \dots : \eta_\lambda^{(\lambda)} : \dots : \eta_{2n}^{(\lambda)} = m_1^{(\lambda)} : m_2^{(\lambda)} : \dots : m_\lambda^{(\lambda)}+1 : \dots : m_{2n}^{(\lambda)}, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots r)$$

$$\varepsilon_1^{(\nu)} : \varepsilon_2^{(\nu)} : \dots : \varepsilon_\nu^{(\nu)} : \dots : \varepsilon_{2n}^{(\nu)} = m_1^{(\nu)} : m_2^{(\nu)} : \dots : m_\nu^{(\nu)}-1 : \dots : m_{2n}^{(\nu)} \qquad (\nu = r+1, r+2, \dots 2n).$$

Von diesen Perioden sind dann die ersten r reell, die $s = 2n - r$ übrigen rein imaginär.

Nun zeigen wir aber, dass nothwendig

$$r = s = n$$

sein muss, indem wir folgenden Satz beweisen:

„*Wenn ein System von 2n linear unabhängigen Perioden einer eindeutigen 2n-fach periodischen Function von n Veränderlichen, die im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function besitzt, nur reelle und rein imaginäre Perioden enthält, so sind nothwendig ebenso viele Perioden der einen wie Perioden der anderen Art vorhanden**).“

Zu diesem Beweise dienen nun die schon oben erwähnten, zuerst von Herrn *Weierstrass* aufgefundenen Bedingungen zwischen den Periodicitäts-Moduln einer Function der im Satze genannten Art. Für die gütige Mittheilung dieser Bedingungen bin ich Herrn *Weierstrass* zu grösstem Danke verpflichtet. Sie werden in folgender Form ausgesprochen:

Zu je $2n$ primitiven Perioden

$$\begin{matrix} p_{11}, & p_{21}, & \dots & p_{n1}, \\ p_{12}, & p_{22}, & \dots & p_{n2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{1\,2n}, & p_{2\,2n}, & \dots & p_{n\,2n} \end{matrix}$$

---

*) Der Satz setzt sich, wie der nachfolgende Beweis zeigt, aus den beiden Sätzen zusammen:

1) Eine $2n$-fach periodische Function der betrachteten Art kann nicht mehr als n von einander unabhängige reelle Perioden besitzen.

2) Desgleichen kann es nicht mehr als n von einander unabhängige rein imaginäre Perioden einer solchen Function geben.

jeder eindeutigen, $2n$-fach periodischen und im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function besitzenden Function von n Veränderlichen gehört ein bestimmtes System von $2n.2n$ ganzen Zahlen:

$$\begin{matrix} l_{11}, & l_{12}, & \dots & l_{1\,2n}, \\ l_{21}, & l_{22}, & \dots & l_{2\,2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{2n\,1}, & l_{2n\,2}, & \dots & l_{2n\,2n}, \end{matrix}$$

welche der Bedingung

$$l_{\varkappa\lambda} = -l_{\lambda\varkappa}$$

unterworfen sind. Setzt man nun

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \sum_1^{2n}{}_\varkappa \sum_1^{2n}{}_\lambda\, l_{\varkappa\lambda} A_{\alpha\varkappa} A_{\beta\lambda}, \\ b_{\alpha\beta} &= \sum_1^{2n}{}_\varkappa \sum_1^{2n}{}_\lambda\, l_{\varkappa\lambda} A_{\alpha\varkappa} A'_{\beta\lambda}, \qquad \binom{\alpha=1,\,2,\,\dots\,n}{\beta=1,\,2,\,\dots\,n} \\ a'_{\alpha\beta} &= \sum_1^{2n}{}_\varkappa \sum_1^{2n}{}_\lambda\, l_{\varkappa\lambda} A'_{\alpha\varkappa} A'_{\beta\lambda}, \end{aligned}$$

(wo, wie oben, die Gleichung

$$p_{\alpha\mu} = A_{\alpha\mu} + i A'_{\alpha\mu}$$

die *reellen* Grössen $A_{\alpha\mu}$, $A'_{\alpha\mu}$ definirt), so ist

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= -a_{\beta\alpha}, \\ a'_{\alpha\beta} &= -a'_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

und die mehrfach genannten Bedingungen sind, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= a'_{\alpha\beta}, \\ b_{\alpha\beta} &= b_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

Statt finden, und dass

$$P = \sum_1^n{}_\beta \sum_1^n{}_\alpha (b_{\alpha\beta} + i a_{\alpha\beta})(\xi_\alpha + i\xi'_\alpha)(\xi_\beta - i\xi'_\beta)$$

stets *positiv* ist für reelle Werthe der

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \dots \quad \xi_n, \quad \xi'_1, \quad \xi'_2, \quad \dots \quad \xi'_n,$$

wenn diese Grössen nicht sämmtlich den Werth Null haben.

Bedeuten nun

$$\begin{matrix} \bar{p}_{11}, & \bar{p}_{21}, & \dots & \bar{p}_{n1}, \\ \bar{p}_{12}, & \bar{p}_{22}, & \dots & \bar{p}_{n2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{p}_{1\,2n}, & \bar{p}_{2\,2n}, & \dots & \bar{p}_{n\,2n} \end{matrix}$$

2*n* *linear unabhängige* Perioden der Function, so finden folgende Gleichungen Statt:

$$\bar{p}_{\alpha\lambda} = \sum_1^{2n}{}_{\mu} r_{\mu}^{(\lambda)} . p_{\alpha\mu}, \qquad \binom{\lambda = 1, 2, \dots 2n}{\alpha = 1, 2, \dots n}$$

$$p_{\alpha\lambda} = \sum_1^{2n}{}_{\mu} \bar{r}_{\mu}^{(\lambda)} . \bar{p}_{\alpha\mu},$$

wobei die $r_{\mu}^{(\lambda)}$ ganze Zahlen, die $\bar{r}_{\mu}^{(\lambda)}$ rationale Zahlen sind. Es wird folglich:

$$a_{\alpha\beta} = \sum_1^{2n}{}_{\varkappa} \sum_1^{2n}{}_{\lambda} l_{\varkappa\lambda} . \sum_1^{2n}{}_{\mu} \bar{r}_{\mu}^{(\varkappa)} \bar{A}_{\alpha\mu} . \sum_1^{2n}{}_{\nu} \bar{r}_{\nu}^{(\lambda)} \bar{A}_{\beta\nu},$$

oder:

$$a_{\alpha\beta} = \sum_1^{2n}{}_{\mu} \sum_1^{2n}{}_{\nu} \bar{l}_{\mu\nu} \bar{A}_{\alpha\mu} . \bar{A}_{\beta\nu};$$

und analog:

$$b_{\alpha\beta} = \sum_1^{2n}{}_{\mu} \sum_1^{2n}{}_{\nu} \bar{l}_{\mu\nu} \bar{A}_{\alpha\mu} . \bar{A}'_{\beta\nu};$$

und:

$$a'_{\alpha\beta} = \sum_1^{2n}{}_{\mu} \sum_1^{2n}{}_{\nu} \bar{l}_{\mu\nu} \bar{A}'_{\alpha\mu} . \bar{A}'_{\beta\nu},$$

wenn

$$\bar{l}_{\mu\nu} = \sum_1^{2n}{}_{\varkappa} \sum_1^{2n}{}_{\lambda} l_{\varkappa\lambda} \bar{r}_{\mu}^{(\varkappa)} . \bar{r}_{\nu}^{(\lambda)}$$

und

$$\bar{p}_{\alpha\mu} = \bar{A}_{\alpha\mu} + i \bar{A}'_{\alpha\mu}$$

gesetzt wird, wo

$$\bar{A}_{\alpha\mu} \quad \text{und} \quad \bar{A}'_{\alpha\mu}$$

reell sind.

Es möge nun an die Stelle der $\bar{p}_{\alpha\mu}$ irgend ein nur reelle und rein imaginäre Perioden enthaltendes Perioden-System, etwa die (pag. 8 oben angegebenen) $\omega_{\alpha\mu}$ treten, so dass

$$\bar{p}_{\alpha\mu} = \omega_{\alpha\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \dots 2n).$$

Dann ist

$$\bar{A}'_{\alpha\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu = 1, \ 2, \ 3, \ \dots \ r,$$

$$\bar{A}_{\alpha\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu = r+1, \ r+2, \ \dots \ 2n.$$

Nun haben wir die Bedingung, dass

$$P = \sum_1^{n}{}_{\beta} \sum_1^{n}{}_{\alpha} \{ b_{\alpha\beta} (\xi_\alpha \xi_\beta + \xi'_\alpha \xi'_\beta) + a_{\alpha\beta} (\xi_\alpha \xi'_\beta - \xi'_\alpha \xi_\beta) \}$$

für alle reellen Werthe der Grössen

$$\xi_1 \ldots \xi_n, \quad \xi'_1 \ldots \xi'_n$$

positiv werde, wenn nicht alle ξ, ξ' verschwinden. Da aber

$$P = \sum_1^n{}_\alpha\, \xi_\alpha \cdot \sum_1^n{}_\beta (\xi_\beta b_{\alpha\beta} + \xi'_\beta a_{\alpha\beta})$$
$$+ \sum_1^n{}_\alpha\, \xi'_\alpha \cdot \sum_1^n{}_\beta (\xi'_\beta b_{\alpha\beta} - \xi_\beta a_{\alpha\beta}),$$

so ist die Bedingung offenbar nicht erfüllt, wenn es gelingt, die Gleichungen

$$\sum_1^n{}_\beta (\xi_\beta b_{\alpha\beta} + \xi'_\beta a_{\alpha\beta}) = 0,$$
$$\sum_1^n{}_\beta (\xi_\beta a_{\alpha\beta} - \xi'_\beta b_{\alpha\beta}) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

zu befriedigen und zwar so, dass nicht alle Grössen

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots \quad \xi_n, \quad \xi'_1, \quad \xi'_2, \quad \ldots \quad \xi'_n$$

gleich Null werden. Setzen wir die Werthe von $b_{\alpha\beta}$ und $a_{\alpha\beta}$ ein, so gehen die Gleichungen über in:

$$\sum_1^n{}_\beta \left\{ \xi_\beta \sum_1^{2n}{}_\mu \bar{A}_{\alpha\mu} C_{\beta\mu} + \xi'_\beta \sum_1^{2n}{}_\mu \bar{A}_{\alpha\mu} C'_{\beta\mu} \right\} = 0,$$
$$\sum_1^n{}_\beta \left\{ \xi_\beta \sum_1^{2n}{}_\mu \bar{A}_{\alpha\mu} C'_{\beta\mu} - \xi'_\beta \sum_1^{2n}{}_\mu \bar{A}_{\alpha\mu} C_{\beta\mu} \right\} = 0,$$

wobei

$$C_{\beta\mu} = \sum_1^{2n}{}_\nu \bar{l}_{\mu\nu} \bar{A}'_{\beta\nu},$$
$$C'_{\beta\mu} = \sum_1^{2n}{}_\nu \bar{l}_{\mu\nu} \bar{A}_{\beta\nu}.$$

Jetzt suchen wir unsere Gleichungen dadurch zu erfüllen, dass wir ihre linken Seiten nach den $\bar{A}_{\alpha\mu}$ ordnen und die einzelnen Coefficienten der $\bar{A}_{\alpha\mu}$ gleich Null setzen. Dieses ergiebt, da s der Grössen $\bar{A}_{\alpha\mu}$ gleich Null sind,

$$2(2n - s) = 2r$$

homogene lineare Gleichungen für die $2n$ Unbekannten ξ_β, ξ'_β. Es muss folglich

$$2r \geqq 2n$$

sein, widrigenfalls ja unsere Gleichungen befriedigt werden könnten für endliche Werthe der ξ, die nicht sämmtlich verschwinden.

Ersetzt man in den Gleichungen für die $\xi_1 \ldots \xi_n$, $\xi'_1 \ldots \xi'_n$ die Grössen $a_{\alpha\beta}$ durch die ihnen resp. gleichen $a'_{\alpha\beta}$, ordnet dann die Gleichungen nach den Grössen $\bar{A}'_{\alpha\mu}$ und setzt die einzelnen Coefficienten dieser Grössen gleich Null, so ersieht man, dass auch

$$2s \geqq 2n$$

sein muss. Da nun

$$r + s = 2n,$$

so folgt:

$$r = s = n,$$

was wir beweisen wollten.

Mit den nunmehr erworbenen Kenntnissen kehren wir zurück zu der Betrachtung eines beliebigen primitiven Perioden-Systems

$$p_{\alpha 1}, \quad p_{\alpha 2}, \quad \ldots \quad p_{\alpha 2n} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

unserer Function. Es bestehen hier die schon oben angegebenen Gleichungen

$$\begin{aligned}
p'_{\alpha 1} &= m_1^{(1)} p_{\alpha 1} + m_2^{(1)} p_{\alpha 2} + \cdots + m_{2n}^{(1)} p_{\alpha 2n}, \\
p'_{\alpha 2} &= m_1^{(2)} p_{\alpha 1} + m_2^{(2)} p_{\alpha 2} + \cdots + m_{2n}^{(2)} p_{\alpha 2n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p'_{\alpha 2n} &= m_1^{(2n)} p_{\alpha 1} + m_2^{(2n)} p_{\alpha 2} + \cdots + m_{2n}^{(2n)} p_{\alpha 2n}.
\end{aligned}$$

Von den ganzen Zahlen $m_\mu^{(\lambda)}$ wissen wir Folgendes: Unter den 2^{2n} Determinanten:

$$\begin{vmatrix}
m_1^{(1)} \pm 1 & m_2^{(1)} & \ldots & m_{2n}^{(1)} \\
m_1^{(2)} & m_2^{(2)} \pm 1 & \ldots & m_{2n}^{(2)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
m_1^{(2n)} & m_2^{(2n)} & \ldots & m_{2n}^{(2n)} \pm 1
\end{vmatrix}$$

können nur diejenigen von Null verschieden sein, bei denen in der Diagonalreihe ebenso oft das Zeichen + wie das Zeichen − vorkommt; unter diesen ist aber mindestens eine wirklich von Null verschieden. Wegen dieser Eigenschaft der Zahlen $m_\mu^{(\lambda)}$ ist es möglich, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
c_1 m_1^{(1)} + c_2 m_1^{(2)} + \cdots + c_{2n} m_1^{(2n)} &= c_1, \\
c_1 m_2^{(1)} + c_2 m_2^{(2)} + \cdots + c_{2n} m_2^{(2n)} &= c_2, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
c_1 m_{2n}^{(1)} + c_2 m_{2n}^{(2)} + \cdots + c_{2n} m_{2n}^{(2n)} &= c_{2n}
\end{aligned}$$

durch ganze Zahlen

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots \quad c_{2n}$$

aufzulösen, wobei wir offenbar voraussetzen dürfen, dass keine ganze Zahl, ausser Eins, Theiler von allen diesen Zahlen c_μ ist.

Nun können wir aber ein System primitiver Perioden bilden, in welchen die *reellen* Grössen

$$c_1 p_{\alpha 1} + c_2 p_{\alpha 2} + \cdots + c_{2n} p_{\alpha\, 2n} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

die erste Periode bilden*).

Wählen wir gleich dieses neue Periodensystem beim Ausgang unserer Betrachtung und bezeichnen demgemäss seine Elemente durch $p_{\alpha\mu}$, so haben wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
p'_{\alpha 1} &= p_{\alpha 1},\\
p'_{\alpha 2} &= m_1^{(2)} p_{\alpha 1} + m_2^{(2)} p_{\alpha 2} + \cdots + m_{2n}^{(2)} p_{\alpha\, 2n},\\
p'_{\alpha 3} &= m_1^{(3)} p_{\alpha 1} + m_2^{(3)} p_{\alpha 2} + \cdots + m_{2n}^{(3)} p_{\alpha\, 2n},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p'_{\alpha\, 2n} &= m_1^{(2n)} p_{\alpha 1} + m_2^{(2n)} p_{\alpha 2} + \cdots + m_{2n}^{(2n)} p_{\alpha\, 2n}.
\end{aligned}$$

Die ganzen Zahlen $m_\mu^{(\lambda)}$ — welche natürlich von den vorhin so bezeichneten Grössen im Allgemeinen verschieden sein werden — sind so beschaffen, dass von den 2^{2n-1} Determinanten

$$\begin{vmatrix}
m_2^{(2)} \pm 1 & m_3^{(2)} & \ldots & m_{2n}^{(2)}\\
m_2^{(3)} & m_3^{(3)} \pm 1 & \ldots & m_{2n}^{(3)}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
m_2^{(2n)} & m_3^{(2n)} & \ldots & m_{2n}^{(2n)} \pm 1
\end{vmatrix}$$

nur diejenigen von Null verschieden sein können, bei denen in der Diagonalreihe das Zeichen $-$ ein Mal häufiger vorkommt als das Zeichen $+$. Daher können wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
c_2 m_2^{(2)} + c_3 m_2^{(3)} + \cdots + c_{2n} m_2^{(2n)} &= -c_2,\\
c_2 m_3^{(2)} + c_3 m_3^{(3)} + \cdots + c_{2n} m_3^{(2n)} &= -c_3,\\
&\cdots\cdots\\
c_2 m_{2n}^{(2)} + c_3 m_{2n}^{(3)} + \cdots + c_{2n} m_{2n}^{(2n)} &= -c_{2n}
\end{aligned}$$

in ganzen Zahlen

$$c_2, \quad c_3, \quad \ldots \quad c_{2n}$$

lösen, und wir können diese Zahlen ohne einen (allen) gemeinsamen Theiler voraussetzen.

Führen wir nun, die erste Periode $p_{\alpha 1}$ unverändert lassend, statt der Perioden

$$p_{\alpha 2}, \quad p_{\alpha 3}, \quad \ldots \quad p_{\alpha\, 2n} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

*) Siehe *Riemann:* „Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als $2n$-fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist".
(Dieses Journal, Bd. 71. Oder: Gesammelte Werke, pag. 276.)

ein diesem äquivalentes System von Perioden ein*), an deren Spitze die Periode

$$c_2 p_{\alpha 2} + c_3 p_{\alpha 3} + \cdots + c_{2n} p_{\alpha\, 2n} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

steht, und wählen dieses neue primitive Periodensystem gleich beim Ausgang unserer Betrachtung, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p'_{\alpha 1} &= p_{\alpha 1}, \\ p'_{\alpha 2} &= m_1^{(2)} p_{\alpha 1} - p_{\alpha 2}, \\ p'_{\alpha 3} &= m_1^{(3)} p_{\alpha 1} + m_2^{(3)} p_{\alpha 2} + m_3^{(3)} p_{\alpha 3} + \cdots + m_{2n}^{(3)} p_{\alpha\, 2n}, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ p'_{\alpha\, 2n} &= m_1^{(2n)} p_{\alpha 1} + m_2^{(2n)} p_{\alpha 2} + m_3^{(2n)} p_{\alpha 3} + \cdots + m_{2n}^{(2n)} p_{\alpha\, 2n}, \end{aligned}$$

wo nun wieder von den Determinanten:

$$\begin{vmatrix} m_3^{(3)} \pm 1 & m_4^{(3)} & \ldots & m_{2n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_3^{(2n)} & m_4^{(2n)} & \ldots & m_{2n}^{(2n)} \pm 1 \end{vmatrix}$$

nothwendig alle verschwinden, welche in der Diagonalreihe nicht ebenso oft das Zeichen + wie das Zeichen − führen. Dieses ermöglicht eine weitere Reduction, und so fortfahrend ersieht man, dass die Ausgangs-Gleichungen in folgender Form angenommen werden dürfen:

$$\begin{aligned} p'_{\alpha 1} &= p_{\alpha 1}, \\ p'_{\alpha 2} &= m_1^{(2)} p_{\alpha 1} - p_{\alpha 2}, \\ p'_{\alpha 3} &= m_1^{(3)} p_{\alpha 1} + m_2^{(3)} p_{\alpha 2} + p_{\alpha 3}, \\ p'_{\alpha 4} &= m_1^{(4)} p_{\alpha 1} + m_2^{(4)} p_{\alpha 2} + m_3^{(4)} p_{\alpha 3} - p_{\alpha 4}, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ p'_{\alpha\, 2n} &= m_1^{(2n)} p_{\alpha 1} + m_2^{(2n)} p_{\alpha 2} + \cdots + m_{2n-1}^{(2n)} p_{\alpha\, 2n-1} - p_{\alpha\, 2n}. \end{aligned}$$

Versteht man jetzt unter λ eine positive oder negative ganze Zahl, so ist

$$\begin{aligned} p'_{\alpha 1} &= p_{\alpha 1}, \\ p'_{\alpha 2} + \lambda p'_{\alpha 1} &= (m_1^{(2)} + 2\lambda) p_{\alpha 1} - (p_{\alpha 2} + \lambda p_{\alpha 1}), \end{aligned}$$

und das Periodensystem

$$p_{\alpha 1}, \quad p_{\alpha 2} + \lambda p_{\alpha 1}$$

ist gleichwerthig mit dem Periodensysteme

$$p_{\alpha 1}, \quad p_{\alpha 2}.$$

*) Zwei Periodensysteme heissen „äquivalent“ oder „gleichwerthig“, wenn die Perioden jedes derselben sich ganzzahlig aus den Perioden des anderen zusammensetzen lassen.

Wir können daher voraussetzen, dass $m_1^{(2)}$ einen der Werthe Null und Eins besitze; denn widrigenfalls kann doch λ so gewählt werden, dass das Gewünschte bei dem gleichwerthigen Periodensysteme

$$p_{\alpha 1}, \quad p_{\alpha 2}+\lambda p_{\alpha 1}, \quad p_{\alpha 3}, \quad \ldots \quad p_{\alpha 2n}$$

zutrifft.

Wir wollen nun annehmen, dass durch successive Einführung neuer primitiver Periodensysteme unsere Gleichungen auf die folgende Form gebracht werden könnten:

$$\begin{aligned}
p'_{\alpha 2\mu-1} &= p_{\alpha 2\mu-1}, \\
p'_{\alpha 2\mu} &= a_{2\mu} p_{\alpha 2\mu-1} - p_{\alpha 2\mu}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots k-1) \\
p'_{\alpha 2k-1} &= m_1^{(2k-1)} p_{\alpha 1} + m_2^{(2k-1)} p_{\alpha 2} + \cdots + m_{2k-2}^{(2k-1)} p_{\alpha 2k-2} + p_{\alpha 2k-1}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p'_{\alpha 2n} &= m_1^{(2n)} p_{\alpha 1} + \quad \cdots \quad + \cdots + m_{2n-1}^{(2n)} p_{\alpha 2n-1} - p_{\alpha 2n},
\end{aligned}$$

wobei die Coefficienten $a_2, a_4, \ldots a_{2k-2}$ einen der Werthe 0 und 1 besitzen.

Es soll nun gezeigt werden, dass durch Einführung eines neuen primitiven Periodensystems die einfache Form der Gleichungen, welche in dem alten Systeme bis zum Index $2k-2$ reicht, in dem neu eingeführten Systeme bis zum Index $2k$ besteht. Bei dieser Reduction wird durchgängig davon Gebrauch gemacht, dass die Form der betrachteten Gleichungen sich von der μ^{ten} Periode ab nicht ändert, wenn die $\mu-1$ vorhergehenden Perioden durch ein äquivalentes System von $\mu-1$ Perioden ersetzt werden.

Nehmen wir in der Gleichung für $p'_{\alpha 2k-1}$ auf beiden Seiten die conjugirt imaginären Werthe, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
p_{\alpha 2k-1} = {} & m_1^{(2k-1)} p_{\alpha 1} + m_3^{(2k-1)} p_{\alpha 3} + \cdots + m_{2k-3}^{(2k-1)} p_{\alpha 2k-3} \\
& + m_2^{(2k-1)} (a_2 p_{\alpha 1} - p_{\alpha 2}) + \cdots + m_{2k-2}^{(2k-1)} (a_{2k-2} p_{\alpha 2k-3} - p_{\alpha 2k-2}) \\
& + (m_1^{(2k-1)} p_{\alpha 1} + m_2^{(2k-1)} p_{\alpha 2} + \cdots + m_{2k-2}^{(2k-1)} p_{\alpha 2k-2} + p_{\alpha 2k-1}).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung muss identisch sein, da die $p_{\alpha\mu}$ ein primitives Periodensystem bilden. Also ist:

$$a_2 m_2^{(2k-1)} + 2m_1^{(2k-1)} = a_4 m_4^{(2k-1)} + 2m_3^{(2k-1)} = \cdots = a_{2k-2} m_{2k-2}^{(2k-1)} + 2m_{2k-3}^{(2k-1)} = 0.$$

Nun können wir aber jede der ganzen Zahlen

$$m_2^{(2k-1)}, \quad m_4^{(2k-1)}, \quad \ldots \quad m_{2k-2}^{(2k-1)}$$

als gleich 0 oder 1 voraussetzen; denn widrigenfalls könnten wir dieses durch Einführung von

$$p_{\alpha 1}, \quad p_{\alpha 2}, \quad \ldots \quad p_{\alpha 2k-2}, \quad p_{\alpha 2k-1} - \lambda_2 p_{\alpha 2} - \lambda_4 p_{\alpha 4} - \cdots - \lambda_{2k-2} p_{\alpha 2k-2}$$

an Stelle von

$$p_{\alpha 1}, \quad p_{\alpha 2}, \quad \ldots \quad p_{\alpha\, 2k-2}, \quad p_{\alpha\, 2k-1}$$

erreichen, wo die ganzen Zahlen

$$\lambda_2, \quad \lambda_4, \quad \ldots \quad \lambda_{2k-2}$$

passend zu bestimmen sind.

Wenn aber die $m_2^{(2k-1)}, \ldots m_{2k-2}^{(2k-1)}$ einen der Werthe 0 oder 1 haben, so folgt, da dasselbe von den $a_2, \ldots a_{2k-2}$ gilt, dass

$$m_1^{(2k-1)} = \quad m_3^{(2k-1)} = \cdots = \qquad m_{2k-3}^{(2k-1)} = 0,$$
$$a_2 m_2^{(2k-1)} = a_4 m_4^{(2k-1)} = \cdots = a_{2k-2} m_{2k-2}^{(2k-1)} = 0$$

ist. Je nachdem nun alle Zahlen

$$m_2^{(2k-1)}, \quad m_4^{(2k-1)}, \quad \ldots \quad m_{2k-2}^{(2k-1)}$$

Null sind, oder ein Theil derselben gleich 1, haben wir folgende beiden Fälle:

$$1) \quad \begin{aligned} p'_{\alpha\, 2\mu-1} &= p_{\alpha\, 2\mu-1} \\ p'_{\alpha\, 2\mu} &= a_{2\mu} p_{\alpha\, 2\mu-1} - p_{\alpha\, 2\mu} \\ p'_{\alpha\, 2k-1} &= p_{\alpha\, 2k-1} \\ \ldots & \ldots \ldots \\ \ldots & \ldots \ldots \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots k-1)$$

und

$$2) \quad \begin{aligned} p'_{\alpha\, 2\mu-1} &= p_{\alpha\, 2\mu-1} \\ p'_{\alpha\, 2\mu} &= a_{2\mu} p_{\alpha\, 2\mu-1} - p_{\alpha\, 2\mu} \\ p'_{\alpha\, 2k-1} &= p_{\alpha\, 2j} + p_{\alpha\, 2l} + \cdots + p_{\alpha\, 2i} + p_{\alpha\, 2k-1} \\ \ldots & \ldots \ldots \\ \ldots & \ldots \ldots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(\mu = 1, 2, \ldots k-1) \\ &(j < l < \cdots < i \leqq k-1) \end{aligned}$$

Wir führen zunächst den zweiten Fall auf den ersten zurück. Aus den Gleichungen

$$a_2 m_2^{(2k-1)} = a_4 m_4^{(2k-1)} = \cdots = 0$$

folgt, dass die Perioden

$$p_{\alpha\, 2j}, \quad p_{\alpha\, 2l}, \quad \ldots \quad p_{\alpha\, 2i}$$

rein imaginär sind. Ersetzen wir daher die Perioden

$$p_{\alpha 1}, \quad p_{\alpha 2}, \quad \ldots \quad p_{\alpha\, 2i}$$

durch das äquivalente System

$$p_{\alpha 1}, \quad p_{\alpha 2}, \quad \ldots \quad p_{\alpha\, 2i} + \cdots + p_{\alpha\, 2l} + p_{\alpha\, 2j},$$

so erhalten wir die Gleichungsform:

$$\begin{aligned}
p'_{\alpha\,2\mu-1} &= p_{\alpha\,2\mu-1}, & & (\mu=1,2,\dots k-1 \text{ mit Ausschluss von } \mu=i)\\
p'_{\alpha\,2\mu} &= a_{2\mu}p_{\alpha\,2\mu-1}-p_{\alpha\,2\mu},\\
p'_{\alpha\,2i-1} &= p_{\alpha\,2i-1},\\
p'_{\alpha\,2i} &= \qquad\qquad -p_{\alpha\,2i},\\
p'_{\alpha\,2k-1} &= p_{\alpha\,2i} \qquad +p_{\alpha\,2k-1},\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Wir ersetzen jetzt die Perioden

$$p_{\alpha\,2i-1},\quad p_{\alpha\,2i},\quad p_{\alpha\,2k-1}$$

durch das äquivalente System

$$2p_{\alpha\,2k-1}+p_{\alpha\,2i},\quad p_{\alpha\,2k-1},\quad p_{\alpha\,2i-1}$$

(so dass also unter den neuen $p_{\alpha\,2i-1}, p_{\alpha\,2i}, p_{\alpha\,2k-1}$ resp. die früheren $2p_{\alpha\,2k-1}+p_{\alpha\,2i}$, $p_{\alpha\,2k-1}, p_{\alpha\,2i-1}$ zu verstehen sind). Dann erhalten wir die Gleichungsform:

$$\begin{aligned}
p'_{\alpha\,2\mu-1} &= p_{\alpha\,2\mu-1}, & & (\mu=1,2,\dots k-1 \text{ mit Ausschluss von } \mu=i)\\
p'_{\alpha\,2\mu} &= a_{2\mu}p_{\alpha\,2\mu-1}-p_{\alpha\,2\mu},\\
p'_{\alpha\,2i-1} &= p_{\alpha\,2i-1},\\
p'_{\alpha\,2i} &= p_{\alpha\,2i-1} \quad -p_{\alpha\,2i},\\
p'_{\alpha\,2k-1} &= p_{\alpha\,2k-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Es ist also in der That der zweite Fall auf den ersten zurückgeführt, und wir dürfen für die weitere Betrachtung von folgenden Gleichungen ausgehen:

$$\begin{aligned}
p'_{\alpha\,2\mu-1} &= p_{\alpha\,2\mu-1}, & & (\mu=1,2,\dots k-1)\\
p'_{\alpha\,2\mu} &= a_{2\mu}p_{\alpha\,2\mu-1}-p_{\alpha\,2\mu},\\
p'_{\alpha\,2k-1} &= p_{\alpha\,2k-1},\\
p'_{\alpha\,2k} &= m_1^{(2k)}p_{\alpha 1}+\dots+m_{2k-1}^{(2k)}p_{\alpha\,2k-1}-p_{\alpha\,2k},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Durch Uebergang zu den conjugirt imaginären Grössen in der Gleichung für $p'_{\alpha\,2k}$ erhalten wir:

$$m_2^{(2k)} = m_4^{(2k)} = \dots = m_{2k-2}^{(2k)} = 0.$$

Nun können wieder

$$m_1^{(2k)},\quad m_3^{(2k)},\quad \dots\quad m_{2k-1}^{(2k)}$$

gleich 0 oder 1 angenommen werden, so dass wir entweder haben:

$$\begin{aligned} p'_{\alpha\,2\mu-1} &= p_{\alpha\,2\mu-1}, \\ p'_{\alpha\,2\mu} &= a_{2\mu} p_{\alpha\,2\mu-1} - p_{\alpha\,2\mu}, \\ p'_{\alpha\,2k-1} &= p_{\alpha\,2k-1}, \\ p'_{\alpha\,2k} &= \qquad\qquad -p_{\alpha\,2k}, \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots k-1)$$

oder

$$\begin{aligned} p'_{\alpha\,2\mu-1} &= p_{\alpha\,2\mu-1}, \\ p'_{\alpha\,2\mu} &= a_{2\mu} p_{\alpha\,2\mu-1} - p_{\alpha\,2\mu}, \\ p'_{\alpha\,2k-1} &= p_{\alpha\,2k-1}, \\ p'_{\alpha\,2k} &= p_{\alpha\,2j-1} + p_{\alpha\,2l-1} + \cdots + p_{\alpha\,2i-1} - p_{\alpha\,2k}, \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned} \qquad \begin{matrix} (\mu = 1, 2, \ldots k-1) \\ (j < l < \cdots < i \leqq k) \end{matrix}$$

Im letzteren Falle ersetzen wir, wenn $i = k$ ist, die Periode

$$p_{\alpha\,2k-1} \quad \text{durch} \quad p_{\alpha\,2k-1} + \cdots + p_{\alpha\,2l-1} + p_{\alpha\,2j-1}$$

und erhalten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p'_{\alpha\,2\mu-1} &= p_{\alpha\,2\mu-1}, \\ p'_{\alpha\,2\mu} &= a_{2\mu} p_{\alpha\,2\mu-1} - p_{\alpha\,2\mu}, \\ p'_{\alpha\,2k-1} &= p_{\alpha\,2k-1}, \\ p'_{\alpha\,2k} &= p_{\alpha\,2k-1} - p_{\alpha\,2k}, \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots k-1)$$

Wenn jedoch $i < k$ ist und irgend eine der Zahlen

$$a_{2j}, \quad a_{2l}, \quad \ldots \quad a_{2i}$$

z. B. a_{2l} gleich Null ist, so ersetzen wir

$$p_{\alpha\,2l-1} \quad \text{durch} \quad p_{\alpha\,2l-1} + p_{\alpha\,2j-1} + \cdots + p_{\alpha\,2i-1}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} p'_{\alpha\,2\mu-1} &= p_{\alpha\,2\mu-1}, \\ p'_{\alpha\,2\mu} &= a_{2\mu} p_{\alpha\,2\mu-1} - p_{\alpha\,2\mu}, \\ p'_{\alpha\,2l-1} &= p_{\alpha\,2l-1}, \\ p'_{\alpha\,2l} &= -p_{\alpha\,2l}, \\ p'_{\alpha\,2k-1} &= p_{\alpha\,2k-1}, \\ p'_{\alpha\,2k} &= p_{\alpha\,2l-1} - p_{\alpha\,2k}, \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned} \qquad \begin{matrix} (\mu = 1, 2, \ldots k-1 \\ \text{mit Ausschluss von } \mu = l) \end{matrix}$$

Ist endlich $i < k$ und sind alle Zahlen

$$a_{2j}, \quad a_{2l}, \quad \ldots \quad a_{2i}$$

gleich Eins, so ersetzen wir

$$p_{\alpha 2k} \quad \text{durch} \quad p_{\alpha 2k} - p_{\alpha 2j} - p_{\alpha 2l} - \cdots - p_{\alpha 2i}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} p'_{\alpha 2\mu-1} &= p_{\alpha 2\mu-1}, \\ p'_{\alpha 2\mu} &= a_{2\mu} p_{\alpha 2\mu-1} - p_{\alpha 2\mu}, \\ p'_{\alpha 2k-1} &= p_{\alpha 2k-1}, \\ p'_{\alpha 2k} &= -p_{\alpha 2k}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots k-1)$$

Es ist also in allen Fällen möglich, die für die ersten $2k-2$ Perioden vorausgesetzte Gleichungsform auf die ersten $2k$ Perioden zu übertragen. Nun können aber, wie oben gezeigt wurde, die beiden ersten Perioden $p_{\alpha 1}$, $p_{\alpha 2}$ von vornherein so gewählt werden, dass

$$\begin{aligned} p'_{\alpha 1} &= p_{\alpha 1}, \\ p'_{\alpha 2} &= a_2 p_{\alpha 1} - p_{\alpha 2} \end{aligned}$$

und $a_2 = 0$ oder 1 ist; diese Gleichungsformen lassen sich successive auf die vier ersten, sechs ersten u. s. f., also schliesslich auf alle $2n$ Perioden übertragen. Nunmehr sind wir am Ziele. Ist nämlich $a_{2\mu} = 0$, so sind die Perioden $p_{\alpha 2\mu-1}$ und $p_{\alpha 2\mu}$ bez. reell und rein imaginär; ist jedoch $a_{2\mu} = 1$, so ist die Periode $p_{\alpha 2\mu-1}$ reell, die Periode $2p_{\alpha 2\mu} - p_{\alpha 2\mu-1}$ rein imaginär.

Die Existenz eines so beschaffenen Periodensystems war aber die zu erweisende Behauptung.

Es sei schliesslich gestattet, noch einige sich von selbst darbietende Bemerkungen beizufügen. Ersetzt man in dem Periodensystem

$$p_{\alpha 1}, \quad p_{\alpha 2}, \quad \ldots \quad p_{\alpha 2n}$$

diejenigen Perioden $p_{\alpha 2\mu}$, welche nicht rein imaginär sind, durch $2p_{\alpha 2\mu} - p_{\alpha 2\mu-1}$, so entsteht ein, wenn auch nicht primitives, so doch linear unabhängiges System von $2n$ Perioden, von denen die Hälfte reell, die Hälfte rein imaginär ist. Man überzeugt sich nun sofort, dass jedes andere System von $2n$ linear unabhängigen und zur Hälfte reellen, zur Hälfte rein imaginären Perioden *ganzzahlig* aus jenem mit Hülfe der $p_{\alpha\lambda}$ gebildeten Systeme zusammengesetzt werden kann.

Hieraus werden wir jetzt folgenden Satz schliessen:

„Wie viele verschiedene Periodensysteme von der Art der $p_{\alpha\lambda}$ zu einer bestimmten Function $\varphi(u_1, u_2, \ldots u_n)$ auch gehören mögen, die Anzahl

der auftretenden rein imaginären Perioden wird in jedem dieser Periodensysteme dieselbe sein.“

Entsprechend den verschiedenen möglichen Werthen 0, 1, 2, ... n dieser „Anzahl“ ordnen sich die von uns betrachteten $2n$-fach periodischen Functionen in $n+1$ Classen*).

Zum Beweise dieses Satzes bemerken wir, dass zu jedem Periodensysteme eine bestimmte ganze Zahl D gehört, nämlich das Quadrat der Determinante derjenigen Zahlen, welche als Coefficienten in der Darstellung der Perioden des Systems durch die Perioden irgend eines primitiven Periodensystems auftreten. Sind zwei Periodensysteme gegenseitig ganzzahlig durch einander ausdrückbar, so sind die zu ihnen gehörigen Zahlen D einander gleich.

Es seien jetzt die Perioden

$$q_{\alpha 1}, \quad q_{\alpha 2}, \quad \ldots \quad q_{\alpha 2n}$$

von derselben Art wie die $p_{\alpha\lambda}$, und es mögen unter den $q_{\alpha\lambda}$ i rein imaginäre, unter den $p_{\alpha\lambda}$ k rein imaginäre Perioden vorhanden sein.

Bilden wir dann aus den $q_{\alpha\lambda}$ und aus den $p_{\alpha\lambda}$, wie oben angegeben, je ein Periodensystem von n reellen und n rein imaginären Perioden, so sind diese Systeme gegenseitig ganzzahlig durch einander ausdrückbar. Ihre zugehörigen Zahlen sind resp. 2^{2n-2i} und 2^{2n-2k}. Aus der Gleichheit dieser Zahlen folgt aber

$$i = k,$$

was wir beweisen wollten.

*) Dass alle diese Classen wirklich existiren, folgt z. B. aus der Theorie der hyperelliptischen Functionen.

Göttingen, den 20. Juni 1882.

Nachtrag: Wie ich später bemerkt habe, lässt sich der Satz auf pag. 8 auch aus dem Umstande herleiten, dass unter den Perioden der $2n$-fach periodischen Function solche nicht vorkommen können, deren Periodicitäts-Moduln dem absoluten Betrage nach sämmtlich kleiner als eine beliebig klein angenommene Grösse sind.

Göttingen, den 29. November 1882.

Ueber die Classification der Flächen nach der Verschiebbarkeit ihrer geodätischen Dreiecke.

(Von Herrn *Hans v. Mangoldt* in Göttingen.)

In seiner Abhandlung „Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke"*) hat Herr *Christoffel* die krummen Flächen nach der Verschiebbarkeit ihrer geodätischen Dreiecke in vier Gattungen eingetheilt.

Zur *ersten* Gattung werden alle die Flächen gezählt, bei denen eine stetige Ortsänderung eines von drei geodätischen Linien gebildeten Dreiecks ohne Aenderung der Seitenlängen und Winkel im Allgemeinen unmöglich ist. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass einzelne specielle geodätische Dreiecke existiren, die auf ein- oder mehrfache Weise stetig verschoben werden können, ohne dass ihre sechs Elemente sich ändern, wenn auch ein Beispiel für diesen Fall meines Wissens bis jetzt noch nicht bekannt ist.

Auf den Flächen der *zweiten* Gattung kann *jedes* geodätische Dreieck ohne Aenderung seiner Elemente stetig verschoben werden, jedoch im Allgemeinen nur so, dass jede Ecke auf einer ganz bestimmten Curve entlang gleitet. Die Frage, ob einzelne specielle Dreiecke vorkommen können, die auf mehr als eine Weise verschiebbar sind, bleibt wiederum unentschieden.

Die Flächen der *dritten* Gattung sind noch pag. 173—174 der cit. Abhandlung durch folgende Eigenschaft charakterisirt: Jedes geodätische Dreieck von unveränderlichen Elementen ist auf *einfach* unendlich viel verschiedene Weisen verschiebbar, d. h. man darf als Bahn der einen Ecke eine beliebige Curve willkürlich annehmen; ist diese aber einmal fixirt, so sind dadurch auch die Bahnen der beiden anderen Ecken im Allgemeinen völlig bestimmt, und nur für einzelne specielle Dreiecke bleibt die Möglichkeit offen, dass dies nicht der Fall ist.

---

*) Abh. der Kgl. Akad. der Wiss. zu Berlin a. d. Jahre 1868, p. 119—176.

Bei den Flächen der *vierten* Gattung fällt endlich auch die letzte Beschränkung weg. Jedes geodätische Dreieck kann hier ohne Aenderung seiner Elemente in jeder beliebigen Weise verschoben werden. Wie schon Herr *Christoffel* bewiesen hat, enthält diese Gattung alle Flächen constanten Krümmungsmaasses und nur diese.

Die nachstehende Untersuchung hat den Zweck, auch den Inhalt der vorangehenden Flächengattungen zu bestimmen. Sie führt zu folgenden Resultaten:

1. *Die dritte Flächengattung ist mit der vierten völlig identisch. Beide umfassen alle Flächen constanten Krümmungsmaasses und nur diese.*

Sobald also eine Fläche die Eigenschaft hat, dass jedes ihrer geodätischen Dreiecke in dem oben erklärten Sinne auf einfach unendlich viel verschiedene Weisen ohne Aenderung seiner Elemente verschiebbar ist, kann jedes solche Dreieck überhaupt in jeder beliebigen Weise verschoben werden. Der Fall, dass die Bahn einer Ecke zwar willkürlich gewählt werden kann, aber die der beiden anderen Ecken bestimmt, ist gar nicht möglich.

2. *Die zweite Gattung enthält alle Flächen, welche auf Rotationsflächen von nicht constantem Krümmungsmaass abwickelbar sind, und nur diese.*

Das erste dieser Resultate habe ich bereits in den Berichten über die Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. B. Bd. VIII, ohne Beweis veröffentlicht.

Herr *Weingarten* hat sodann in den Sitzungsberichten der Kgl. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1882, pag. 453—456, die beiden obigen Sätze angegeben; doch scheint mir in seinen Betrachtungen noch eine Lücke vorhanden zu sein. Herr *Weingarten* beweist nämlich zunächst den folgenden

Satz A: Wenn ein kleines geodätisches Dreieck, dessen Seiten als unendlich kleine Grössen erster Ordnung bezeichnet werden mögen, auf einer krummen Fläche ohne Aenderung seiner sechs Elemente verschiebbar ist, so können die Krümmungsmaasse der Fläche in den Eckpunkten des Dreiecks sich bei jeder Verschiebung des letzteren nur um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung ändern.

Sodann heisst es: Unter der Voraussetzung der Gültigkeit dieses Satzes für jedes in einer Fläche gelegene unendlich kleine Dreieck *„ist ein endliches in unendlich kleine Dreiecke zerlegtes Flächenstück der Fläche in ihr selbst stetig verschieblich, und daher die Fläche in sich ohne Dehnung*

ihrer Elemente verschiebbar“. Und nun ergiebt sich alles Uebrige durch einfache Betrachtungen.

Der soeben angeführte Schluss scheint mir nun nicht völlig stichhaltig zu sein.

Man überzeugt sich leicht, dass der Satz A zwar hinreicht, sowohl um die Constanz des Krümmungsmaasses der Flächen dritter und vierter Gattung und damit die Richtigkeit des ersten der obigen Sätze nachzuweisen, als auch um zu zeigen, dass die Linien constanten Krümmungsmaasses der Flächen zweiter Gattung geodätisch äquidistant sein müssen. Die Abwickelbarkeit dieser Flächen auf Rotationsflächen ergiebt sich indessen erst, wenn ausserdem bewiesen ist, dass die Linien constanten Krümmungsmaasses auch isotherm sind, d. h. dass sie zusammen mit ihrer Orthogonalschaar die Fläche in unendlich kleine Quadrate zu theilen vermögen, und dies kann, wie ich glaube, aus dem Satz A allein nicht geschlossen werden.

Wenn man versucht, auf dem von Herrn *Weingarten* eingeschlagenen Wege die Abwickelbarkeit der Flächen zweiter Gattung auf Rotationsflächen zu beweisen, so stösst man aus dem Grunde auf Schwierigkeiten, weil man von irgend zwei verschiedenen geodätischen Dreiecken, welche eine Ecke P gemeinsam haben, zunächst noch nicht weiss, ob sie ohne Aenderung ihrer Elemente so verschoben werden können, dass sie die Eigenschaft, eine gemeinsame Ecke zu besitzen, dauernd behalten. Es wäre nämlich denkbar, dass der Punkt P verschiedene Bahnen beschriebe, je nachdem man ihn als Ecke des einen, oder des anderen Dreiecks betrachtet. Sind die Dreiecke unendlich klein, so folgt allerdings aus dem Satz A, dass jene Bahnen nur eine unendlich kleine Entfernung haben, aber damit ist ihr wirkliches Zusammenfallen noch für kein einziges Paar endlicher Dreiecke bewiesen. Ehe nicht diese Schwierigkeit überwunden ist, halte ich es nicht für möglich, durch einen einfachen synthetischen Schluss zum Ziele zu gelangen.

Noch eine andere Ueberlegung ist geeignet, zu zeigen, dass der von Herrn *Weingarten* angewendete Schluss keine zwingende Kraft besitzt: Man denke sich auf einer Fläche zweiter Gattung ein geodätisches Dreieck, dessen Seiten kleine Grössen erster Ordnung sind, ohne Aenderung seiner Elemente irgend wie verschoben. Dann können sich seine drei Ecken im Allgemeinen nur um kleine Grössen zweiter Ordnung von denjenigen Curven constanten Krümmungsmaasses entfernen, welche durch die Ecken der An-

fangslage des Dreiecks hindurchgehen. Führt man die Dreiecksecken auf den kürzesten Wegen nach jenen Curven zurück, so werden sich die drei Seitenlängen nur um kleine Grössen zweiter, und die Winkel nur um kleine Grössen erster Ordnung ändern. Also:

Die Ecken jedes geodätischen Dreiecks einer Fläche zweiter Gattung, dessen Seiten kleine Grössen erster Ordnung sind, können auf den durch sie hindurchgehenden Linien constanten Krümmungsmaasses im Allgemeinen so verschoben werden, dass sich die Seiten und Winkel des Dreiecks nur um kleine Grössen zweiter resp. erster Ordnung ändern.

Diese Eigenschaft der betrachteten Flächen ist keineswegs dem vollen Inhalt des Satzes A äquivalent, aber sie scheint mir die einzige zu sein, von der Herr *Weingarten* Gebrauch macht. Sie allein kann jedoch zum Beweise der Abwickelbarkeit auf Rotationsflächen nimmermehr hinreichen; denn sie kommt, wie leicht zu zeigen, *allen* Flächen zu, deren Linien constanten Krümmungsmaasses geodätisch äquidistant sind, auch denjenigen, welche sich nicht auf Rotationsflächen abwickeln lassen.

Zu einem strengen Beweise der sämmtlichen Eingangs angegebenen Resultate gelangt man nun auf folgendem Wege: Man denke sich auf einer Fläche ein krummliniges Coordinatensystem, welches von zwei Curvenschaaren $q = \text{const.}$, $p = \text{const.}$ gebildet wird. In diesem System seien die Coordinaten der Ecken α, β, γ eines von kürzesten Linien gebildeten Dreiecks resp.

$$p_\alpha q_\alpha, \quad p_\beta q_\beta, \quad p_\gamma q_\gamma.$$

Durch diese sechs Grössen sind die Seitenlängen und die Winkel des Dreiecks im Allgemeinen eindeutig bestimmt. Denkt man sich p_α, q_α etc. als Functionen eines veränderlichen Parameters t, so erhält man ein veränderliches Dreieck, dessen sechs Elemente ebenfalls Functionen von t sind. Ist das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ohne Aenderung seiner Elemente stetig auf der Fläche verschiebbar, so muss es möglich sein, die Grössen p_α, q_α etc. so als Functionen von t zu bestimmen, dass die in Bezug auf diesen Parameter genommenen Differentialquotienten der sechs Dreieckselemente alle identisch gleich Null werden. Nun hat man aber, wenn man die Buchstaben α, β, γ auch als Bezeichnungen der Dreieckswinkel anwendet,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial p_\alpha}\cdot\frac{dp_\alpha}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial p_\beta}\cdot\frac{dp_\beta}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_\beta}\cdot\frac{dq_\beta}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial p_\gamma}\cdot\frac{dp_\gamma}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_\gamma}\cdot\frac{dq_\gamma}{dt},$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die Ableitungen der übrigen

Winkel und Seiten. Damit diese Summen verschwinden können, ohne dass die Grössen $\frac{dp_\alpha}{dt}$, $\frac{dq_\alpha}{dt}$, etc. alle gleich Null sind, muss die aus den Coefficienten der letzteren gebildete Determinante identisch gleich Null sein.

Diese Determinante sechsten Grades kann nun, wie Herr *Christoffel* gezeigt hat, stets in eine Determinante dritten Grades verwandelt werden. Vorausgesetzt, dass die betrachtete Fläche nicht auf einer Ebene abwickelbar ist, — ein Fall, den wir hier ohne Weiteres ausschliessen dürfen, — stimmt unsere Determinante sechsten Grades bis auf einen nicht verschwindenden Factor mit derjenigen Determinante überein, welche Herr *Christoffel* auf pag. 172 seiner Abhandlung mit

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A_\alpha & \Gamma_\alpha & B_\alpha \\ \Gamma_\beta & B_\beta & A_\beta \\ B_\gamma & A_\gamma & \Gamma_\gamma \end{vmatrix}$$

bezeichnet hat. Die Elemente dieser Determinante werden nach pag. 170 der *Christoffel*schen Abhandlung durch folgende Gleichungen erklärt:

$$A_\beta = \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} + \frac{\mathsf{A}}{(a)}; \quad B_\gamma = \frac{\partial \log(b)}{\partial b_\gamma} + \frac{\mathsf{B}}{(b)}; \quad \Gamma_\alpha = \frac{\partial \log(c)}{\partial c_\alpha} + \frac{\mathsf{\Gamma}}{(c)};$$

$$A_\gamma = \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} - \frac{\mathsf{A}}{(a)}; \quad B_\alpha = \frac{\partial \log(b)}{\partial b_\alpha} - \frac{\mathsf{B}}{(b)}; \quad \Gamma_\beta = \frac{\partial \log(c)}{\partial c_\beta} - \frac{\mathsf{\Gamma}}{(c)};$$

$$A_\alpha = -\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\mathsf{B}\cdot\frac{\partial \log(b)}{\partial b_\alpha} - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\mathsf{\Gamma}\cdot\frac{\partial \log(c)}{\partial c_\alpha} - \frac{\sin\beta}{(c)\sin\alpha} + \frac{\sin\gamma}{(b)\sin\alpha};$$

$$B_\beta = -\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\mathsf{\Gamma}\cdot\frac{\partial \log(c)}{\partial c_\beta} - \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot\mathsf{A}\cdot\frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} - \frac{\sin\gamma}{(a)\sin\beta} + \frac{\sin\alpha}{(c)\sin\beta};$$

$$\Gamma_\gamma = -\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\mathsf{A}\cdot\frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} - \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\mathsf{B}\cdot\frac{\partial \log(b)}{\partial b_\gamma} - \frac{\sin\alpha}{(b)\sin\gamma} + \frac{\sin\beta}{(a)\sin\gamma}.$$

Hierbei wurde zur Abkürzung

$$\mathsf{A} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta.\cos\gamma}{\sin\beta.\sin\gamma}; \quad \mathsf{B} = \frac{\cos\beta + \cos\gamma.\cos\alpha}{\sin\gamma.\sin\alpha}; \quad \mathsf{\Gamma} = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha.\cos\beta}{\sin\alpha.\sin\beta}$$

gesetzt; a, b, c bedeuten die *wirklichen* und (a), (b), (c) die *reducirten**) Längen der den Winkeln α, β, γ gegenüberliegenden Dreiecksseiten; ∂a_β, ∂b_γ, ∂c_α sind die Anfangselemente der Dreiecksseiten, vorausgesetzt, dass diese resp. in dem Sinne $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ genommen werden, und endlich ∂a_γ, ∂b_α, ∂c_β die Anfangselemente der Verlängerungen der Dreiecksseiten über γ, α, β hinaus. Ist Ω irgend eine von der Lage der Ecken

*) Vgl. *Christoffel* a. a. O. pag. 131 und 139.

des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ abhängige Grösse, so bedeutet $\frac{\partial \Omega}{\partial a_\beta}$ den Differentialquotienten von Ω, genommen unter der Voraussetzung, dass die Ecke β um ∂a_β verschoben werde, ***während die beiden anderen Ecken fest bleiben.*** Analog sind die Differentialquotienten mit den Nennern ∂b_γ, ∂c_α, etc. zu erklären.

Unsere Definitionsgleichungen der Elemente von Δ weichen zwar in der Form von denjenigen ab, welche Herr *Christoffel* gegeben hat, können aber aus diesen durch einfache Substitutionen leicht erhalten werden.

Für die Flächen *erster* Gattung ist Δ im Allgemeinen von Null verschieden.

Für die Flächen *zweiter* Gattung ist Δ, aber nicht jede Unterdeterminante von Δ identisch gleich Null.

Für die Flächen *dritter* Gattung sind nach der Definition des Herrn *Christoffel* alle Unterdeterminanten, aber nicht alle Elemente von Δ, und endlich für die Flächen der *vierten* Gattung auch alle Elemente von Δ identisch gleich Null.

Wir setzen jetzt den Winkel α gleich einem Rechten, weil hierdurch sehr beträchtliche Vereinfachungen eintreten. Man könnte zwar befürchten, dass die in dieser Annahme liegende Beschränkung der Allgemeinheit die Durchführung unserer Beweise unmöglich mache; doch wird sich zeigen, dass dies nicht der Fall ist.

Nimmt man nun die Seiten b, c hinreichend klein, so können die sämmtlichen Elemente der Determinante Δ und folglich auch diese Determinante selbst nach Potenzen von b und c entwickelt werden. Ist Δ identisch Null, so müssen alle Coefficienten in dieser Entwickelung verschwinden.

Indem man die Coefficienten der Glieder niedrigster Dimension in der Entwickelung von Δ gleich Null setzt, erhält man für das Krümmungsmaass der Fläche in einem beliebigen Punkte eine partielle Differentialgleichung, welche ausspricht, dass die Linien constanten Krümmungsmaasses geodätisch äquidistant sind.

Die Coefficienten der Glieder nächst höherer Dimension gleich Null gesetzt liefern eine zweite partielle Differentialgleichung, welche unter der Voraussetzung des Bestehens der vorigen Differentialgleichung aussagt, dass die Linien constanten Krümmungsmaasses auch isotherm sind.

Hieraus ergiebt sich dann mittelst bekannter Sätze, dass alle Flächen zweiter, dritter und vierter Gattung auf Rotationsflächen abwickelbar sind.

Nimmt man an, dass auch die Subdeterminanten zweiten Grades von Δ verschwinden, und setzt man die Coefficienten der Anfangsglieder in den Entwickelungen der letzteren gleich Null, so gelangt man sofort zu dem Resultat, dass das Krümmungsmaass eine Constante sein muss, womit dann das Zusammenfallen der dritten mit der vierten Flächengattung bewiesen ist.

Da auf den Rotationsflächen und den Flächen constanten Krümmungsmaasses jedes geodätische Dreieck wirklich ohne Aenderung seiner Elemente verschoben werden kann, und zwar auf den ersteren im Allgemeinen nur in einer, auf den letzteren in jeder beliebigen Weise, so erweisen sich die von uns benutzten nothwendigen Bedingungen der Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke zugleich als hinreichend.

So einfach diese Ueberlegungen sein mögen, so scheint es mir doch nicht überflüssig, die auszuführenden Rechnungen wenigstens in ihren Grundzügen zu skizziren. Denn die möglichen Vereinfachungen sind nicht gleich von vorn herein zu übersehen, und die Rechnungen werden von unerträglicher Weitläufigkeit, sobald man nicht sorgfältig jede Gelegenheit benutzt, sie abzukürzen.

Wir nehmen zunächst nur die Seite b als eine kleine Grösse an, denken uns Δ nach Potenzen von b entwickelt und berechnen den Coefficienten des Anfangsgliedes dieser Entwickelung. Hierbei setzen wir zur Abkürzung

$$\log(c) = h; \quad \frac{\partial \log(c)}{\partial c_\alpha} = h_1; \quad \frac{\partial \log(c)}{\partial c_\beta} = h_2.$$

Das Linienelement ∂b_α bezeichnen wir von jetzt an einfach mit ∂b, da es nicht mehr nöthig ist, dasselbe von dem Element ∂b_γ zu unterscheiden, welches aus unseren Formeln herausgeht. Endlich bezeichnen wir mit k das Krümmungsmaass unserer Fläche im Scheitel des rechten Winkels α.

Unter Benutzung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2(b)}{\partial b^2} + k.(b) = 0,$$

welcher die reducirte Länge (b) genügt, und der Differentialgleichung der geodätischen Linie b erhält man für die Grössen, aus welchen sich die Elemente von Δ zusammensetzen, die folgenden Entwickelungen:

$$(b) = b-\frac{k}{6}\cdot b^3+\tfrac{1}{12}\cdot\frac{\partial k}{\partial b}\cdot b^4+\Big(\frac{k^2}{120}-\tfrac{1}{40}\frac{\partial^2 k}{\partial b^2}\Big)\cdot b^5+\cdots,$$

$$(a) = (c)\cdot\Big\{1-\frac{\partial h}{\partial b}\cdot b+\tfrac{1}{2}\cdot\Big[\frac{\partial^2 h}{\partial b^2}+\Big(\frac{\partial h}{\partial b}\Big)^2\Big]\cdot b^2+\cdots\Big\},$$

$$\beta = \frac{b}{(c)}+\frac{1}{2(c)}\cdot\frac{\partial h}{\partial b}\cdot b^2-\frac{1}{6(c)}\cdot\Big[h_1^2+\frac{\partial^2 h}{\partial b^2}-\Big(\frac{\partial h}{\partial b}\Big)^2\Big]\cdot b^3+\cdots,$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2}+h_1 b-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial b}\cdot b^2+\tfrac{1}{6}\cdot\Big(\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2}-h_1^3\Big)\cdot b^3+\cdots,$$

$$\sin\beta = \frac{b}{(c)}+\frac{1}{2(c)}\cdot\frac{\partial h}{\partial b}\cdot b^2-\frac{1}{6(c)}\cdot\Big[h_1^2+\frac{\partial^2 h}{\partial b^2}-\Big(\frac{\partial h}{\partial b}\Big)^2+\frac{1}{(c)^2}\Big]\cdot b^3+\cdots,$$

$$\cos\beta = 1-\frac{b^2}{2(c)^2}-\frac{1}{2(c)^2}\cdot\frac{\partial h}{\partial b}\cdot b^3+\frac{1}{6(c)^2}\cdot\Big[h_1^2+\frac{\partial^2 h}{\partial b^2}-\tfrac{7}{4}\cdot\Big(\frac{\partial h}{\partial b}\Big)^2+\frac{1}{4(c)^2}\Big]\cdot b^4+\cdots,$$

$$\sin\gamma = 1-\frac{h_1^2}{2}\cdot b^2+\frac{h_1}{2}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial b}\cdot b^3+\Big[-\frac{h_1}{6}\cdot\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2}+\tfrac{5}{24}\cdot h_1^4-\tfrac{1}{8}\Big(\frac{\partial h_1}{\partial b}\Big)^2\Big]\cdot b^4+\cdots,$$

$$\cos\gamma = -h_1 b+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial b}\cdot b^2-\tfrac{1}{6}\cdot\Big(\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2}-2h_1^3\Big)\cdot b^3+\cdots,$$

$$\begin{aligned}A = (c)\cdot\Big\{&-h_1+\tfrac{1}{2}\cdot\Big(\frac{\partial h_1}{\partial b}+h_1\cdot\frac{\partial h}{\partial b}\Big)\cdot b\\ &+\Big[\frac{h_1}{3(c)^2}-\tfrac{1}{6}\cdot\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2}-\frac{h_1^3}{3}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\partial h}{\partial b}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial b}-\frac{h_1}{6}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial b^2}-\frac{h_1}{12}\cdot\Big(\frac{\partial h}{\partial b}\Big)^2\Big]\cdot b^2+\cdots\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B = 1&+\tfrac{1}{2}\cdot\Big(h_1^2-\frac{1}{(c)^2}\Big)\cdot b^2-\tfrac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{(c)^2}\cdot\frac{\partial h}{\partial b}+h_1\cdot\frac{\partial h_1}{\partial b}\Big)\cdot b^3\\ &+\Big[-\frac{h_1^2}{12(c)^2}+\frac{1}{6(c)^2}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial b^2}-\frac{7}{24(c)^2}\cdot\Big(\frac{\partial h}{\partial b}\Big)^2\\ &\qquad+\frac{1}{24(c)^4}+\frac{h_1}{6}\cdot\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2}+\frac{h_1^4}{24}+\tfrac{1}{8}\cdot\Big(\frac{\partial h_1}{\partial b}\Big)^2\Big]\cdot b^4+\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma = (c)\cdot\Big\{&-h_1+\tfrac{1}{2}\cdot\Big(\frac{\partial h_1}{\partial b}+h_1\cdot\frac{\partial h}{\partial b}\Big)\cdot b\\ &-\tfrac{1}{6}\cdot\Big[\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2}-h_1^3+h_1\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial b^2}+\frac{h_1}{2}\cdot\Big(\frac{\partial h}{\partial b}\Big)^2+\frac{h_1}{(c)^2}+\tfrac{3}{2}\cdot\frac{\partial h}{\partial b}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial b}\Big]\cdot b^2+\cdots\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\log(a)}{\partial a_\beta} = -h_2+\frac{\partial h_2}{\partial b}\cdot b+\cdots,$$

$$\frac{\partial\log(a)}{\partial a_\gamma} = -h_1+\frac{\partial h_1}{\partial b}\cdot b-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2}\cdot b^2+\cdots,$$

$$\frac{\partial\log(b)}{\partial b_a} = \frac{1}{b}\cdot\Big\{1-\frac{k}{3}\cdot b^2+\tfrac{1}{12}\cdot\frac{\partial k}{\partial b}\cdot b^3-\Big(\frac{k^2}{45}+\tfrac{1}{60}\cdot\frac{\partial^2 k}{\partial b^2}\Big)\cdot b^4+\cdots\Big\},$$

$$\frac{\partial\log(b)}{\partial b_\gamma} = -\frac{1}{b}\cdot\Big\{1-\frac{k}{3}\cdot b^2+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\partial k}{\partial b}\cdot b^3-\Big(\frac{k^2}{45}+\tfrac{1}{10}\cdot\frac{\partial^2 k}{\partial b^2}\Big)\cdot b^4+\cdots\Big\}.$$

Die Determinante Δ bringen wir nun auf die Form

$$\Delta = \tfrac{1}{4}b^4\cdot\begin{vmatrix} \frac{2}{b}\cdot A_\alpha & \frac{2}{b}\cdot\Gamma_\alpha & \frac{2}{b^2}\cdot(B_\alpha+A_\alpha) \\ \Gamma_\beta & B_\beta & \frac{1}{b}\cdot(A_\beta+\Gamma_\beta) \\ \frac{2}{b^2}\cdot(B_\gamma-A_\alpha) & \frac{2}{b^2}\cdot(A_\gamma-\Gamma_\alpha) & \frac{2}{b^3}\cdot(\Gamma_\gamma+B_\gamma-B_\alpha-A_\alpha) \end{vmatrix},$$

wodurch erreicht wird, dass die Entwickelungen der sämmtlichen Elemente der Determinante mit Gliedern beginnen, welche von b unabhängig sind. Bezeichnen wir die aus diesen Anfangsgliedern gebildete Determinante mit D, so wird

$$\Delta = \tfrac{1}{4}\cdot D.b^4+b^5.\mathfrak{P}(b),$$

wo $\mathfrak{P}(b)$ eine Potenzreihe von b bedeutet, welche keine negativen Potenzen dieser Grösse enthält. Setzt man nun zur Vereinfachung

$$a_{11} = k+h_1^2-\frac{1}{(c)^2},\quad a_{12} = \frac{\partial h_1}{\partial b}+h_1\cdot\frac{\partial h}{\partial b},\qquad a_{13} = \frac{1}{(c)^2}\cdot\frac{\partial h}{\partial b}+h_1\cdot\frac{\partial h_1}{\partial b},$$

$$a_{21} = h_1+h_2,\qquad a_{22} = -\frac{\partial h}{\partial b}+(c)^2.h_1\cdot\frac{\partial h_2}{\partial b},\quad a_{23} = \frac{\partial h_2}{\partial b}-h_1\cdot\frac{\partial h}{\partial b},$$

$$a_{31} = -\frac{1}{(c)^2}\cdot\frac{\partial h}{\partial b}-h_1\cdot\frac{\partial h_1}{\partial b}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\partial k}{\partial b},\quad a_{32} = \tfrac{1}{3}\cdot\left\{h_1\cdot\left[\left(\frac{\partial h}{\partial b}\right)^2-\frac{\partial^2 h}{\partial b^2}-\frac{1}{(c)^2}+h_1^2\right]-\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2}\right\},$$

$$a_{33} = \tfrac{1}{3}\cdot\left\{\left(\frac{1}{(c)^2}-h_1^2\right)\cdot\left(k+h_1^2-\frac{1}{(c)^2}\right)+\frac{1}{(c)^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial h}{\partial b}\right)^2-\frac{\partial^2 h}{\partial b^2}\right]-h_1\cdot\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2}\right\},$$

so ergiebt sich für die Determinante D selbst aus den obigen Entwickelungen der Ausdruck:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Nunmehr lassen wir auch c hinreichend klein werden und entwickeln die Determinante D nach Potenzen von c. Dabei bezeichnen wir das Element ∂c_α, welches jetzt nicht mehr von ∂c_β unterschieden zu werden braucht, einfach mit ∂c. Ausserdem setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial k}{\partial c} = k_1;\quad \frac{\partial^2 k}{\partial c^2} = k_2;\quad \frac{\partial^3 k}{\partial c^3} = k_3.$$

Unter Benutzung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2(c)}{\partial c^2}+k.(c) = 0$$

ergeben sich zunächst folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
(c) &= c-\frac{k}{6}\cdot c^3-\frac{k_1}{12}\cdot c^4+\Big(\frac{k^2}{120}-\frac{k_2}{40}\Big)\cdot c^5+\Big(\frac{k.k_1}{120}-\frac{k_3}{180}\Big)\cdot c^6+\cdots,\\
(c)^2 &= c^2-\frac{k}{3}\cdot c^4-\frac{k_1}{6}\cdot c^5+\Big(\frac{2k^2}{45}-\frac{k_2}{20}\Big)\cdot c^6+\Big(\frac{2k.k_1}{45}-\frac{k_3}{90}\Big)\cdot c^7+\cdots,\\
\frac{1}{(c)^2} &= \frac{1}{c^2}+\frac{k}{3}+\frac{k_1}{6}\cdot c+\Big(\frac{k^2}{15}+\frac{k_2}{20}\Big)\cdot c^2+\Big(\frac{k.k_1}{15}+\frac{k_3}{90}\Big)\cdot c^3+\cdots,\\
h &= \log c-\frac{k}{6}\cdot c^2-\frac{k_1}{12}\cdot c^3-\Big(\frac{k^2}{180}+\frac{k_2}{40}\Big)\cdot c^4-\Big(\frac{k.k_1}{180}+\frac{k_3}{180}\Big)\cdot c^5+\cdots,\\
h_1 &= -\frac{1}{c}+\frac{k}{3}\cdot c+\frac{k_1}{12}\cdot c^2+\Big(\frac{k^2}{45}+\frac{k_2}{60}\Big)\cdot c^3+\Big(\frac{k.k_1}{60}+\frac{k_3}{360}\Big)\cdot c^4+\cdots,\\
h_2 &= \frac{1}{c}-\frac{k}{3}\cdot c-\frac{k_1}{4}\cdot c^2-\Big(\frac{k^2}{45}+\frac{k_2}{10}\Big)\cdot c^3-\Big(\frac{k.k_1}{36}+\frac{k_3}{36}\Big)\cdot c^4+\cdots.
\end{aligned}
$$

Diese Formeln lassen erkennen, dass in den Ausdrücken für

$$\frac{\partial h}{\partial b},\quad \frac{\partial^2 h}{\partial b^2},\quad \frac{\partial h_1}{\partial b},\quad \frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2},\quad \frac{\partial h_2}{\partial b},$$

welche wir weiter zu bilden haben, die Differentialquotienten

$$\frac{\partial k_1}{\partial b},\quad \frac{\partial^2 k_1}{\partial b^2},\quad \frac{\partial k_2}{\partial b},\quad \frac{\partial^2 k_2}{\partial b^2},\quad \frac{\partial k_3}{\partial b},\quad \frac{\partial^2 k_3}{\partial b^2}$$

vorkommen, die sich selbst wieder als Functionen von c erweisen. Denn denken wir uns den einen Endpunkt von c auf b verschoben, während der andere fest bleibt, so ändern sich die Lage und Richtung des Elementes ∂c, welches ja in den Nennern der Ausdrücke k_1, k_2, k_3 vorkommt, in einer von der Länge der Seite c abhängigen Weise. Die Entwickelungen dieser Grössen $\frac{\partial k_1}{\partial b}$, $\frac{\partial^2 k_1}{\partial b^2}$, etc. sind nun zu allernächst herzustellen.

Hierzu denken wir uns das Quadrat des Linienelementes unserer Fläche gegeben in der Form

$$ds^2 = \lambda(dp^2+dq^2)$$

und nehmen der Einfachheit wegen an, dass die ursprüngliche Richtung von ∂c mit der der wachsenden p und die Richtung von ∂b mit der der wachsenden q zusammenfällt.

Nun sei P der Anfangs- und Q der Endpunkt einer beliebigen geodätischen Linie von der Länge l, und φ der Winkel, den ihre Anfangsrichtung mit der Richtung der wachsenden p einschliesst, von dieser letzteren an positiv nach derjenigen Seite gezählt, auf welcher q zunimmt. Bezeichnen wir mit p, q die Coordinaten des Punktes P in dem auf der Fläche ange-

nommenen System, mit ∂s das Anfangselement der geodätischen Linie l, mit $p+\partial p$, $q+\partial q$ die Coordinaten seines Endpunktes, und setzen wir zur Abkürzung

$$\log\lambda = \nu,$$

so wird

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\cos\varphi; \quad \frac{\partial q}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\sin\varphi,$$

und, da ∂s ein Element einer *geodätischen* Linie ist,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\cdot\left(\frac{\partial\nu}{\partial q}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial\nu}{\partial p}\cdot\sin\varphi\right).$$

Ist nun k das Krümmungsmaass der Fläche im Punkte P, oder auch irgend eine andere Function der Grössen p, q, so ergeben sich hieraus die Formeln

$$\frac{\partial k}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\left(\frac{\partial k}{\partial p}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial k}{\partial q}\cdot\sin\varphi\right),$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial s^2} = u.\sin^2\varphi + 2v.\sin\varphi.\cos\varphi + w.\cos^2\varphi,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 k}{\partial s^3} = {} & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial q} + v\cdot\frac{\partial\nu}{\partial p}\right)\cdot\sin^3\varphi \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial p} + 2\cdot\frac{\partial v}{\partial q} - v\cdot\frac{\partial\nu}{\partial q} - (u-w)\cdot\frac{\partial\nu}{\partial p}\right]\cdot\sin^2\varphi.\cos\varphi \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\left[2\cdot\frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial q} - v\cdot\frac{\partial\nu}{\partial p} + (u-w)\cdot\frac{\partial\nu}{\partial q}\right]\cdot\sin\varphi.\cos^2\varphi \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial p} + v\cdot\frac{\partial\nu}{\partial q}\right)\cdot\cos^3\varphi,\end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$u = \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{\partial^2 k}{\partial q^2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial k}{\partial p}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial p} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial k}{\partial q}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial q}\right),$$

$$v = \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{\partial^2 k}{\partial p\partial q} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial k}{\partial p}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial q} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial k}{\partial q}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial p}\right),$$

$$w = \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{\partial^2 k}{\partial p^2} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial k}{\partial p}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial p} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial k}{\partial q}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial q}\right),$$

gesetzt wurde.

Jetzt sei $\partial\sigma$ ein von P ausgehendes Element einer geodätischen Linie, welches mit ∂s den Winkel θ einschliesst, der von ∂s an in gleichem Sinne wie der Winkel φ zu zählen ist. Man denke sich den Anfangspunkt der Curve PQ um $\partial\sigma$ verschoben, *während der Endpunkt Q fest bleibt,* und bilde unter dieser Voraussetzung die Differentialquotienten

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma},\quad \frac{\partial\theta}{\partial\sigma},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma},\quad \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right),\quad \text{etc.}$$

Dann erhält man zunächst

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = -\cos\theta,$$

und in Anbetracht, dass $\partial\sigma$ ein Element einer *geodätischen* Linie ist,

$$\frac{\partial\theta}{\partial\sigma} = -\frac{\partial \log(l)}{\partial s}\cdot\sin\theta; \quad \frac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\cdot\left[\frac{\partial\nu}{\partial q}\cdot\cos(\varphi+\theta) - \frac{\partial\nu}{\partial p}\cdot\sin(\varphi+\theta)\right],$$

woraus

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = \frac{\partial\log(l)}{\partial s}\cdot\sin\theta + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\cdot\left[\frac{\partial\nu}{\partial q}\cdot\cos(\varphi+\theta) - \frac{\partial\nu}{\partial p}\cdot\sin(\varphi+\theta)\right]$$

folgt. Dabei bezeichnet (l) die reducirte Länge der Linie l. Ferner ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma^2} = -\frac{\partial\log(l)}{\partial s}\cdot\sin^2\theta$$

und

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right) = \cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\partial k}{\partial p}\right) + \sin\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\partial k}{\partial q}\right)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\left(\frac{\partial k}{\partial q}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial k}{\partial p}\cdot\sin\varphi\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}.$$

Die weiteren Formeln brauchen nicht mehr vollständig entwickelt zu werden. Indem man allgemein mit φ_0 eine Grösse bezeichnet, welche verschwindet, sobald $\varphi = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, erhält man

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2} = \sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\log(l)}{\partial s}\right) + \sin^2(\varphi+\theta)\cdot\frac{1}{4\lambda}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial p}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial q}$$
$$-\sin(\varphi+\theta)\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial p}\right) + \varphi_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}\right) = \cos^2\varphi\cdot\left(2v\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + \frac{\partial w}{\partial\sigma}\right) + \varphi_0$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right) = \cos\varphi\cdot\left[\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\partial k}{\partial p}\right) + 2\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\partial k}{\partial q}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\partial k}{\partial p}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\partial k}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2}\right] + \varphi_0.$$

In den Ausdrücken für $\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}\right)$ und $\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}\right)$ braucht man nur diejenigen Glieder zu berücksichtigen, welche den Factor $\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}$ enthalten, und endlich in dem Ausdruck für $\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}\right)$ nur diejenigen, welche mit $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)^2$ multiplicirt sind. Unter Weglassung aller übrigen Theile ergiebt sich:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}\right) = \cos^3\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\left[2\frac{\partial v}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial q}-v\cdot\frac{\partial \nu}{\partial p}+(u-w)\cdot\frac{\partial \nu}{\partial q}\right]+\varphi_0+\cdots,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}\right) = \cos^2\varphi\cdot\left[4\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial v}{\partial\sigma}+2(u-w)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)^2\right]+\varphi_0+\cdots,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\sigma^3}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial s^2}\right)$$

$$= \cos^3\varphi\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)^3\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\left[2\frac{\partial u}{\partial p}+4\frac{\partial v}{\partial q}-3\frac{\partial w}{\partial p}-5v\cdot\frac{\partial \nu}{\partial q}-2(u-w)\cdot\frac{\partial \nu}{\partial p}\right]+\varphi_0+\cdots.$$

Jetzt lassen wir ∂s mit ∂c und $\partial\sigma$ mit ∂b zusammenfallen, wodurch $\varphi = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ wird, und verstehen unter p, q die Coordinaten des Anfangspunktes der Seite c. Dann ergeben sich zunächst für die Differentialquotienten $\frac{\partial c}{\partial b}$, $\frac{\partial^2 c}{\partial b^2}$ der Länge c die Gleichungen

$$\frac{\partial c}{\partial b} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial b^2} = -h_1 = \frac{1}{c}-\frac{k}{3}\cdot c-\frac{k_1}{12}\cdot c^2-\left(\frac{k^2}{45}+\frac{k_2}{60}\right)\cdot c^3-\left(\frac{kk_1}{60}+\frac{k_3}{360}\right)\cdot c^4-\cdots$$

und weiter, zum Theil ebenfalls unter Benutzung der Entwickelung von h_1, die folgenden Formeln:

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\partial k}{\partial p},\qquad k_2 = w,\quad k_3 = \frac{\partial w}{\partial c}+v\cdot\frac{\partial \nu}{\partial b},$$

$$\frac{\partial k}{\partial b} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\partial k}{\partial q},\qquad \frac{\partial^2 k}{\partial b^2} = u;$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial b} = h_1\cdot\frac{\partial k}{\partial b}+v = -\frac{\partial k}{\partial b}\cdot\frac{1}{c}+v+\frac{k}{3}\cdot\frac{\partial k}{\partial b}\cdot c+c^2.\mathfrak{P}(c),$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial b} = -2v\cdot\frac{1}{c}+\frac{\partial w}{\partial b}-v\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c}+c.\mathfrak{P}(c),$$

$$\frac{\partial k_3}{\partial b} = -\left[2\cdot\frac{\partial v}{\partial c}+\frac{\partial w}{\partial b}-v\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c}+(u-w)\cdot\frac{\partial \nu}{\partial b}\right]\cdot\frac{1}{c}+\mathfrak{P}(c);$$

$$\frac{\partial^2 k_1}{\partial b^2} = -k_1.h_1^2+2u.h_1+\frac{\partial v}{\partial b}-\frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial c}\cdot(u-w)+\frac{\partial k}{\partial b}\cdot\frac{\partial h_1}{\partial b}$$

$$= -k_1\cdot\frac{1}{c^2}-2u\cdot\frac{1}{c}+\frac{2kk_1}{3}+\frac{\partial v}{\partial b}-\frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial c}\cdot(u-w)+c.\mathfrak{P}(c),$$

$$\frac{\partial^2 k_2}{\partial b^2} = 2(u-w).h_1^2+\left[4\frac{\partial v}{\partial b}-2(u-w)\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c}\right]\cdot h_1+\mathfrak{P}(c)$$

$$= 2(u-w)\cdot\frac{1}{c^2}-\left[4\frac{\partial v}{\partial b}-2(u-w)\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c}\right]\cdot\frac{1}{c}+\mathfrak{P}(c),$$

$$\frac{\partial^2 k_3}{\partial b^2} = \left[2\frac{\partial u}{\partial c}+4\frac{\partial v}{\partial b}-3\frac{\partial w}{\partial c}-5v\cdot\frac{\partial \nu}{\partial b}-2(u-w)\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c}\right]\cdot\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c}\cdot\mathfrak{P}(c).$$

Hierbei bedeutet $\mathfrak{P}(c)$ jedesmal eine Potenzreihe von c, welche keine negativen Potenzen dieser Grösse enthält. Nunmehr können die Entwickelungen von $\frac{\partial h}{\partial b}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial b^2}$, $\frac{\partial h_1}{\partial b}$, $\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2}$ und $\frac{\partial h_2}{\partial b}$, soweit wir sie brauchen, hergestellt werden. Man findet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial b} &= -\frac{1}{12}\frac{\partial k}{\partial b}\cdot c^2 - \frac{v}{30}\cdot c^3 \\
&\quad -\left(\frac{k}{30}\cdot\frac{\partial k}{\partial b} + \frac{7}{360}\frac{\partial w}{\partial b} - \frac{7v}{360}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c} - \frac{1}{90}\frac{\partial v}{\partial c} - \frac{u-w}{180}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial b}\right)\cdot c^4 + \cdots, \\
\frac{\partial h_1}{\partial b} &= \frac{1}{4}\frac{\partial k}{\partial b}\cdot c + \frac{v}{20}\cdot c^2 \\
&\quad +\left(\frac{k}{18}\cdot\frac{\partial k}{\partial b} + \frac{1}{72}\frac{\partial w}{\partial b} - \frac{v}{72}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c} - \frac{1}{180}\frac{\partial v}{\partial c} - \frac{u-w}{360}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial b}\right)\cdot c^3 + \cdots, \\
\frac{\partial h_2}{\partial b} &= -\frac{1}{12}\frac{\partial k}{\partial b}\cdot c - \frac{v}{20}\cdot c^2 \\
&\quad -\left(\frac{k}{10}\cdot\frac{\partial k}{\partial b} + \frac{13}{180}\frac{\partial w}{\partial b} - \frac{13v}{180}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c} - \frac{1}{18}\frac{\partial v}{\partial c} - \frac{u-w}{36}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial b}\right)\cdot c^3 + \cdots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial b^2} &= \frac{1}{c^2} - \frac{2k}{3} - \frac{k_1}{4}\cdot c + \left(\frac{k^2}{15} - \frac{u}{20} - \frac{w}{15}\right)\cdot c^2 \\
&\quad +\left(\frac{kk_1}{60} - \frac{1}{72}\frac{\partial w}{\partial c} - \frac{v}{360}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial b} - \frac{1}{180}\frac{\partial v}{\partial b} - \frac{1}{90}\frac{\partial u}{\partial c} + \frac{u-w}{360}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c}\right)\cdot c^3 + \cdots, \\
\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2} &= \frac{1}{c^3} + \left(-\frac{k^2}{15} + \frac{u}{5}\right)\cdot c \\
&\quad +\left(\frac{kk_1}{180} - \frac{v}{180}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial b} + \frac{1}{36}\frac{\partial v}{\partial b} - \frac{u-w}{72}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c} + \frac{1}{180}\frac{\partial u}{\partial c}\right)\cdot c^2 + \cdots.
\end{aligned}$$

Die Determinante D bringen wir nun auf die Form

$$D = \frac{c^5}{12.6.12}\cdot\begin{vmatrix}
\frac{12}{c^2}\cdot\left(a_{11} - \frac{2a_{21}}{c}\right) & \frac{12}{c^2}\cdot\left(a_{12} - \frac{2a_{22}}{c}\right) & \frac{12}{c^2}\cdot\left(a_{13} + \frac{a_{12}}{c} - \frac{2a_{23}}{c} - \frac{2a_{22}}{c^2}\right) \\
\frac{6a_{21}}{c^2} & \frac{6a_{22}}{c^2} & \frac{6}{c^2}\cdot\left(a_{23} + \frac{a_{22}}{c}\right) \\
\frac{12a_{31}}{c} & \frac{12a_{32}}{c} & \frac{12}{c}\cdot\left(a_{33} + \frac{a_{32}}{c}\right)
\end{vmatrix}.$$

Wenn man das Element der ι^{ten} Horizontalreihe und der $\varkappa^{\text{ten}}$ Verticalreihe in der vorstehenden Determinante mit $\alpha_{\iota\varkappa}$ bezeichnet und die verschiedenen Bestandtheile der einzelnen Elemente unserer Determinante genau so zusammenfasst, wie es im Folgenden geschehen ist, so reichen unsere bisherigen Formeln aus, um die Entwickelung jedes Elementes bis auf die Glieder erster Dimension incl. herzustellen, was sonst nicht der Fall sein würde. Durch Ausführung dieser Rechnungen erhält man:

$$\alpha_{11} = \frac{12}{c^2}\cdot\left[k+h_1^2-\frac{1}{(c)^2}-\frac{2}{c}\cdot(h_1+h_2)\right] = w+\left(-\frac{4kk_1}{15}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c}+\frac{2}{5}\frac{\partial w}{\partial c}+\frac{2v}{5}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial b}\right)\cdot c+\cdots,$$

$$\alpha_{12} = \frac{12}{c^2}\cdot\left[\frac{\partial h_1}{\partial b}+\frac{\partial h}{\partial b}\cdot\left(h_1+\frac{2}{c}\right)-\frac{2(c)^2}{c}\cdot h_1\cdot\frac{\partial h_2}{\partial b}\right]$$

$$= -v+\left(-\frac{17k}{15}\cdot\frac{\partial k}{\partial b}-\frac{9}{5}\frac{\partial w}{\partial b}+\frac{9v}{5}\frac{\partial \nu}{\partial c}+\frac{7}{5}\frac{\partial v}{\partial c}+\frac{7(u-w)}{10}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial b}\right)\cdot c+\cdots,$$

$$\alpha_{13} = \frac{12}{c^2}\cdot\left\{\frac{\partial h}{\partial b}\cdot\left[\frac{1}{(c)^2}+\frac{3h_1}{c}+\frac{2}{c^2}\right]+\frac{\partial h_1}{\partial b}\cdot\left(\frac{1}{c}+h_1\right)-\frac{\partial h_2}{\partial b}\cdot\left[\frac{2}{c}+\frac{2(c)^2h_1}{c^2}\right]\right\}$$

$$= k\cdot\frac{\partial k}{\partial b}+\left(\frac{k_1}{3}\cdot\frac{\partial k}{\partial b}+\frac{7k}{15}\cdot v\right)\cdot c+\cdots,$$

$$\alpha_{21} = \frac{6}{c^2}\cdot(h_1+h_2) = -k_1-\frac{w}{2}\cdot c+\cdots,$$

$$\alpha_{22} = \frac{6}{c^2}\cdot\left[-\frac{\partial h}{\partial b}+(c)^2.h_1\cdot\frac{\partial h_2}{\partial b}\right] = \frac{\partial k}{\partial b}+\frac{v}{2}\cdot c+\cdots,$$

$$\alpha_{23} = \frac{6}{c^2}\cdot\left[\frac{\partial h_2}{\partial b}\cdot\left(1+\frac{(c)^2h_1}{c}\right)-\frac{\partial h}{\partial b}\cdot\left(\frac{1}{c}+h_1\right)\right] = -\frac{k}{6}\cdot\frac{\partial k}{\partial b}\cdot c+\cdots,$$

$$\alpha_{31} = -\frac{12}{c}\cdot\left[\frac{1}{(c)^2}\cdot\frac{\partial h}{\partial b}+h_1\cdot\frac{\partial h_1}{\partial b}+\frac{1}{3}\frac{\partial k}{\partial b}\right] = v+\left(\frac{2k}{5}\cdot\frac{\partial k}{\partial b}+\frac{2}{5}\frac{\partial w}{\partial b}-\frac{2v}{5}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c}-\frac{1}{5}\frac{\partial v}{\partial c}-\frac{u-w}{10}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial b}\right)\cdot c+\cdots,$$

$$\alpha_{32} = \frac{4}{c}\cdot\left\{h_1\cdot\left[\left(\frac{\partial h}{\partial b}\right)^2-\frac{\partial^2 h}{\partial b^2}-\frac{1}{(c)^2}+h_1^2\right]-\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2}\right\}$$

$$= -u+\left(-\frac{kk_1}{15}+\frac{v}{15}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial b}-\frac{1}{15}\frac{\partial u}{\partial c}-\frac{2}{15}\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{u-w}{15}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial c}\right)\cdot c+\cdots,$$

$$\alpha_{33} = \frac{4}{c}\cdot\left\{\left[\left(\frac{\partial h}{\partial b}\right)^2-\frac{\partial^2 h}{\partial b^2}+\frac{1}{c^2}\right]\cdot\left[\frac{1}{(c)^2}+\frac{h_1}{c}\right]-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{1}{c}+h_1\right)^2-\left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{c}+h_1\right)\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{(c)^2}-h_1^2\right]\cdot\left[k+h_1^2-\frac{1}{(c)^2}-\frac{h_1}{c}-\frac{1}{c^2}\right]\right\} = -k\,k_1+\left(-\frac{kw}{5}-\frac{2ku}{15}-\frac{k_1^2}{3}\right)\cdot c+\cdots.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$D = \frac{c^6}{12.6.12}\cdot\begin{vmatrix} w+b_{11}c+\cdots & -v+b_{12}c+\cdots & k\frac{\partial k}{\partial b}+b_{13}c+\cdots \\ -k_1+b_{21}c+\cdots & \frac{\partial k}{\partial b}+b_{22}c+\cdots & b_{23}c+\cdots \\ v+b_{31}c+\cdots & -u+b_{32}c+\cdots & -kk_1+b_{33}c+\cdots \end{vmatrix},$$

wo jedes $b_{\iota\varkappa}$ als der Coefficient von c in $\alpha_{\iota\varkappa}$ definirt ist. Indem man zunächst den Coefficienten des Anfangsgliedes in der Entwickelung von D gleich Null setzt, erhält man die Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} w & -v & k\frac{\partial k}{\partial b} \\ -k_1 & \frac{\partial k}{\partial b} & 0 \\ v & -u & -kk_1 \end{vmatrix},$$

und wenn man die Elemente der letzten Colonne durch k dividirt, was ja gestattet ist, da der Fall $k=0$ schon früher ausgeschlossen wurde, so bekommt man durch Entwickelung der Determinante nach den Elementen der zweiten Zeile

$$(1.)\qquad 0 = k_1\Big(v k_1 + u\frac{\partial k}{\partial b}\Big) - \frac{\partial k}{\partial b}\Big(w k_1 + v\frac{\partial k}{\partial b}\Big).$$

Hier, sowie im Folgenden, sind jetzt k_1 und $\frac{\partial k}{\partial b}$ einfach als Abkürzungen für $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\partial k}{\partial p}$ und $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\partial k}{\partial q}$ anzusehen. Wir setzen nun unter der Voraussetzung, dass das Krümmungsmaass k nicht constant ist,

$$k_1^2 + \Big(\frac{\partial k}{\partial b}\Big)^2 = f$$

und bezeichnen mit ∂t dasjenige vom Punkte p, q ausgehende Linienelement unserer Fläche, welches auf der durch diesen Punkt gehenden Linie constanten Krümmungsmaasses senkrecht steht. Dann ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$f = \Big(\frac{\partial k}{\partial t}\Big)^2.$$

Ferner hat man

$$(2.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\dfrac{\partial k_1}{\partial p} = w - \tfrac{1}{2}\dfrac{\partial k}{\partial b}\dfrac{\partial v}{\partial b}, & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\dfrac{\partial k_1}{\partial q} = v + \tfrac{1}{2}\dfrac{\partial k}{\partial b}\dfrac{\partial v}{\partial c}, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\dfrac{\partial}{\partial p}\Big(\dfrac{\partial k}{\partial b}\Big) = v + \tfrac{1}{2}k_1\dfrac{\partial v}{\partial b}, & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\dfrac{\partial}{\partial q}\Big(\dfrac{\partial k}{\partial b}\Big) = u - \tfrac{1}{2}k_1\dfrac{\partial v}{\partial c}, \end{cases}$$

woraus

$$(3.)\qquad w k_1 + v\frac{\partial k}{\partial b} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\partial f}{\partial p},\qquad v k_1 + u\frac{\partial k}{\partial b} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\partial f}{\partial q}$$

folgt. Die Gleichung (1.) geht jetzt über in

$$k_1\cdot\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial k}{\partial b}\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

und besagt daher, dass f sich nicht ändert, wenn der Punkt p, q auf einer Curve constanten Krümmungsmaasses fortschreitet. f ist also eine Function von k allein, *d. h. die Linien constanten Krümmungsmaasses sind geodätisch äquidistant.*

Um nun weiter zu beweisen, dass diese Linien auch isotherm sind, berechnen wir den Coefficienten des nächstfolgenden Gliedes in der Entwickelung von D. Derselbe erscheint zunächst in ziemlich complicirter Gestalt, kann aber unter der Voraussetzung des Bestehens der Gleichung (1.) auf eine sehr einfache Form gebracht werden. Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{df}{dk} = f',$$

wodurch die Gleichungen (3.) die folgende Gestalt annehmen:

$$(4.)\qquad w k_1 + v\frac{\partial k}{\partial b} = \tfrac{1}{2}f'.k_1;\qquad v k_1 + u\frac{\partial k}{\partial b} = \tfrac{1}{2}f'\cdot\frac{\partial k}{\partial b}.$$

Nun multipliciren wir in D die erste Zeile mit k_1 und addiren zu ihr die zweite Zeile multiplicirt mit $\frac{1}{2}f'$ und die dritte multiplicirt mit $\frac{\partial k}{\partial b}$. Dann ergiebt sich

$$D = \frac{c^6}{12.6.12.k_1}\times$$

$$\begin{vmatrix} b_{11}k_1+\frac{1}{2}b_{21}f'+b_{31}\frac{\partial k}{\partial b} & b_{12}k_1+\frac{1}{2}b_{22}f'+b_{32}\frac{\partial k}{\partial b} & b_{13}k_1+\frac{1}{2}b_{23}f'+b_{33}\frac{\partial k}{\partial b} \\ -k_1 & \frac{\partial k}{\partial b} & 0 \\ v & -u & -kk_1 \end{vmatrix} + \cdots.$$

Die Entwickelung nach den Elementen der zweiten Zeile liefert

$$\begin{aligned} D = {} & \frac{c^6}{12.6.12.k_1}\cdot\Big\{k_1\Big[-kk_1\Big(b_{12}k_1+\tfrac{1}{2}b_{22}f'+b_{32}\frac{\partial k}{\partial b}\Big)+u\Big(b_{13}k_1+\tfrac{1}{2}b_{23}f'+b_{33}\frac{\partial k}{\partial b}\Big)\Big] \\ & +\frac{\partial k}{\partial b}\cdot\Big[-kk_1\Big(b_{11}k_1+\tfrac{1}{2}b_{21}f'+b_{31}\frac{\partial k}{\partial b}\Big)-v\Big(b_{13}k_1+\tfrac{1}{2}b_{23}f'+b_{33}\frac{\partial k}{\partial b}\Big)\Big]\Big\}+\cdots \\ = {} & \frac{c^6.k}{12.6.12}\cdot\Big\{-k_1\Big(b_{12}k_1+\tfrac{1}{2}b_{22}f'+b_{32}\frac{\partial k}{\partial b}\Big)-\frac{\partial k}{\partial b}\Big(b_{11}k_1+\tfrac{1}{2}b_{21}f'+b_{31}\frac{\partial k}{\partial b}\Big) \\ & +\Big(u-\frac{v}{k_1}\frac{\partial k}{\partial b}\Big)\cdot\frac{1}{k}\Big(b_{13}k_1+\tfrac{1}{2}b_{23}f'+b_{33}\frac{\partial k}{\partial b}\Big)\Big\}+\cdots \\ = {} & \frac{c^6.k}{12.6.12}\cdot\Big\{-k_1\Big(b_{12}k_1+b_{32}\frac{\partial k}{\partial b}\Big)-\frac{\partial k}{\partial b}\Big(b_{11}k_1+b_{31}\frac{\partial k}{\partial b}\Big)-\tfrac{1}{2}f'k_1b_{22}-\tfrac{1}{2}f'\frac{\partial k}{\partial b}b_{21} \\ & +\big(u+w-\tfrac{1}{2}f'\big)\Big(\tfrac{7}{15}k_1v-\tfrac{1}{12}\frac{\partial k}{\partial b}f'-\tfrac{1}{5}\frac{\partial k}{\partial b}w-\tfrac{2}{15}\frac{\partial k}{\partial b}u\Big)\Big\}+\cdots. \end{aligned}$$

Indem man hier für $\frac{1}{2}f'k_1$ und $\frac{1}{2}f'\frac{\partial k}{\partial b}$ jedesmal die durch die Gleichungen (4.) gelieferten Werthe einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} D = {} & \frac{c^6.k}{12.6.12}\cdot\Big\{-k_1\Big(b_{12}k_1+b_{32}\frac{\partial k}{\partial b}\Big)-\frac{\partial k}{\partial b}\Big(b_{11}k_1+b_{31}\frac{\partial k}{\partial b}\Big)-\Big(v\frac{\partial k}{\partial b}+wk_1\Big)b_{22} \\ & -\Big(vk_1+u\frac{\partial k}{\partial b}\Big)b_{21}+(u+w)\cdot\Big(\tfrac{3}{10}k_1v-\tfrac{3}{10}\frac{\partial k}{\partial b}u-\tfrac{1}{5}\frac{\partial k}{\partial b}w\Big) \\ & -\tfrac{3}{10}v\Big(v\frac{\partial k}{\partial b}+wk_1\Big)+\big(\tfrac{3}{10}u+\tfrac{1}{5}w\big)\cdot\Big(vk_1+u\frac{\partial k}{\partial b}\Big)\Big\}+\cdots. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnungen erweist es sich als vortheilhaft, zu den Grössen b_{12}, b_{32}, b_{11}, welche in den beiden ersten Klammern vorkommen, resp. die Ausdrücke $-\frac{7}{15}k\frac{\partial k}{\partial b}$, $\frac{1}{5}kk_1$, $\frac{4}{15}kk_1$ hinzuzufügen, wo-

durch der Gesammtwerth der rechten Seite unserer Gleichung nicht geändert wird. Wenn man ausserdem die übrigen Glieder passend zusammenfasst, nachdem man für b_{22} und b_{21} ihre Werthe eingesetzt hat, so erhält man

$$D = \frac{c^6.k}{12.6.12}\cdot\Big\{-k_1\Big[k_1\Big(b_{12}-\tfrac{7}{15}k\frac{\partial k}{\partial b}\Big)+\frac{\partial k}{\partial b}(b_{32}+\tfrac{1}{5}kk_1)\Big]$$
$$-\frac{\partial k}{\partial b}\Big[k_1(b_{11}+\tfrac{4}{15}kk_1)+\frac{\partial k}{\partial b}b_{31}\Big]$$
$$-\tfrac{4}{5}\frac{\partial k}{\partial b}v^2+\frac{k_1}{5}vw+\tfrac{1}{5}\frac{\partial k}{\partial b}uw+\tfrac{3}{5}k_1uv-\tfrac{1}{5}\frac{\partial k}{\partial b}w^2\Big\},$$

$$(5.)\quad\left\{\begin{aligned}D = \frac{c^6.k}{12.6.12}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\Big\{-k_1\Big[k_1\Big(-8k\frac{\partial k}{\partial b}-9\frac{\partial w}{\partial b}+9v\frac{\partial \nu}{\partial c}+7\frac{\partial v}{\partial c}+\tfrac{7}{2}(u-w)\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)\\ +\frac{\partial k}{\partial b}\Big(\tfrac{2}{3}kk_1+\frac{v}{3}\frac{\partial \nu}{\partial b}-\tfrac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial c}-\tfrac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{u-w}{3}\frac{\partial \nu}{\partial c}\Big)\Big]\\ -\frac{\partial k}{\partial b}\Big[k_1\Big(2\frac{\partial w}{\partial c}+2v\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)\\ +\frac{\partial k}{\partial b}\Big(2k\frac{\partial k}{\partial b}+2\frac{\partial w}{\partial b}-2v\frac{\partial \nu}{\partial c}-\frac{\partial v}{\partial c}-\frac{u-w}{2}\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)\Big]\\ -4\frac{\partial k}{\partial b}v^2+k_1vw+\frac{\partial k}{\partial b}uw+3k_1uv-\frac{\partial k}{\partial b}w^2\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Nun folgt aus den Definitionsgleichungen der Grössen u, v

$$\frac{\partial u}{\partial c} = -\frac{\partial \nu}{\partial c}u+\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\Big(\frac{\partial^3 k}{\partial p\,\partial q^2}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial p^2}\frac{\partial \nu}{\partial p}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial k}{\partial p}\frac{\partial^2 \nu}{\partial p^2}$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial \nu}{\partial q}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial k}{\partial q}\frac{\partial^2 \nu}{\partial p\,\partial q}\Big),$$

$$\frac{\partial v}{\partial b} = -\frac{\partial \nu}{\partial b}v+\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\Big(\frac{\partial^3 k}{\partial p\,\partial q^2}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial \nu}{\partial q}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial k}{\partial p}\frac{\partial^2 \nu}{\partial q^2}$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial q^2}\frac{\partial \nu}{\partial p}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial k}{\partial q}\frac{\partial^2 \nu}{\partial p\,\partial q}\Big).$$

Unter Berücksichtigung des für das Krümmungsmaass geltenden Ausdrucks

$$k = -\frac{1}{2\lambda}\Big(\frac{\partial^2 \nu}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 \nu}{\partial q^2}\Big)$$

und der Gleichung

$$u+w = \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{\partial^2 k}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 k}{\partial q^2}\Big)$$

folgt hieraus durch Subtraction

$$\frac{\partial u}{\partial c}-\frac{\partial v}{\partial b} = -\frac{\partial \nu}{\partial c}u+\frac{\partial \nu}{\partial b}v+\tfrac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial c}(u+w)-kk_1,$$

oder

$$(6.)\quad kk_1 = -\frac{\partial u}{\partial c}+\frac{\partial v}{\partial b}-\tfrac{1}{2}(u-w)\frac{\partial \nu}{\partial c}+v\frac{\partial \nu}{\partial b},$$

und durch Vertauschung von p mit q

$$(7.)\qquad k\frac{\partial k}{\partial b} = -\frac{\partial w}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial c}+\tfrac{1}{2}(u-w)\frac{\partial \nu}{\partial b}+v\frac{\partial \nu}{\partial c}.$$

Wenn man nun die rechte Seite der Gleichung (5.) gleich Null setzt und in ihr für kk_1 und $k\frac{\partial k}{\partial b}$ die eben gefundenen Ausdrücke substituirt, so erhält man bei Weglassung des Factors $\frac{c^6.k}{12.6.12}\cdot\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}0 = -k_1\Big[k_1\Big(-\frac{\partial w}{\partial b}-\frac{\partial v}{\partial c}+v\frac{\partial \nu}{\partial c}-\frac{u-w}{2}\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)+\frac{\partial k}{\partial b}\Big(-\frac{\partial u}{\partial c}+v\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)\Big]\\ -\frac{\partial k}{\partial b}\cdot\Big[k_1\Big(2\frac{\partial w}{\partial c}+2v\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)+\frac{\partial k}{\partial b}\Big(\frac{\partial v}{\partial c}+\frac{u-w}{2}\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)\Big]\\ -4\frac{\partial k}{\partial b}v^2+k_1vw+\frac{\partial k}{\partial b}uw+3k_1uv-\frac{\partial k}{\partial b}w^2.\end{aligned}$$

Indem man die Gleichung (1.) nach p differentiirt und das Resultat durch $-\sqrt{\lambda}$ dividirt, erhält man

$$\begin{aligned}0 = -k_1^2\Big(\frac{\partial v}{\partial c}+\frac{u-w}{2}\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)-k_1\frac{\partial k}{\partial b}\Big(-\frac{\partial w}{\partial c}+\frac{\partial u}{\partial c}-2v\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)\\ +\Big(\frac{\partial k}{\partial b}\Big)^2\Big(\frac{\partial v}{\partial c}+\frac{u-w}{2}\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)+2\frac{\partial k}{\partial b}v^2-k_1vw-\frac{\partial k}{\partial b}uw-k_1uv+\frac{\partial k}{\partial b}w^2.\end{aligned}$$

Die Addition dieser Gleichung zu der vorangehenden liefert

$$0 = -k_1^2\Big(-\frac{\partial w}{\partial b}+v\frac{\partial \nu}{\partial c}\Big)-k_1\frac{\partial k}{\partial b}\Big(\frac{\partial w}{\partial c}+v\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)-2\frac{\partial k}{\partial b}v^2+2k_1uv,$$

oder, wenn durch k_1 dividirt wird,

$$0 = -k_1\Big(-\frac{\partial w}{\partial b}+v\frac{\partial \nu}{\partial c}\Big)-\frac{\partial k}{\partial b}\Big(\frac{\partial w}{\partial c}+v\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)+2vw-vf'+2uv.$$

Aus dieser Gleichung geht nun wieder eine richtige Gleichung hervor, wenn man die Richtungen der wachsenden p und der wachsenden q mit einander vertauscht. Man erhält auf diese Weise

$$0 = -k_1\Big(\frac{\partial u}{\partial b}+v\frac{\partial \nu}{\partial c}\Big)-\frac{\partial k}{\partial b}\Big(-\frac{\partial u}{\partial c}+v\frac{\partial \nu}{\partial b}\Big)+2vw-vf'+2uv$$

und, indem man dies von der vorstehenden Gleichung subtrahirt,

$$0 = k_1\frac{\partial(u+w)}{\partial b}-\frac{\partial k}{\partial b}\cdot\frac{\partial(u+w)}{\partial c}.$$

Diese Gleichung besagt, dass auch die Summe

$$u+w = \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{\partial^2 k}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 k}{\partial q^2}\Big)$$

eine Function von k allein ist. Das Gleiche gilt dann von dem Quotienten

$$\frac{\frac{\partial^2 k}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 k}{\partial q^2}}{\left(\frac{\partial k}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial k}{\partial q}\right)^2},$$

d. h. *die Linien constanten Krümmungsmaasses sind auch isotherm.* Hieraus folgt unmittelbar, dass die betrachtete Fläche auf einer Rotationsfläche abwickelbar sein muss, wie sowohl aus den Erörterungen auf der letzten Seite der oben citirten Note des Herrn *Weingarten,* als auch aus Untersuchungen von Herrn *Beltrami* *) ersehen werden kann.

Endlich ergiebt sich aus unseren Untersuchungen die Constanz des Krümmungsmaasses der Flächen dritter und vierter Gattung. Denn angenommen, eine Fläche, die einer dieser Gattungen angehört, hätte ein nicht constantes Krümmungsmaass, so könnte man eine der beiden Curvenschaaren $q=\text{const.}$, $p=\text{const.}$, etwa die erstere, mit den Curven constanten Krümmungsmaasses zusammenfallen lassen, da diese ja nach dem oben Bewiesenen jedenfalls isotherm sind. Dann wäre $\frac{\partial k}{\partial p}=0$, und die Anfangsglieder in den Entwickelungen der Subdeterminanten von $\varDelta$ oder von D würden gleich Null gesetzt das Resultat ergeben, dass auch $\frac{\partial k}{\partial q}$ identisch verschwinden müsste, so dass sich die Annahme eines nicht constanten Krümmungsmaasses als unzulässig erweist.

*) Giornale di matematiche ed. *Battaglini* etc. Vol. III. 1865 pag. 88—90.

Göttingen, im Juni 1882.

Druckfehler.

Seite 31 Zeile 12 v. u. lese man $\cos^3\varphi$ statt $\cos^2\varphi$.

Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate.

(Von Herrn *J. P. Gram* in Kopenhagen.)

Obwohl der Gedanke, die Methode der kleinsten Quadrate zur Berechnung der Coefficienten einer Interpolationsformel zu benutzen, gewiss als fast ebenso alt wie diese Methode selbst angesehen werden darf, scheint *Tchebychef* doch der erste gewesen zu sein, welcher diese Aufgabe in allgemeiner Form gelöst hat. Bei der von ihm gegebenen Lösung*), welche an die Theorie der Kettenbrüche anknüpft, tritt das Resultat in der Form einer Reihe auf, welche mit der von *Sturm* und *Liouville***) betrachteten allgemeinen Klasse von Reihen gewissermassen analog ist. Diese Analogie, auf welche *Bienaymé* sogleich aufmerksam machte, ist namentlich durch die Arbeiten von *Heine****) später deutlicher hervorgetreten. Ebenso haben auch Andere, wie *Plarr* †) und *Töpler* ††), nachgewiesen, dass insbesondere die Entwickelungen nach Kugelfunctionen sowie die *Fourier*schen Reihen in enger Verbindung mit der Methode der kleinsten Quadrate stehen; es scheint jedoch, als ob man durchgängig diesem Zusammenhange nur wenig Aufmerksamkeit gewidmet habe. Mit den oben erwähnten Untersuchungen nur wenig bekannt, bin ich seit einiger Zeit von der Methode der kleinsten Quadrate ausgehend auf dieselbe Gattung von Reihen geleitet, und ich bin dabei zu der Ansicht gekommen, dass eben diese Methode den einfachsten gemeinsamen Gesichtspunkt für eine sehr grosse Klasse von Entwickelungen abgiebt, welche nicht nur die Formel von *Tchebychef*,

*) *Liouville*, Journal de Mathématiques, Série II, T. III, 1858, p. 319.

**) *Liouville*, Journal de Mathématiques, Série II, T. II p. 220.

***) Monatsbericht der Berliner Akademie Juni 1866. Siehe auch: Handbuch der Kugelfunctionen 2. Aufl. Bd. 1 Kap. V.

†) Comptes rendus de l'acad. d. Sc. mai 1857.

††) Anzeigen der kais. Akad. zu Wien 1876 p. 205.

sondern auch die *Fourier*schen und ähnlichen Reihen umfasst. In einer Arbeit*), welche im Frühling 1879 als Doctordissertation erschienen ist, habe ich die vorläufigen Resultate meiner Untersuchungen in dieser Richtung niedergelegt. Namentlich zeigte ich nicht nur, wie sich neue Entwickelungen ableiten lassen konnten, sondern auch, wie man mittelst derselben Methode ein Maass der successiven Annäherung erhält. Dieser Umstand ermöglicht es, eine namentlich in Bezug auf die Convergenz dieser Art von Reihen — welche ich wegen ihres interpolirenden Charakters mit dem Namen von „Interpolationsreihen" bezeichne — allgemeine Theorie zu geben. Um so mehr scheint mir dies von Interesse zu sein, weil die bisher fast ausschliesslich benutzte *Dirichlet*sche Methode doch immer nur auf einzelne Klassen von Reihen angewendet worden ist. — Es sind die Fundamente dieser Theorie, welche ich hiermit in etwas geänderter und vervollständigter Form einem grösseren Publicum vorzulegen wünsche.

I.

Das Fundamentalproblem, dessen Lösung ich zuerst erörtern werde, ist das folgende.

Gegeben sei eine Reihe von Argumenten x und zwei derselben entsprechende Reihen von Grössen o_x und v_x. Diese Grössen werden sämmtlich als reell angenommen, die v_x ferner positiv. In einer nach bekannten Functionen von x fortschreitenden Reihe mit n Gliedern

$$(1.)\qquad y_x = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

sollen dann die Coefficienten so bestimmt werden, dass die Summe $\sum\limits_x v_x (o_x - y_x)^2$ ein Minimum werde.

Mit anderen Worten, ***man soll die Function y so bestimmen, dass, wenn o_x als Beobachtungen, v_x als zugehörige Gewichte aufgefasst werden, die Quadratsumme der Abweichungen die kleinstmögliche werde.***

Die Aufgabe führt auf n Gleichungen von der Form

$$(2.)\qquad \sum_x v_x X_i o_x = \sum_x v_x X_i y_x \qquad (i=1, 2, \dots n),$$

aus welchen man durch Einsetzen des Ausdruckes (1.) für y n Normalgleichungen erhält. Diese können nach dem bekannten *Gauss*ischen Verfahren aufgelöst werden; wir schlagen aber einen anderen Weg ein.

---

*) Om Räkkeudviklinger, bestemte ved Hjälp af de mindste Kvadraters Methode. Kjöbenhavn 1879. Höst & Sön. (122 S. in 8.)

Bezeichnet man im Allgemeinen durch

$$(3.)\qquad y_x^{(m)} = a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mm}X_m$$

die Function y, welche erhalten wird, wenn man nur die m ersten Glieder der Reihe (1.) bei der Ausgleichung benutzt, und setzt man ferner der Kürze wegen

$$(4.)\qquad \Sigma v_x X_i o_x = s_i, \quad \text{und} \quad \Sigma v_x X_i X_k = p_{ik} = p_{ki},$$

so werden die Normalgleichungen für die Coefficienten von $y^{(m)}$

$$(5.)\qquad \begin{cases} s_1 = a_{m1}p_{11} + a_{m2}p_{12} + \cdots + a_{mm}p_{1m}, \\ s_2 = a_{m1}p_{21} + a_{m2}p_{22} + \cdots + a_{mm}p_{2m}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ s_m = a_{m1}p_{m1} + a_{m2}p_{m2} + \cdots + a_{mm}p_{mm}. \end{cases}$$

Statt die Function y direct zu bestimmen, suchen wir allgemein die Differenz $y^{(m)} - y^{(m-1)} = b_{m1}X_1 + b_{m2}X_2 + \cdots + b_{mm}X_m$, wo $b_{mi} = a_{mi} - a_{m-1i}$. Für die b erhält man dann $m-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} b_{m1}p_{11} + b_{m2}p_{12} + \cdots + b_{m\,m-1}p_{1\,m-1} + a_{mm}p_{1m} &= 0, \\ b_{m1}p_{21} + b_{m2}p_{22} + \cdots + b_{m\,m-1}p_{2\,m-1} + a_{mm}p_{2m} &= 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ b_{m1}p_{m-1\,1} + b_{m2}p_{m-1\,2} + \cdots + b_{m\,m-1}p_{m-1\,m-1} + a_{mm}p_{m-1\,m} &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen ergeben sich die b, wenn zuerst a_{mm} aus den Normalgleichungen (5.) bestimmt worden ist.

Bezeichnet man mit $P^{(m)}$ die symmetrische Determinante $\Sigma \pm p_{11}p_{22}\dots p_{mm}$ und durch $P_{ik}^{(m)}$ die dem Elemente p_{ik} entsprechende Unterdeterminante derselben, so wird erstens

$$a_{mm} = \frac{\Sigma_i P_{mi}^{(m)} s_i}{P^{(m)}}$$

und demnächst

$$\frac{b_{m1}}{P_{m1}^{(m)}} = \frac{b_{m2}}{P_{m2}^{(m)}} = \cdots = \frac{b_{m\,m-1}}{P_{m\,m-1}^{(m)}} = \frac{a_{mm}}{P_{mm}^{(m)}} = \frac{\Sigma_i P_{mi}^{(m)} s_i}{P^{(m)} P^{(m-1)}}.$$

Wenn man die m ersten Verhältnisse resp. mit $X_1, X_2, \dots X_m$ im Zähler und Nenner multiplicirt und addirt, kommt

$$\frac{y^{(m)} - y^{(m-1)}}{\Sigma_i P_{mi}^{(m)} X_i} = \frac{\Sigma_i P_{mi}^{(m)} s_i}{P^{(m)} P^{(m-1)}},$$

oder ganz allgemein

$$(6.)\qquad y^{(m)} - y^{(m-1)} = \frac{\Sigma_i P_{mi}^{(m)} s_i}{P^{(m-1)} P^{(m)}} \cdot \Sigma_i P_{mi}^{(m)} X_i.$$

Da ferner $y^{(1)} = a_{11} X_1 = \frac{s_1}{P^{(1)}}$, so wird endlich durch einfache Addition für $y^{(n)}$ die folgende Formel erhalten:

$$(7.) \qquad y^{(n)} = \frac{s_1 . X_1}{P^{(1)}} + \frac{\Sigma_i P_{2i}^{(2)} s_i . \Sigma_i P_{2i}^{(2)} X_i}{P^{(1)} P^{(2)}} + \cdots + \frac{\Sigma_i P_{ni}^{(n)} s_i . \Sigma_i P_{ni}^{(n)} X_i}{P^{(n-1)} P^{(n)}}.$$

Die Summationen sollen überall auf alle diejenigen Werthe von i erstreckt werden, für welche die Determinanten ihre Bedeutung behalten.

Aus dieser Formel lassen sich die Coefficienten a ohne Schwierigkeit bestimmen. Für unseren Zweck ist aber eben die hier erhaltene Form der Auflösung die bequemste. Die Function y zeigt sich auch hier in der Form einer Reihe, welche aber nicht nach den X, sondern nach gewissen linearen Functionen derselben fortschreitet. Diese Functionen sind so beschaffen, dass die r^{te} derselben auch nur und immer die r ersten der X enthält, und sie hängen also von der Ordnung der Glieder in der Reihe (1.) ab. Die allgemeine Form dieser Functionen, welche wir im Folgenden immer durch $\Phi_n(x)$ bezeichnen werden, ist die folgende:

$$(8.) \qquad \Phi_n(x) = \Sigma_i P_{ni}^{(n)} X_i = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots p_{1\,n-1} & X_1 \\ p_{21} & p_{22} \cdots p_{2\,n-1} & X_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} \cdots p_{n\,n-1} & X_n \end{vmatrix},$$

so dass sie also hier in der Form einer einfach gebildeten Determinante auftreten.

Nach Einführung dieser Bezeichnung lässt sich die Reihe (7.) so schreiben

$$(9.) \qquad y^{(n)} = \frac{A_1}{C_1} \Phi_1(x) + \frac{A_2}{C_2} \Phi_2(x) + \cdots + \frac{A_n}{C_n} \Phi_n(x),$$

wo

$$(10.) \qquad A_m = \Sigma_i P_{mi}^{(m)} s_i = \Sigma_x v_x \Phi_m(x) o_x; \quad C_m = P^{(m-1)} P^{(m)}.$$

Für die Nenner C kann ein anderer Ausdruck gefunden werden. Da nämlich

$$\Phi_n(x) = P_{n1} X_1 + P_{n2} X_2 + \cdots + P_{nn} X_n$$

ist, so wird die Summe $\Sigma_x v_x \Phi_m(x) \Phi_r(x)$ gleich

$$P_{m1} \Sigma v_x X_1 \Phi_r(x) + P_{m2} \Sigma v_x X_2 \Phi_r(x) + \cdots + P_{mm} \Sigma v_x X_m \Phi_r(x).$$

Hier ist aber

$$\Sigma v_x X_i \Phi_r(x) = P_{r1} \Sigma v_x X_i X_1 + P_{r2} \Sigma v_x X_i X_2 + \cdots + P_{ri} \Sigma v_x X_i X_r$$

$$= P_{r1} p_{i1} + P_{r2} p_{i2} + \cdots + P_{rr} p_{ir} = \begin{cases} 0 \text{ für } i < r, \\ P^{(r)} \text{ für } i = r, \end{cases}$$

und folglich erhält man

$$(11.)\qquad \text{für } m = r \quad \Sigma_x v_x \Phi_r^2(x) = P_{rr}^{(r)} P^{(r)} = P^{(r-1)} P^{(r)} = C_r,$$

$$(12.)\qquad \text{für } m < r \quad \Sigma_x v_x \Phi_m(x) \Phi_r(x) = 0.$$

Wegen der Symmetrie gilt die letzte Gleichung selbstverständlich auch für $m > r$.

Nun lässt sich in der Reihe (7.) alles mittelst der Functionen $\Phi_n(x)$ ausdrücken, und die Reihe erhält demnächst die Form

$$(13.)\qquad y_x^{(n)} = \frac{\Sigma v_x \Phi_1(x) o_x}{\Sigma v_x \Phi_1^2(x)} \Phi_1(x) + \frac{\Sigma v_x \Phi_2(x) o_x}{\Sigma v_x \Phi_2^2(x)} \Phi_2(x) + \cdots + \frac{\Sigma v_x \Phi_n(x) o_x}{\Sigma v_x \Phi_n^2(x)} \Phi_n(x)\,^{*)}.$$

Bei jeder Ausgleichung nach einer in der Form (1.) *gegebenen Function lässt sich also das Resultat in die typische Form* (13.) *bringen. Diese Reihe kann bei einem beliebigen Gliede abgebrochen werden und stellt dann das Resultat dar von der Ausgleichung nach einer Formel, welche nur eine entsprechende Anzahl der ersten Glieder enthält.*

Unter Berücksichtigung der gegebenen Gewichte stellt die gefundene Function die Beobachtungen so nahe wie möglich dar, indem die Summe $\Sigma v_x (o_x - y_x)^2$ ein Minimum wird. Dieses ist augenscheinlich, da die Lösung völlig eindeutig und bestimmt ist, und ein Maximum nur für unendliche Coefficienten eintreten könnte.

Insofern die X in hinreichend grosser Anzahl vorhanden sind, kann die Reihe (13.) fortgesetzt werden, bis sie ebenso viele Glieder erhalten hat, als Beobachtungen vorhanden sind. In diesem Falle erhält man vollständige Uebereinstimmung zwischen den Beobachtungen und den entsprechenden Werthen der gefundenen Function, vorausgesetzt allerdings, dass die Natur der gegebenen Beobachtungen dieses gestattet.

In diesem Falle wird also die Reihe (13.) eine einfache *Interpolationsformel,* welche nur als eine Umformung der *Lagrange*schen Formel betrachtet werden kann. Bricht man aber die Reihe an einer früheren Stelle ab, so giebt sie eine *Annäherungsformel,* welche die beobachtete Function mit desto grösserer Genauigkeit darstellt, je mehr Glieder sie enthält, und immer so, dass die Quadratsumme der Abweichungen die kleinstmögliche wird.

Diese charakteristische Eigenschaft wird allen solchen Reihen zukommen, die nach Functionen $\Phi_n(x)$ fortschreiten, welche der Bedingung

$$(14.)\qquad \Sigma_x v_x \Phi_m(x) \Phi_n(x) = 0 \quad (m \gtrless n)$$

---

*) *Tchebychef, Liouvilles* Journal Sér. II, T. III. p. 320.

genügen. Dieses ersieht man sofort, indem man in der Reihe (1.) $\Phi_i(x)$ für X_i setzt. Die Coefficienten werden dann von selbst die in (13.) angegebene Form annehmen.

Um alle solche Entwickelungen, welche in ihrer allgemeinsten Fassung eine sehr grosse und wichtige Art von Reihen bilden, unter eine gemeinsame Benennung zusammenzufassen, bezeichne ich sie mit dem Namen von ***Interpolationsreihen***, wesentlich um ihre interpolirende Natur hervorzuheben.

Für die Auffindung von Interpolationsreihen kommt es nur auf die Bestimmung von geeigneten Systemen von „***Entwickelungsfunctionen***" $\Phi_n(x)$ an. Wie solche sich für gegebene Argumente und Gewichte als Determinanten angeben lassen, ist aus dem Vorhergehenden ersichtlich; wie aus den Untersuchungen von ***Tchebychef*** und ***Heine*** hervorgeht, lassen sie sich auch als Näherungsnenner gewisser Kettenbrüche darstellen.

Es liegt nicht in meiner Absicht, hier auf die Bildung von solchen Interpolationsreihen näher einzugehen; ich begnüge mich desshalb mit der Anführung von zwei solchen, welche in praktischer Hinsicht einige Bedeutung haben.

Für $x = 0, 1, 2, \dots (n-1)$ und $v_x = 1$ erhält man die Reihe

$$(15.)\qquad y = \Sigma_m (2m+1) \frac{(m!)^2}{(n-m)^{2m+1|1}} \sum_0^{n-1}{}_x \Phi_m(x) o_x . \Phi_m(x) \qquad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

wo

$$(16.)\qquad \Phi_m(x) = (n-1)_m - (m+1)_1 (n-2)_{m-1} \frac{x}{1!} + (m+2)_2 (n-3)_{m-2} \frac{x^{2|-1}}{2!} - \cdots$$

Hier bezeichnen die verschiedenen Factoren $(a)_p$ Binomialcoefficienten.

Für $x = 0, 1, 2, \dots n$ und $v_x = (n)_x$ wird

$$(17.)\qquad y = \Sigma_m \frac{1}{2^n m! \, n^{m|-1}} \cdot \sum_0^{n}{}_x (n)_x \Phi_m(x) o_x . \Phi_m(x) \qquad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

wo

$$(18.)\qquad \Phi_m(x) = n^{m|-1} - (m)_1 (n-1)^{m-1|-1} 2x^{1|-1} + (m)_2 (n-2)^{m-2|-1} 2^2 x^{2|-1} - \cdots$$

Als andere bekannte Beispiele solcher Reihen können die trigonometrischen Reihen nach Sinus und Cosinus von Vielfachen von $\frac{\pi}{n}$ angeführt werden, sowie die ***Lagrange***sche Interpolationsformel

$$f(x) = \Sigma \frac{f(\alpha_i)}{F'(\alpha_i)} \cdot \frac{F(x)}{x-\alpha_i},$$

wo

$$\Phi_i(x) = \frac{F(x)}{x-\alpha_i}.$$

Wir haben bisher nur die allgemeine Form der Interpolationsreihen untersucht. Von grossem Interesse ist es aber, dass eben der Minimal-Werth von $\Sigma v_x(o_x-y_x^{(n)})^2$ sich leicht mittelst einer einfachen Formel bestimmen lässt. Diesen Werth werden wir im Folgenden durch M_n bezeichnen. Man hat nämlich identisch

$$\Sigma v_x(o_x-y_x^{(n)})^2 = \Sigma v_x(o_x-y_x^{(n)})o_x - \Sigma v_x(o_x-y_x^{(n)})y_x^{(n)}.$$

Hier ist das letzte Glied Null wegen der allgemeinen Bedingung

$$\Sigma v_x(o_x-y_x^{(n)})X_m = 0$$

für $m \leqq n$; also wird

$$M_n = \Sigma v_x(o_x-y_x^{(n)})o_x = \Sigma v_x o_x^2 - \Sigma v_x y_x^{(n)} o_x,$$

und setzt man hier für $y^{(n)}$ die gefundene Reihe (13.), oder mit abgekürzter Bezeichnung

$$y^{(n)} = \frac{A_1}{C_1}\Phi_1 + \frac{A_2}{C_2}\Phi_2 + \cdots + \frac{A_n}{C_n}\Phi_n,$$

so erhält man für M_n den Ausdruck

$$(19.)\qquad M_n = \Sigma_x v_x o_x^2 - Q_n,$$

wo

$$(20.)\qquad Q_n = \frac{A_1^2}{C_1} + \frac{A_2^2}{C_2} + \cdots + \frac{A_n^2}{C_n}.$$

Wir erhalten folglich auch die Quadratsumme in Form einer Reihe, deren Werth sich mit wachsender Gliederzahl dem Werthe Null nähert, da alle Glieder der Reihe Q_n positiv sind. Für jedes neue Glied, welches in der Entwickelung (13.) *mitgenommen wird, kommt auch in der Reihe Q ein neues Glied hinzu.*

Die Summe M_n muss stets zuletzt den Werth Null annehmen, wenn nicht die Beobachtungen und die formal gegebene Function y so beschaffen sind, dass dieses unmöglich ist. Insofern sämmtliche Gewichte und die gegebenen Werthe von o_x alle endliche Grössen sind, kann dieser Fall nur eintreffen, wenn für eines oder mehrere der Argumente x alle $\Phi_n(x)$ (oder X_n) verschwinden. Für diese Argumente wird die Reihe dann immer den Werth Null geben. Der Fall $\Phi_n(x) = \infty$ macht die Reihe unbrauchbar, wenn nicht zugleich $v_x = 0$ oder $o_x = 0$ ist.

II.

Bisher haben wir immer solche Reihen betrachtet, wo die Beobachtungen nur für eine Anzahl von discreten Argumenten gegeben sind.

Wir wenden uns jetzt zu der Betrachtung einer anderen Gattung derselben, welche durch Grenzübergang aus denselben hervorgehen kann. Nimmt man nämlich an, dass die Argumente x eine arithmetische Reihe bilden, deren Differenz h ist, so wird das Minimum von $\Sigma v_x(o_x-y_x)^2$ ebenfalls das Minimum von $\Sigma v_x(o_x-y_x)^2 h$ geben. Fragt man aber nach diesem Minimum, dann gilt die ganze vorgehende Entwickelung, nur kommt der Factor h überall mit unter das Summationszeichen Σ_x; sonst bleibt alles unverändert. — Setzt man aber in den so erhaltenen Formeln h unendlich klein, dann werden alle Summen in Integrale zwischen bestimmten Grenzen übergehen, indem man zugleich v_x als eine continuirlich gegebene positive Function annimmt, und ebenfalls o_x als die Werthe einer von α bis β continuirlich gegebenen Function $f(x)$ ansieht. Man erhält dann eine Reihe $y^{(n)}$ von solcher Beschaffenheit, dass das Integral $\int_\alpha^\beta v_x(f(x)-y_x^{(n)})^2 dx$ ein Minimum wird.

Indem man die ganze vorhergehende Entwickelung wiederholt, ersieht man sogleich, dass dieselbe auch für diesen Grenzfall ihre Gültigkeit behält, und dass man stets zu einer einzigen Lösung gelangt, welche sich in der folgenden mit (13.) analogen Form darstellen lässt:

$$(21.)\qquad y^{(n)} = \frac{A_1}{C_1}\Phi_1(x)+\frac{A_2}{C_2}\Phi_2(x)+\cdots+\frac{A_n}{C_n}\Phi_n(x),$$

wo die Φ die Gleichung

$$(22.)\qquad \int_\alpha^\beta v_x\Phi_m(x)\Phi_n(x)\,dx = 0 \quad (m \gtrless n)$$

identisch befriedigen und übrigens als Determinanten dargestellt werden können. Die Zähler und Nenner der Coefficienten haben die folgende Form

$$(23.)\qquad A_i = \int_\alpha^\beta v_x\Phi_i(x)f(x)\,dx,\quad C_i = \int_\alpha^\beta v_x\Phi_i^2(x)\,dx.$$

Für den Minimalwerth des Integrals $\int_\alpha^\beta v_x(f(x)-y_x^{(n)})^2 dx$, welcher als ***Quadrat der mittleren Abweichung*** bezeichnet werden kann, erhält man ebenfalls die mit (19.) analoge Formel

$$(24.)\qquad M_n = \int_\alpha^\beta v_x f^2(x)\,dx - Q_n,$$

wenn

$$(25.)\qquad Q_n = \frac{A_1^2}{C_1}+\frac{A_2^2}{C_2}+\cdots+\frac{A_n^2}{C_n}.$$

Reihen dieser Art können also, indem man das Intervall α bis β, die Form der Function v_x, sowie die der Ausgleichung zu Grunde liegende Reihe variirt, in unendlicher Menge gebildet werden. Nur müssen wir, damit die Methode nicht sinnlos werde, die Bedingungen festhalten, dass erstens v_x positiv sein muss, und dass keins der Integrale $\int_\alpha^\beta v_x X_i X_k dx$ unendlich werde. Dass sämmtliche eingehenden Grössen ferner reell sein müssen und von solcher Art, dass die Integrale nicht ihren Sinn verlieren, ist selbstverständlich. — Uebrigens kann die Function $f(x)$ innerhalb des gegebenen Intervalls ganz willkürlich genommen werden.

Alle auf diese Weise gebildeten Reihen können in die Klasse der Interpolationsreihen gerechnet werden. Sie haben alle den allgemeinen Charakter dieser Reihen als Annäherungsformeln, welche sich der zu entwickelnden Function in dem gegebenen Intervalle mit Berücksichtigung der gegebenen Gewichte so nahe wie möglich anschmiegen. Da die Anzahl der Beobachtungen hier unendlich gross ist, können diese Reihen immer ins Unendliche fortgesetzt werden, sofern das System der Entwickelungsfunctionen unendlich viele derselben enthält.

Die Theorie der erwähnten Reihen hat besonders in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit der Mathematiker angezogen. Eine allgemeine Methode zur Bildung geeigneter Systeme von Entwickelungsfunctionen als Näherungsnenner von Kettenbrüchen ist besonders von *Heine* ausgebildet worden. Ihre Beziehung auf die Methode der kleinsten Quadrate ist zwar von mehreren Verfassern bemerkt worden; es scheint aber, dass man derselben keine principielle Bedeutung beigelegt habe, obwohl eben diese Methode gewiss den einfachsten gemeinsamen Gesichtspunkt der allgemeinen Theorie dieser Reihen darbietet.

Als wohlbekannte Beispiele der erwähnten Art von Interpolationsreihen können wir zuerst die *Fourierschen Reihen* anführen. Die Entwickelungsfunctionen haben hier die Form $\sin mx$ oder $\cos mx$, die Gewichte sind constant gleich 1, das Intervall $-\pi$ bis $+\pi$.

Das nächste Beispiel liefern die *Kugelfunctionen:*

$$X^n = \frac{1}{2^n n!} D_x^n (x^2-1)^n.$$

Da

$$\int_{-1}^{+1} X^n X^m dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m \gtrless n, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{für} \quad m = n \end{cases}$$

ist, so erhält man die nach X^n fortschreitende Reihe

$$(26.) \qquad y = \Sigma_n \frac{2n+1}{2} X^n \int_{-1}^{+1} X^n f(x)\,dx,$$

welche eine Interpolationsreihe für das Intervall -1 bis $+1$, den Gewichten $v_x = 1$ entsprechend, liefert.

Da die Kugelfunctionen X^n algebraische Polynome in x sind, kann diese Entwickelung als aus einer Ausgleichung nach einer Potenzenreihe hervorgegangen betrachtet werden.

Ebenso geben die Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} X_\nu^m X_\nu^n dx \quad = 0 \qquad (m \gtrless n)$$

und

$$\int_{-1}^{+1} X_\mu^n X_\nu^n \frac{dx}{1-x^2} = 0 \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

zu zwei anderen Entwickelungen Anlass, von welchen die erste constanten Gewichten, die zweite solchen, welche mit $\frac{1}{1-x^2}$ proportional sind, entspricht.

Ferner liefern die *Cylinderfunctionen* mehrere Beispiele von Interpolationsreihen. So erhält man aus der Relation

$$\int_0^\infty J_n(x) J_m(x) \frac{dx}{x} = 0 \qquad (m \lesseqgtr n, \text{ aber } m-n \text{ eine gerade Zahl})$$

eine Entwickelung, welche den Gewichten $\frac{1}{x}$ entspricht.

Endlich verdient noch eine besondere Gattung von solchen Reihen hervorgehoben zu werden, nämlich diejenige, welche *Heine**) im zweiten Theile seines Handbuches besonders erwähnt hat. Die am besten untersuchte derselben ist die nach $J_n(\alpha_i x)$ fortschreitende, in welcher α_i eine der reellen Wurzeln der Gleichung $J_n(z) = 0$ bedeutet, und welche die Form hat

$$y = \Sigma_i \frac{2}{(J_n'(\alpha_i))^2} J_n(\alpha_i x) \int_0^1 x J_n(\alpha_i x) f(x)\,dx.$$

Sie entspricht dem Intervalle 0 bis 1 und $v_x = x$.

---

*) Siehe Handbuch der Kugelfunctionen Bd. II p. 213, oder dieses Journal Bd. 89 p. 19—39.

Diese Beispiele werden hinreichend den allgemeinen Charakter der Interpolationsreihen bezeichnen; mehrere solcher findet man an verschiedenen Stellen in dem Handbuche von *Heine* angeführt.

Um die Anwendung der vorher gegebenen allgemeinen Methode zu zeigen, werde ich noch zwei besondere Reihen ableiten; weitere Beispiele finden sich in meiner Dissertation. Die erste bilden wir mittelst Ausgleichung nach der Formel $y=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)e^{-x}$. Wir nehmen $v_x=e^x$ und das Intervall von 0 bis ∞.

Da

$$\int_0^\infty e^{-x}x^i dx = \Gamma(i+1) = i!$$

ist, so erhält man aus den Bedingungen

$$\int_0^\infty v_x x^i e^{-x}(f(x)-y)\,dx = 0$$

die folgenden Normalgleichungen, in welchen allgemein

$$\int_0^\infty x^i f(x)\,dx = s_i$$

gesetzt ist:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \quad\;\, + a_1.1!+a_2.2!+\cdots, \\ s_1 &= a_0.1!+a_1.2!+a_2.3!+\cdots, \\ s_2 &= a_0.2!+a_1.3!+a_2.4!+\cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Aus diesen folgt als der allgemeine Ausdruck der Entwickelungsfunctionen

$$(27.)\qquad \Phi_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1! & 2! & \dots & (n-1)! & e^{-x} \\ 1! & 2! & 3! & \dots & n! & x e^{-x} \\ 2! & 3! & 4! & \dots & (n+1)! & x^2 e^{-x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n! & (n+1)! & (n+2)! & \dots & (2n-1)! & x^n e^{-x} \end{vmatrix},$$

indem die erste derselben mit $\Phi_0(x)$ bezeichnet wird. Diese Determinante direct zu entwickeln dürfte wohl etwas schwierig sein, dagegen kann man sehr leicht die ersten der $\Phi_n(x)$ berechnen. Für diese erhalten wir Ausdrücke, welche nach Division durch solche Constanten, dass der Coefficient von $x^n e^{-x}$ den numerischen Werth 1 erhält, sich folgendermassen schreiben lassen:

$$\varphi_0(x)=e^{-x},\quad \varphi_1(x)=(1-x)e^{-x},\quad \varphi_2(x)=(2-4x+x^2)e^{-x},$$
$$\varphi_3(x) = (6-18x+9x^2-x^3)e^{-x}.$$

Versucht man diese Functionen zu integriren, so zeigt es sich, dass sie sämmtlich in der allgemeinen Formel $\varphi_n(x) = D_x^n x^n e^{-x}$ enthalten sind. Da sogleich ersichtlich ist, dass $\varphi_n(x)$ als eine algebraische Function n^{ten} Grades mit e^{-x} multiplicirt sich darstellen lassen kann, liegt die Vermuthung nahe, dass die angegebene Form von $\varphi_n(x)$, welche in entwickelter Form die folgende wird

$$\varphi_n(x) = (-1)^n e^{-x}\left(x^n - \frac{n^2}{1} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2} x^{n-2} + \cdots\right),$$

als Entwickelungsfunction betrachtet werden könne.

Um diese Annahme zu prüfen, bilden wir das Integral

$$\int_0^\infty x^m D^n x^n e^{-x} dx. \qquad \text{(für } m \leqq n\text{)}.$$

Durch theilweise Integration ergiebt sich dasselbe als gleich mit

$$[x^m D^{n-1} x^n e^{-x} - m x^{m-1} D^{n-2} x^n e^{-x} + \cdots + (-1)^{m-1} m^{m-1|-1} x D^{n-m} x^n e^{-x}]_0^\infty$$
$$+ (-1)^m m! \int_0^\infty D^{n-m} x^n e^{-x} dx.$$

Für $m < n$ verschwinden alle Glieder bei der Einsetzung der Grenzen; für $m = n$ verschwinden sie mit Ausnahme des letzten, welches sich auf

$$(-1)^n n! \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = (-1)^n (n!)^2$$

reducirt. — Da ferner $e^x \varphi_n(x)$ eine algebraische Function des n^{ten} Grades ist, in welcher der Coefficient von x^n gleich $(-1)^n$ ist, so wird desshalb

$$\int_0^\infty e^x \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \gtrless n, \\ (n!)^2 & \text{für } m = n, \end{cases}$$

und folglich wird die gegebene Form von $\varphi_n(x)$ wirklich als Entwickelungsfunction benutzt werden können. Da sie ferner allen denselben Bedingungen wie die oben gegebene Determinante genügt, muss sie bis auf einen von x unabhängigen Factor mit derselben übereinstimmen.

Da man überhaupt immer statt φ auch $k\varphi$, wo k eine Constante ist, als Entwickelungsfunction benutzen kann, werden wir noch die $\varphi_n(x)$ durch $n!$ dividiren, und erhalten dann ein System von Entwickelungsfunctionen, welche mittelst der Formel

$$(28.) \qquad \Phi_n(x) = \frac{1}{n!} D_x^n x^n e^{-x}$$

oder

$$(29.)\quad \Phi_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{-x}\left(x^n - \frac{n^2}{1} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2} x^{n-2} - \cdots + (-1)^n . n!\right)$$

definirt ist. Für dieselbe gilt die identische Relation

$$(30.\quad \int_0^\infty e^x \Phi_m(x) \Phi_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m \gtrless n, \\ 1 \text{ für } m = n. \end{cases}$$

Die gesuchte Interpolationsreihe wird endlich

$$(31.)\quad y = \Sigma \Phi_n(x) \int_0^\infty e^x \Phi_n(x) f(x)\, dx.$$

Für M erhält man die Reihe

$$(32.)\quad M = \int_0^\infty e^x f^2(x)\, dx - \Sigma\left(\int_0^\infty e^x \Phi_n(x) f(x)\, dx\right)^2.$$

Uebrigens kann bemerkt werden, dass alle Φ_n für $x = 0$ den Werth Eins annehmen und für $x = \infty$ Null werden. In Analogie mit den Erscheinungen bei anderen Entwickelungsfunctionen werden auch hier die Gleichungen $e^x \Phi_n(x) = 0$ n reelle Wurzeln innerhalb der gegebenen Intervalle haben, was sich sofort aus der Darstellung der Φ als Differentialquotienten ergiebt.

Um ein specielles Beispiel einer Entwickelung nach diesem System zu geben, setzen wir $f(x) = e^{-cx}$. Da man durch theilweise Integration leicht erhält

$$\int_0^\infty e^x \Phi_n(x) e^{-cx}\, dx = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{c-1}{c}\right)^n,$$

so kommt die folgende Entwickelung als Resultat

$$(33.)\quad y = \frac{1}{c} \Sigma \left(\frac{c-1}{c}\right)^n \Phi_n(x)$$

und

$$(34.)\quad M = \int_0^\infty e^{x(1-2c)}\, dx - \frac{1}{c^2} \Sigma \left(\frac{c-1}{c}\right)^{2n}.$$

Für $\left(\frac{c-1}{c}\right)^2 < 1$ oder $c > \frac{1}{2}$ convergirt die Reihe M gegen Null. Hieraus folgt, dass, wenn die Reihe y ins Unendliche fortgesetzt wird, die durch dieselbe dargestellte Function in keinem noch so kleinen Intervalle von der Function e^{-cx} eine endliche Abweichung haben kann. — Ist dagegen $c \overline{\gtrless} \frac{1}{2}$, so wird die mittlere Abweichung für alle endlichen n unendlich gross, und die endliche Reihe $y^{(n)}$ kann desshalb nicht als Annäherungsformel benutzt werden. Es wird auch zweifelhaft sein, ob sie ins Unend-

liche fortgesetzt in der That mit e^{-cx} zusammenfallen kann, selbst ob die Reihe y noch convergent ist, da M jetzt unter unbestimmter Form auftritt. Wahrscheinlich wird die Reihe y in diesem Falle im Allgemeinen nicht convergent sein; dieses ist wenigstens der Fall für $x = 1$. Wir müssen desshalb die Gültigkeit der Reihe auf den Fall $c > \frac{1}{2}$ beschränken.

Als zweites Beispiel nehmen wir die Reihe, welche aus einer Ausgleichung nach der Formel

$$y = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) e^{-x^2}$$

hervorgeht. Als Gewichte nehmen wir $v_x = e^{x^2}$ und das Intervall $-\infty$ bis $+\infty$.

Da ganz allgemein

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m+1} e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} e^{-x^2} dx = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi}$$

ist, so erhalten wir nach Division durch $\sqrt{\pi}$ die folgenden Normalgleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = a_0 + 0.a_1 + \tfrac{1}{2} a_2 + 0.a_3 + \frac{1.3}{2^2} a_4 + \cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0.a + \tfrac{1}{2} a_1 + 0.a_2 + \frac{1.3}{2^2} a_3 + 0.a_4 + \cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \tfrac{1}{2} a_0 + 0.a_1 + \frac{1.3}{2^2} a_2 + 0.a_3 + \frac{1.3.5}{2^3} a_4 + \cdots,$$

u. s. w.

Diese Gleichungen spalten sich in zwei Systeme, von welchen das erste die a mit geraden, das andere die mit ungeraden Indices bestimmt. Die Φ mit geraden und ungeraden Indices können desshalb für sich berechnet werden. Nach Multiplication mit passenden Factoren findet man für die ersten derselben die folgenden Ausdrücke:

$$\Phi_0 = e^{-x^2}, \quad \Phi_1 = -2x e^{-x^2}, \quad \Phi_2 = (-2 + 4x^2) e^{-x^2}, \quad \Phi_3 = (12x - 8x^3) e^{-x^2},$$

u. s. w.

Diese Formen stimmen mit den ersten Differentialquotienten von e^{-x^2} völlig überein, so dass man zur Annahme

$$(35.) \qquad \Phi_n(x) = D_x^n e^{-x^2}$$

geleitet wird. Um die Richtigkeit dieser Annahme zu prüfen, suchen wir zuerst das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x^m D^n e^{-x^2} dx$ und finden wie im vorigen Beispiele

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m D^n e^{-x^2} dx = (-1)^m m! \int_{-\infty}^{+\infty} D^{n-m} e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m < n, \\ (-1)^n n! \sqrt{\pi} \text{ für } m = n. \end{cases}$$

In entwickelter Form wird*)

$$(36.)\qquad D^n e^{-x^2} = (-1)^n e^{-x^2}\Big((2x)^n - \frac{n^{2|-1}}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n^{4|-1}}{1.2}(2x)^{n-4} - \cdots\Big),$$

und folglich wird die angenommene Form von $\Phi_n(x)$ die richtige sein, indem man erhält

$$(37.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}\Phi_m(x)\Phi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m < n, \\ 2^n n!\sqrt{\pi} \text{ für } m = n. \end{cases}$$

Hieraus fliesst dann die folgende Interpolationsreihe

$$(38.)\qquad y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Sigma\frac{1}{2^n n!}\Phi_n(x)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}\Phi_n(x)f(x)\,dx,$$

wo $\Phi_n(x)$ wie oben angeführt definirt ist.

Als Ausdruck für M erhält man

$$(39.)\qquad M = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}f^2(x)\,dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Sigma\frac{1}{2^n n!}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}\Phi_n(x)f(x)\,dx\Big)^2.$$

Andere Reihen mit verschiedenen Gewichten können aus dieser abgeleitet werden. — Solche Reihen sind für die allgemeine Fehlertheorie von grosser Bedeutung; für den praktischen Gebrauch wird es gewöhnlich zweckmässig sein, statt x eine neue Veränderliche z mittelst der Substitution $x = \lambda z + b$ einzuführen.

Um auch hier eine specielle Entwickelung anzuführen, setzen wir $f(x) = e^{-\lambda x^2}$, wo λ eine positive Constante bedeutet. Die hier auftretenden Integrale lassen sich ohne Schwierigkeit berechnen. Man erhält die Reihe

$$(40.)\qquad y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Sigma\frac{1}{2^{2i}i!}\Big(\frac{1-\lambda}{\lambda}\Big)^i\Phi_{2i}(x)$$

und

$$(41.)\qquad M = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}.e^{-2\lambda x^2}\,dx - \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}\Sigma\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots 2i}\Big(\frac{1-\lambda}{\lambda}\Big)^{2i}.$$

Auch hier zeigt es sich, wie im obigen Beispiel (33.), dass λ eine Bedingung erfüllen muss, damit die Reihe nicht unbrauchbar werde. Man muss nämlich auch hier $\lambda > \frac{1}{2}$ annehmen, um nicht für eine endliche Reihe $M_n = \infty$ zu erhalten. Ist $\lambda < \frac{1}{2}$, so wird die Reihe y auch wenigstens für $x = 0$ divergent.

---

*) Cfr. *Tisserand:* Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal. Paris 1877. p. 24 und p. 140.

III.

Wir haben oben gezeigt, wie man für eine beliebige Reihe $y^{(n)}$ die Quadratsumme der Abweichungen, resp. die mittlere Abweichung berechnen könne. Für diejenigen Reihen, welche discreten Argumenten entsprechen, ist es sogleich ersichtlich, dass $M_n = 0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung der vollständigen Uebereinstimmung von $y^{(n)}$ mit $f(x)$ ist, sofern nicht $v_x = 0$. Für die nach der typischen Formel (21.) gebildeten Reihen verhält die Sache sich nicht so einfach. Da es jedoch nicht zweifelhaft sein kann, dass wenigstens in einigen Fällen auch hier eine ähnliche Bedingung auftreten kann, so wird es immer von Interesse sein, den Zusammenhang der mittleren Abweichung mit der Convergenz der erhaltenen Interpolationsreihe etwas näher zu erörtern. Dies soll den Gegenstand der folgenden Untersuchung bilden.

Gegeben sei also ein System von Entwickelungsfunctionen Φ_n, welche den Gewichten v_x und dem Intervalle α bis β entsprechen. Von den Φ wird vorausgesetzt, dass sie im ganzen Intervalle eindeutige, reelle und stetige Functionen sind; die Gewichte sollen ferner positiv sein, aber nicht nothwendig überall stetig. Die Möglichkeit, dass v_x sowie einige oder alle $\Phi(x)$ in einzelnen Punkten Null oder unendlich werden können, ist nicht ausgeschlossen; doch setzen wir in solchem Falle voraus, dass die durch C_n bezeichneten Integrale wenigstens für alle endlichen n endlich bleiben.

Mittelst solcher Functionen bilden wir demnächst die Interpolationsreihe $y^{(n)}$ für eine gegebene Function $f(x)$. Ueber diese wird vorausgesetzt, dass sie integrirt werden kann, und dass die Integrale $A_n = \int_\alpha^\beta v\,\Phi_n(x) f(x)\,dx$ sämmtlich für endliche n endlich bleiben. Sonst kann die Function ganz willkürlich gegeben werden. Da jedoch klar ist, dass solche Singularitäten, welche graphisch dargestellt als isolirte Punkte auftreten, keinen Einfluss auf die Entwickelung haben können, nehmen wir an, dass solche nicht in $f(x)$ vorkommen. Schliesslich wird vorläufig vorausgesetzt, dass das Integral $\int_\alpha^\beta v f^2(x)\,dx$ eine endliche Grösse darstellt.

Unter diesen Bedingungen wird man für $f(x)$ eine Reihe erhalten, für welche

$$M_n = \int_\alpha^\beta v_x \left(f(x) - y_x^{(n)}\right)^2 dx$$

eine endliche und mit wachsendem n immer abnehmende positive Grösse darstellt, welche sich mittelst der Formel (24.) entwickeln lässt.

Wird nun $y^{(n)}$ für ein gewisses n überall gleich mit $f(x)$, dann muss nothwendig gleichzeitig auch $M_n = 0$ werden. Ist umgekehrt $M_n = 0$ für einen endlichen Werth von n, so muss solche Uebereinstimmung immer Statt finden; die Reihe muss in diesem Falle eine identische Formel werden.

Ist dagegen M_n nur für $n = \infty$ gleich Null, indem also die Reihe Q_n gegen den Werth des Integrales $\int_\alpha^\beta v f^2(x)\,dx$ convergirt, dann verhält die Sache sich nicht so einfach. So viel ist jedoch ersichtlich, dass die Reihe y im Allgemeinen gegen $f(x)$ convergiren muss. Da nämlich M_n sich der Grenze Null nähert, so kann man immer n so gross nehmen, dass M_n kleiner als jede vorher gegebene noch so kleine Grösse wird. — Entweder muss dann auch die Differenz $f(x) - y^{(n)}$ für alle x beliebig klein gemacht werden können, oder wenn dies für einige Werthe von x nicht geschehen kann, so darf die Abweichung doch nur in einem verschwindend kleinen Intervalle einen endlichen Werth haben. Hieraus schliesst man, dass die Reihe $y^{(n)}$ ins Unendliche fortgesetzt im Allgemeinen gegen $f(x)$ convergiren muss, und wo dies nicht der Fall ist, muss die Abweichung auf ein unendlich kleines Intervall beschränkt sein. Oder was dasselbe ist, eine Abweichung kann nur in discreten Punkten Statt haben. Solche Punkte werden *„kritische Punkte"* genannt.

Insofern also $\lim M_n = 0$, ***wird die gefundene Reihe immer*** $f(x)$ ***im Allgemeinen (d. h. mit Ausnahme gewisser kritischer Punkte) darstellen.***

Selbst wenn sowohl $f(x)$ als alle die Φ stetige Functionen sind, lässt sich die Möglichkeit solcher Abweichungen in einzelnen Punkten nicht abweisen; doch müssen wir festhalten, dass solche eigentlich als Grenzfälle aufzufassen sind.

Ist z. B. für $x = z$ die Abweichung a und sonst gleich Null, so muss diese graphisch dargestellt als Grenze einer Curve aufgefasst werden, welche für $x = z$ ein Maximum hat, und die sich mit wachsendem n allmählich theils der Abscissenaxe, theils der Ordinate $y = a$ für $x = z$ nähert.

Wenn zwei Functionen f_1 und f_2 sich mittelst derselben Systeme entwickeln lassen, so dass für beide $M = 0$, so ist auch für die Entwickelung von $f_1 + f_2$ das Integral

$$\int_\alpha^\beta v(f_1+f_2-(y_1+y_2))^2\,dx$$

eine gegen Null convergirende Grösse.

Denn da immer

$$(f_1-y_1^{(n)})^2+(f_2-y_2^{(n)})^2 \geqq 2.\text{abs.}(f_1-y_1^{(n)})(f_2-y_2^{(n)}),$$

so wird, gerade wie $\int_\alpha^\beta v(f_1-y_1^{(n)})^2\,dx$ und $\int_\alpha^\beta v(f_2-y_2^{(n)})^2\,dx$, auch das Integral $\int_\alpha^\beta v(f_1-y_1^{(n)})(f_2-y_2^{(n)})\,dx$ gegen Null convergiren, und folglich muss dasselbe mit

$$\int_\alpha^\beta v(f_1+f_2-(y_1^{(n)}+y_2^{(n)}))^2\,dx$$
$$= \int_\alpha^\beta v(f_1-y_1^{(n)})^2\,dx+2\int_\alpha^\beta v(f_1-y_1^{(n)})(f_2-y_2^{(n)})\,dx+\int_\alpha^\beta v(f_2-y_2^{(n)})^2\,dx$$

der Fall sein.

Da ferner identisch $\int_\alpha^\beta v\,y_1^{(n)}(f_2-y_2^{(n)})\,dx = 0$ ist, so muss auch das Integral $\int_\alpha^\beta v f_1(f_2-y_2^{(n)})\,dx$ gegen Null convergiren, oder es wird

$$(42.)\qquad \int_\alpha^\beta v f_1 f_2\,dx = \frac{A_1B_1}{C_1}+\frac{A_2B_2}{C_2}+\frac{A_3B_3}{C_3}+\cdots,$$

wenn die Entwickelungen

$$f_1 = \Sigma\frac{A_i}{C_i}\Phi_i \quad\text{und}\quad f_2 = \Sigma\frac{B_i}{C_i}\Phi_i$$

im Allgemeinen gültig sind.

Hätte man in einer Entwickelung von $f(x)$ eine der Entwickelungsfunctionen vernachlässigt, für welche nicht $\int_\alpha^\beta v\,\Phi_m f(x)\,dx$ gleich Null ist, dann würde man zwar eine im Allgemeinen convergente Reihe erhalten haben, dieselbe würde aber nicht gegen $f(x)$ convergiren, und M würde ebenfalls einen von Null verschiedenen Werth erhalten. Man ersieht hieraus. dass es von grösster Bedeutung ist, dass wirklich alle zu dem benutzten Systeme von Entwickelungsfunctionen gehörigen Functionen Φ bei der Entwickelung in Betracht kommen.

Wir nennen ein System von Entwickelungsfunctionen $\Phi_i(x)$ ein „vollständiges", wenn es keine in irgend einem noch so kleinen endlichen Theile des Intervalles stetige Function $R(x)$ giebt, für welche alle die Integrale $\int_\alpha^\beta v\,\Phi_i(x)R(x)\,dx$ verschwinden.

Sind alle in einem solchen Systeme enthaltenen Functionen bei der Entwickelung einer Function $f(x)$ benutzt, so kann in keinem noch so kleinen endlichen Theile des Intervalles eine Abweichung zwischen $f(x)$ und der Reihe y Statt finden. Denn in solchem Falle wäre das System nicht vollständig, weil die Differenz $f(x)-y=R(x)$ die Eigenschaft hätte, dass alle die Integrale $\int_\alpha^\beta v\,\Phi_i(x)R(x)\,dx$ Null wären. Die mögliche Abweichung muss desshalb auf discrete Punkte beschränkt sein, oder die Entwickelung gilt im Allgemeinen, und M muss gegen Null convergiren.

Es entsteht dann hier eine doppelte Frage. Die erste ist die, ob ein auf irgend eine Weise gefundenes System als ein vollständiges betrachtet werden könne. Auf der Beantwortung dieser Frage, welche keineswegs eine überflüssige ist, beruht die allgemeine Gültigkeit der nach diesem Systeme fortschreitenden Entwickelungen. Ist dieselbe bejahend beantwortet, so kommt in nächster Reihe die Frage nach den möglichen kritischen Punkten in Betracht. — Erschöpfend können diese Untersuchungen nur für specielle gegebene Systeme angestellt werden und bieten selbst dann die grössten Schwierigkeiten dar; doch lässt sich wohl etwas Allgemeines darüber sagen.

Von Bedeutung ist es namentlich, dass für die Vollständigkeit eines Systems ein wenigstens gewissermassen hinreichendes Kriterium sich angeben lässt.

Dieses erhält man, wenn man die Entwickelung einer unstetigen Function $\psi(x,z)$ bildet, welche von α bis z mit irgend einer willkürlich gewählten endlichen und stetigen Function $\chi(x)$ zusammenfällt, und von z bis β Null ist. Ist das System vollständig, so muss eine solche Function sich im Allgemeinen entwickeln lassen können, und kann man umgekehrt zeigen, dass für die Entwickelung von einer solchen Function $M=0$ wird für jeden Werth von z, so ist das System vollständig, oder es fehlen doch in demselben nur Functionen von einer ganz besonderen Art.

Denn wird $M=0$ für $\psi(x,z)$, so ist also $\psi(x,z)$ im Allgemeinen mittelst des vollständigen Systemes entwickelbar. Wenn es also noch eine unter den Φ nicht einbegriffene Function $R(x)$ gäbe, die eigentlich zu dem Systeme gerechnet werden sollte, und für welche desshalb alle Integrale $\int_\alpha^\beta v\,\Phi_i R(x)\,dx$ Null wären, so müsste auch das Integral

$$\int_a^\beta v\,R(x)\,\psi(x,z)\,dx$$

Null sein. Dieses Integral kann aber durch

$$\int_a^z v\,R(x)\,\chi(x)\,dx$$

ersetzt werden, und dieses soll der Voraussetzung zufolge für alle Werthe von z zwischen α und β verschwinden. Dieses kann erstens der Fall sein, wenn der Differentialquotient in Bezug auf z, $v\chi(x)R(x)$ verschwindet, also $R(x)=0$ mit Ausnahme der einzelnen Punkte, wo $v\chi(x)=0$ ist, oder überhaupt, wenn $R(x)$ nur in discreten Punkten von Null verschieden ist. Es kann aber auch eintreffen, wenn $R(x)$ eine Function ist, welche mit unendlich vielen Maximis und Minimis auf beiden Seiten von Null hin und her schwankt. Von solchen *oscillirenden* Functionen giebt es einige, welche die Eigenschaft haben, dass die Integrale von der Form

$$\int_a^x F(x)\,R(x)\,dx,$$

wo $F(x)$ eine willkürliche endliche und stetige nicht oscillirende Function bedeutet, immer verschwinden. Ist dagegen auch $F(x)$ selbst irgendwo auf gleiche Weise oscillirend, so braucht dies nicht der Fall zu sein*).

Mit Ausnahme solcher oscillirenden Functionen muss desshalb ein System immer vollständig sein, wenn für die Entwickelung von $\psi(x,z)$ $M=0$ wird. Besitzt aber $f(x)$ nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis (oder Wendepunkten), so werden solche Functionen auf die Entwickelung im Allgemeinen keinen Einfluss haben. Denn ist erstens $f(x)$ überall endlich, so werden alle solche Integrale wie $\int_a^\beta v f(x) R(x)\,dx$ Null sein, und die Function $R(x)$ tritt also mit dem Coefficienten 0 auf. Ist

*) Als ein einfaches bekanntes Beispiel führen wir die Function $R(x)=\lim\cos px$ für $p=\infty$ an. Ist $F(x)$ eine endliche nicht oscillirende Function, so wird das Integral

$$\int_0^x F(x)\cos px\,dx = \frac{1}{p}F(x)\sin px - \frac{1}{p}\int_0^x F'(x)\sin px\,dx$$

für $p=\infty$ immer verschwinden; dagegen wird z. B. für $F(x)=\lim 2\cos(a+p)x$, wo a eine endliche Grösse bezeichnet, das Integral

$$2\int_0^x \cos(a+p)x\cos px\,dx = \frac{\sin(2p+a)x}{2p+a}+\frac{\sin ax}{a}$$

für $p=\infty$ den Werth $\frac{\sin ax}{a}$ annehmen.

zweitens $f(x)$ für $x = z$ unendlich, und wäre desshalb das Integral $\int v f(x) R(x) dx$ nicht Null, so könnte man doch statt $R(x)$ als Entwickelungsfunction eine andere Function $R_1(x)$ benutzen, welche in der unmittelbaren Nähe von z Null wäre, aber sonst mit $R(x)$ übereinstimmte. Das System würde dann mit Ausnahme vom Punkte z überall im Allgemeinen gültige Entwickelungen geben. Da aber die Function $R_1(x)$ nach dem Vorhergehenden keinen Einfluss auf die Entwickelung haben könnte, so bleibt auch, wenn man $R(x)$ gänzlich vernachlässigt, die allgemeine Gültigkeit bestehen, nur kann der Punkt z dann als kritischer Punkt auftreten.

Ein System, mittelst dessen eine unstetige Function $\psi(x, z)$ mit willkürlichem Unstetigkeitspunkte z sich im Allgemeinen darstellen lässt, nennen wir ein *„relativ vollständiges“* System.

Mittelst desselben lässt sich nach dem Vorhergehenden jede nicht oscillirende Function, für welche die Coefficienten sowie das Integral $\int_a^\beta v f^2(x) dx$ *endlich sind, im Allgemeinen entwickeln.* Da ferner solche Systeme durchgängig auch für $n = \infty$ oscillirende Functionen enthalten, können auch gewisse von ihnen entwickelt werden, sie können aber nicht ganz willkürlich gewählt werden.

Nachdem wir jetzt die allgemeine Untersuchung über die Vollständigkeit der Systeme zu einem gewissen Abschluss geführt haben, wenden wir uns zur Betrachtung der kritischen Punkte.

Zunächst bemerken wir hier, dass die Möglichkeit der Entwickelung einer Function $\psi(x, z)$ es auch mit sich bringt, dass eine Function, die nur zwischen den Grenzen $z-\varepsilon$ und $z+\varepsilon$ von Null verschiedene Werthe hat, welche mit den entsprechenden Werthen einer endlichen und stetigen Function $f(x)$ übereinstimmen, im Allgemeinen entwickelt werden kann. Die Reihe wird die folgende

$$(43.) \qquad y = \Sigma \frac{1}{C_n} \Phi_n(x) \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} v \Phi_n(x) f(x) dx.$$

Macht man hier das Intervall verschwindend klein, so kann $f(x)$ ausserhalb des Integrationszeichens gesetzt werden, und wenn ausser den Discontinuitätspunkten keine kritischen Punkte vorkommen, so muss dann

$$(44.) \qquad Y = \Sigma \frac{1}{C_n} \Phi_n(x) \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} v \Phi_n(x) dx = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

sein, je nachdem x ausserhalb oder innerhalb des Intervalles $z-\varepsilon$ bis $z+\varepsilon$ liegt. Sind umgekehrt für alle z zwischen α und β diese Bedingungen erfüllt, so lässt sich mittelst solcher ***elementaren Reihen*** die Entwickelung einer völlig arbiträren endlichen Function $f(x)$ bilden. Doch ist es zuerst nothwendig zu untersuchen, welchen Werth die Reihe Y für $x = z \pm \varepsilon$ annimmt.

Für diesen Zweck nehmen wir an, dass $f(x)$ in (43.) eine unstetige Function ist, welche für $x < z$ gleich 1 ist und später 0, so dass der Punkt z ein Unstetigkeitspunkt wird. Wäre $f(x)$ überall gleich 1, so würde die elementare Entwickelung für die Grenzen $z-\varepsilon$ bis $z+\varepsilon$ mit der Reihe Y zusammenfallen und also für $x = z$ den Werth 1 geben. Jetzt wird aber die Entwickelung die folgende

$$Y_1 = \Sigma \frac{1}{C_n} \Phi_n(x) \int_{z-\varepsilon}^{z} v\Phi_n(x)\,dx.$$

Setzt man ebenso

$$Y_2 = \Sigma \frac{1}{C_n} \Phi_n(x) \int_{z}^{z+\varepsilon} v\Phi_n(x)\,dx,$$

so ist erstens $Y_1 + Y_2 = 1$ für $x = z$. Sind demnächst sowohl v als alle Φ in z endlich und stetig, so wird bis auf eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung

$$\int_{z-\varepsilon}^{z} v\Phi_n(x)\,dx = \int_{z}^{z+\varepsilon} v\Phi_n(x)\,dx,$$

so dass man erhält $Y_1 = Y_2 = \frac{1}{2}$ für $x = z$. Wäre dagegen v für $x = z$ unstetig, so könnte man resp. $v(x-0)$ und $v(x+0)$ ausserhalb der Integrationszeichen setzen, so dass man $Y_1 : Y_2 = v(x-0) : v(x+0)$ erhalten würde.

Hieraus ersieht man, dass, wenn v_x als eine stetige Function angenommen wird, und ausser den Integrationsgrenzen $z \pm \varepsilon$ keine anderen kritischen Punkte vorhanden sind, die Reihe Y für die beiden Grenzen den Werth $\frac{1}{2}$ annehmen muss.

Lässt sich demnach zeigen, dass für jedes innerhalb des Intervalles α bis β gelegene z die elementare Reihe Y die Werthe resp. 0, $\frac{1}{2}$, 1 annimmt, so kann man mittelst dieser zu der Entwickelung einer willkürlichen Function $f(x)$ zurückkehren, und diese wird dann, wenn $f(x)$ endlich und nur in discreten Punkten unstetig ist, und nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis hat, auch keine kritischen Punkte besitzen. — Die Untersuchung der elementaren Reihen giebt daher nicht nur den Beweis

der Vollständigkeit eines Systems, sondern auch den Beweis der vollständigen Uebereinstimmung von y und $f(x)$, wenn solche stattfindet.

Diese Methode, welche von Herrn *Lorenz**) zur Untersuchung einer speciellen Reihe benutzt wurde, ist jedoch wegen der Schwierigkeit der betreffenden Summationen in den meisten Fällen nicht durchführbar.

Soviel ist jedoch ersichtlich, dass für alle $f(x)$, welche so beschaffen sind, dass für ein verschwindend kleines Intervall $\int v\Phi f dx = f\int v\Phi dx$ gesetzt werden darf, nur solche kritischen Punkte auftreten können, in welchen die elementaren Reihen Y die Werthe resp. 0, $\frac{1}{2}$, 1 nicht annehmen. Sie sind desshalb allen Entwickelungen gemeinsam und hängen allein von den v und Φ ab; sie können mithin als *feste* kritische Punkte bezeichnet werden.

Solche müssen immer vorkommen, wo z einen Werth hat, für welchen alle Φ verschwinden, eins von ihnen unendlich wird, oder wo $v_z = 0$ wird. Sie können aber auch in anderen Fällen auftreten; z. B. sind bei den *Fourier*schen Reihen die Punkte $z = \pm\pi$ feste kritische Punkte, weil für diese beiden Argumente die Reihe immer den nämlichen Werth ergiebt.

Dagegen wird ein Unstetigkeitspunkt z, wo in $f(x)$ ein endlicher Sprung stattfindet, kein fester kritischer Punkt, vielmehr giebt die Reihe — v_z stetig vorausgesetzt — hier den Werth $\frac{1}{2}(f(z+0)+f(z-0))$. Wenn z zugleich ein fester kritischer Punkt wird, kann dieses aber nicht mehr der Fall sein, weil dann die Reihe auch noch den rechten Werth geben würde, wenn $f(z-0) = f(z+0)$ wäre. ***Ist** v **eine stetige Function, so wird desshalb** $y_z = \frac{1}{2}(f(z+0)+f(z-0))$ **immer eine hinreichende Bedingung dafür darstellen, dass** z **kein fester kritischer Punkt sei.***

Wenn noch andere kritische Punkte als die festen vorhanden sind, müssen dieselben von der zu entwickelnden Function $f(x)$ abhängen. Aus dem Vorhergehenden folgt aber, dass, wenn $f(x)$ durchweg endlich, stetig und nicht oscillirend ist, solche nicht auftreten können. Sie können desshalb nur vorkommen, wenn $f(x)$ irgendwo diesen Bedingungen nicht genügt.

Ein Discontinuitätspunkt wird daher immer ein kritischer Punkt. Da aber die demselben entsprechende elementare Entwickelung ausserhalb des-

---

*) *L. Lorenz,* Om arbiträre Funktioners Udvikling ved givne Funktioner. ***Zeuthen,*** Tidsskrift for Mathematik, Kjöbenhavn 1876, p. 129—144.

selben den Werth Null geben muss, so gilt die Entwickelung für alle anderen Punkte, wenn nur ein endlicher Sprung Statt findet.

Ebenso wird auch der Umstand, dass $f(x)$ in einem Punkte z mit endlichen Schwankungen oscillirend wird, nicht die Gültigkeit der Reihe ausserhalb dieses Punktes zerstören. Denn es lässt sich dann immer aus $f(x)$ ein in der nächsten Umgebung von z oscillirender Theil ausscheiden, welcher gar keine Entwickelung zulässt, weil die Coefficienten alle verschwinden. Der übrig bleibende Theil giebt eine in allen Punkten gültige Entwickelung, welche mit derjenigen von $f(x)$ übereinstimmen wird. Dieselbe muss daher für alle anderen Punkte als z gelten.

Nichts hindert, dass die hier erwähnten beiden Gattungen von kritischen Punkten in beliebiger Anzahl vorkommen können, doch müssen wir, um der Gültigkeit der Reihe in den übrigen Punkten sicher zu sein, festhalten, dass sie nur in endlicher Anzahl auftreten.

Es bleibt nur noch der Fall übrig, dass $f(x)$ irgendwo unendlich wird. Insofern aber das Integral $\int_\alpha^\beta v f^2(x)\,dx$ dennoch endlich bleibt, werden doch immer die Coefficienten der Reihe endliche Grössen, und die Convergenz der Q-Reihe ist gesichert. Treten desshalb nicht andere Umstände hinzu, so bleibt die allgemeine Gültigkeit der Entwickelung bestehen. Auch kann man, ohne dass die vollständige Uebereinstimmung aufhört, $f(x)$ im kritischen Punkte einen beliebig grossen endlichen Werth beilegen, so dass angenommen werden darf, dass die Uebereinstimmung im kritischen Punkte selbst noch Statt finde, wenn $f(z)$ ins Unendliche wächst. — Die Reihe muss desshalb in diesem Punkte nothwendig divergiren. Man kann aber dann nicht sicher sein, dass dieses nicht auch in gewissen anderen Punkten der Fall ist. — Zu dem nämlichen Resultate führt die Betrachtung der elementaren Reihe für die Umgebung des Punktes z. Während nämlich die Reihe

$$y = \Sigma \frac{1}{C_n} \Phi_n(x) \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} v\,\Phi_n(x) f(x)\,dx$$

für $f(z) = \infty$ nur in ganz besonderen Fällen einen von $f(z)$ verschiedenen Werth für $x = z$ annehmen kann, wenn die Reihe (44.) gültig ist, so darf man doch keineswegs voraussetzen, dass sie auch ausserhalb des Intervalles $z-\varepsilon$ bis $z+\varepsilon$ immer den Werth Null annimmt. Und eben dieses ist von weit grösserer Bedeutung. Da die elementare Reihe auch folgendermassen

geschrieben werden kann

$$y = \Sigma \frac{1}{C_n} \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} v \Phi_n(x) \Phi_n(z) f(z) dz,$$

so ersieht man, dass, wenn die Summe

$$s_n = \sum_1^n \frac{1}{C_n} \Phi_n(x) \Phi_n(z)$$

für immer wachsende n unter einer festen endlichen Grenze g bleibt, auch

$$y^{(n)} = \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \Sigma \frac{1}{C_n} v \Phi_n(x) \Phi_n(z) f(z) dz$$

Null werden wird, wenn ε unendlich klein wird. Die Reihe y wird in diesem Falle auch für $n = \infty$ gegen Null convergiren.

Behält also die Summe $\lim s_n$ einen endlichen (bestimmten oder unbestimmten) Werth, so gilt die Entwickelung von $f(x)$ ausserhalb des kritischen Punktes*). Wäre aber diese Summe für irgend einen Werth von x unendlich, dann brauchte dies nicht mehr der Fall zu sein. Vielmehr scheint es, als ob hier eine neue Art von kritischen Punkten auftreten könnte, deren Lage zwar nur von den Entwickelungsfunctionen abhängt, die aber doch nur in speciellen Entwickelungen sich geltend machen. Sie können desshalb nicht unter die eigentlich festen kritischen Punkte gerechnet werden. Ob aber für irgend eine bekannte Entwickelung solche Punkte existiren, bleibt dahingestellt; für die bereits sorgfältig untersuchten Reihen ist es nicht der Fall.

Bisher haben wir immer angenommen, dass das Integral $\int_\alpha^\beta v f^2(x) dx$ endlich sei. Wenn dieses nicht der Fall ist, dann erhält man für alle endlichen n einen unendlich grossen Werth von M; eine Annäherung nach Null hin erfordert also, dass die Q-Reihe divergirt. Und selbst in diesem Falle verlieren die vorhergehenden Betrachtungen ihre Bedeutung. Sogar wenn man übrigens brauchbare Reihen erhält, müssen desshalb solche immer mit grösserer Vorsicht benutzt werden, und sie sind überhaupt nicht von so grossem Werthe wie die vorher genannten. Denn erstens geben sie, wenn nur eine endliche Anzahl von Gliedern einbegriffen wird, nicht Formeln, welche mit Sicherheit im ganzen Intervalle als Annäherungsformeln benutzt werden können, und wenn man sie zweitens ins Unendliche fortsetzt, muss

*) cfr. *Lorenz* a. a. O.

immer eine sorgfältige Untersuchung der Convergenz angestellt werden, wobei nicht nur auf die Frage, ob dieselbe „gleichmässig“ ist, sondern auch, ob die Reihe im betreffenden Falle gegen den Werth von $f(x)$ convergirt, Rücksicht genommen werden muss. Lässt es sich aber zeigen, dass die Reihe $y^{(n)}$ für alle x zwischen α und β sich einer bestimmten Grenze nähert, so folgt daraus auch die allgemeine Darstellbarkeit von $f(x)$, wenn das System der Φ vollständig ist. Ist übrigens das Unendlichwerden des Integrals $\int_\alpha^\beta v f^2(x)\,dx$ in dem Umstande begründet, dass $f(x)$ in einzelnen Punkten unendlich wird, so lässt dieser Fall sich durch Ausscheidung des kritischen Punktes auf den vorher betrachteten zurückführen. Ist dagegen $f(x)$ zwar endlich, aber das Intervall α bis β unendlich gross, so kann man nicht mehr so verfahren.

Als Regel muss man daher das Unendlichwerden des erwähnten Integrals oder, was wesentlich auf dasselbe hinauskommt, die Divergenz der Q-Reihe als eine Warnung auffassen, dass man nicht die erhaltene Reihe ohne sorgfältige Prüfung anwenden darf.

Als Resultat der vorhergehenden Ueberlegungen zeigt sich, dass, wenn für die Entwickelung einer beliebigen endlichen aber unstetigen Function $\lim M_n = 0$ wird, sich jede endliche und stetige Function, die nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis besitzt, entwickeln lässt, so dass $M = 0$ wird. Die Reihe wird mit $f(x)$ überall übereinstimmen mit Ausnahme der festen kritischen Punkte. Solche sind nicht vorhanden, wenn im Unstetigkeitspunkte $y = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ ist. Sogar wenn $f(x)$ in einer endlichen Anzahl von discreten Punkten endliche Sprünge macht oder oscillirend mit endlichen Schwankungen ist, gilt die Entwickelung für alle anderen Punkte. — Ist dagegen $f(x)$ irgendwo unendlich, so bedarf die Reihe einer genaueren Untersuchung; doch bleibt sie, falls $\int_\alpha^\beta v f^2(x)\,dx$ endlich ist, noch im Allgemeinen gültig.

Ist das Integral $\int_\alpha^\beta v f^2(x)\,dx$ eine endliche Grösse, so kann ein von Null verschiedener Grenzwerth von M_n nur vorkommen,

1) wenn das System der Entwickelungsfunctionen nicht (relativ) vollständig ist,

2) wenn die kritischen Punkte in unendlicher Anzahl vorhanden sind,

3) wenn $f(x)$ auf einer endlichen Strecke unendlich viele Maxima und Minima erhält;

4) wenn $f(x)$ in irgend einem Punkte gleichzeitig unendlich und unstetig oder oscillirend wird.

Man ersieht also, dass die allgemeine Gültigkeit der nach einem gegebenen System von Entwickelungsfunctionen fortschreitenden Reihen sich mittelst verhältnissmässig einfacher Kriterien entscheiden lässt. Die genaue Untersuchung der kritischen Punkte erfordert aber ein weit tieferes Eindringen in die Natur der Entwickelungsfunctionen und lässt sich desshalb nur mit Erfolg durchführen, wenn eine specielle Art von Reihen vorliegt. Für die Anwendungen ist es aber in vielen Fällen eben die *allgemeine* Convergenz, die gesichert zu haben von Wichtigkeit ist, und es ist daher nicht ohne Interesse, selbst wenn man nicht weiter geht, diese für ein gegebenes System zu untersuchen. Wir geben desshalb im Folgenden einige specielle Beispiele dieser Untersuchungen mittelst der oben gegebenen Kriterien.

IV.

Um erstens die Methode an einem bekannten Systeme zu prüfen, betrachten wir als erstes Beispiel die Entwickelung nach Kugelfunctionen $P^m(x)$.

Für die Function $\psi(x, z)$ wählen wir eine Function, welche von -1 bis z Null ist und übrigens von z bis $+1$ gleich Eins. Für diese erhalten wir die Reihe

$$y = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} P^n(x) \int_z^1 P^n(x)\,dx,$$

nebst

$$M_n = (1-z) - Q_n = 1 - z - \sum_0^n \frac{2n+1}{2} \left(\int_z^1 P^n(x)\,dx\right)^2.$$

Im Unstetigkeitspunkte z wird der Werth von y dargestellt durch die Reihe

$$y_z = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} P^n(z) \int_z^1 P^n(x)\,dx,$$

welche mit der mittelst Differentiation gebildeten Reihe für $-\frac{1}{2}\frac{dQ}{dz}$ übereinstimmt.

Um die Q-Reihe zu summiren, benutzen wir die identische Gleichung

$$(2n+1)\int_z^1 P^n(x)\,dx = P^{n-1}(z) - P^{n+1}(z).$$

Differentiirt man die Reihe für Q_n nach z, so erhält man

$$Q'_n = -(1-z) - \sum_1^n (2n+1) P^n(z) \int_z^1 P^n(x)\,dx$$

oder

$$Q'_n = -(1-z) + \sum_1^n P^n(z)(P^{n+1}(z) - P^{n-1}(z)) = -1 + P^n(z) P^{n+1}(z).$$

Da das Product $P^n(z) P^{n+1}(z)$ für $-1 < z < +1$ mit wachsendem n sich der Grenze Null nähert, so wird $\lim Q'_n = -1$, so dass erstens die Reihe y_z gegen die Grenze $\frac{1}{2}$ convergirt. Aus der Formel für Q'_n findet man wiederum durch Integration von z bis 1

$$Q_n = 1 - z - \int_z^1 P^n(x) P^{n+1}(x)\,dx.$$

Für $n = \infty$ verschwindet das letzte Integral, was sich durch Einsetzen der Grenzwerthe sofort ergiebt. Also wird $\lim Q_n = 1 - z$ und $\lim M_n = 0$.

Hieraus folgt dann, dass das System der Kugelfunctionen ein wenigstens relativ vollständiges ist, und ebenfalls dass innerhalb der Grenzen keine festen kritischen Punkte gelegen sind. Wie sich dagegen die Reihe in den Grenzen selbst gestaltet, bleibt bei dieser Methode unentschieden.

Um demnächst das System $\Phi_n = \frac{1}{n!} D^n x^n e^{-x}$ zu untersuchen, entwickeln wir eine Function, welche von 0 bis z gleich Null und von z bis ∞ gleich e^{-z} ist.

Man erhält hier

$$y = \sum_0^\infty \Phi_n(x) \int_z^\infty \Phi_n(x)\,dx$$

und

$$Q_n = \sum_0^n \left(\int_z^\infty \Phi_n(x)\,dx\right)^2,$$

während

$$\int_0^\infty e^x f^2(x)\,dx = \int_z^\infty e^{-x}\,dx = e^{-z}.$$

Bei der folgenden Entwickelung benutzen wir einige identische Relationen, welche sich folgendermassen entwickeln lassen.

Durch n-malige Differentiation der beiden Identitäten

$$x^n e^{-x} = x \,.\, x^{n-1} e^{-x}$$

und

$$D_x x^n e^{-x} = n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}$$

erhält man leicht die Formeln

$$(A.) \qquad \Phi_n = \frac{x}{n}\Phi'_{n-1}+\Phi_{n-1},$$

$$(B.) \qquad \Phi'_n = \Phi'_{n-1}-\Phi_n,$$

und aus diesen wieder die Differenzengleichung

$$(C.) \qquad (n+1)\Phi_{n+1}-(2n+1-x)\Phi_n+n\Phi_{n-1} = 0.$$

Ebenso folgt durch $(n+1)$-malige Differentiation von

$$xDx^n e^{-x} = (n-x).x^n e^{-x}$$

die Differentialgleichung

$$(D.) \qquad x\Phi''_n+(x+1)\Phi'_n+(n+1)\Phi_n = 0.$$

Um die Reihe Q_n zu summiren, differentiiren wir zunächst noch z, wodurch wir erhalten

$$Q'_n = -2\sum_0^n \Phi_n(z)\int_z^\infty \Phi_n(x)\,dx,$$

und da vermöge $(B.)$

$$\int_z^\infty \Phi_n(x)\,dx = \Phi_n(z)-\Phi_{n-1}(z)$$

ist, so kann man auch

$$Q'_n = -2e^{-2z}-2\sum_1^n(\Phi_n^2-\Phi_n\Phi_{n-1})$$

setzen. Da aber

$$Q_n = e^{-2z}+\sum_1^n(\Phi_n-\Phi_{n-1})^2 = e^{-2z}+\Phi_0^2-\Phi_n^2+2\sum_1^n(\Phi_n^2-\Phi_n\Phi_{n-1}),$$

so wird für alle endlichen n identisch

$$Q_n+Q'_n = -\Phi_n^2(z),$$

indem $\Phi_0(z) = e^{-z}$. Durch Integration dieser Differentialgleichung erhält man

$$Q_n = e^{-z}\Big[-\int_0^z e^x\Phi_n^2(x)\,dx+c\Big],$$

wo die Constante c sich dadurch bestimmen lässt, dass $Q_n = 1$ wird für $z = 0$. Also wird $c = 1$, und man erhält

$$Q_n = e^{-z}-e^{-z}\int_0^z e^x\Phi_n^2(x)\,dx$$

oder

$$M_n = e^{-z}\int_0^z e^x\Phi_n^2(x)\,dx.$$

Da das hier auftretende Integral immer kleiner als $\int_0^\infty e^x \Phi_n^2(x)\,dx = 1$ ist, so muss auch M_n jedenfalls kleiner als e^{-z} sein. Die Convergenz der Q-Reihe ist daher zwar ausser Zweifel; ob aber $\lim M_n$ Null wird, beruht auf dem Verhalten der Function Φ_n für ein unendlich grosses n. Dieses muss also zuerst ermittelt werden.

Aus der Convergenz von $\Sigma(\Phi_n - \Phi_{n-1})^2$ folgt sogleich, dass

$$\lim(\Phi_n - \Phi_{n-1}) = 0$$

für $n = \infty$, oder dass $\Phi_n(x)$ sich mit wachsendem n einer bestimmten Grenze nähert. Für sehr grosse n kann man daher $\Phi_n - \Phi_{n-1} = An^{-\varkappa}$ setzen, wo A eine endlich bleibende Function von x, und $\varkappa$ eine positive Zahl bezeichnet. Ferner kann man für Φ_n die Grenzformel an^λ annehmen, wo λ jedenfalls kleiner als Eins sein muss, weil

$$\Phi_n - \Phi_{n-1} = a\left(n^\lambda - n^\lambda + \frac{\lambda}{1} n^{\lambda-1} - \cdots\right) = a\lambda n^{\lambda-1} + \cdots$$

sonst nicht für $n = \infty$ verschwinden könnte. Es muss aber noch λ negativ sein. Man soll nämlich zufolge der allgemeinen Differenzengleichung (*C.*) identisch haben

$$(n+1)\Phi_{n+1} - (2n+1-x)\Phi_n + n\Phi_{n-1} = 0.$$

Setzt man hier die Grenzformel von Φ_n ein, so erhält man links

$$a(n+1)^{\lambda+1} - a(2n+1)n^\lambda + an(n-1)^\lambda + axn^\lambda$$

oder

$$a[n^{\lambda+1} + (\lambda+1)n^\lambda - 2n^{\lambda+1} - n^\lambda + n^{\lambda+1} - \lambda n^\lambda] + axn^\lambda + R = axn^\lambda + R,$$

wo R nur Glieder von niedrigerer Ordnung als n^λ enthält. Soll diese Grösse für $n = \infty$ Null werden, so muss daher λ negativ sein, wenigstens wenn nicht $x = 0$.

Wird also Φ_n in eine nach absteigenden Potenzen von n geordnete Reihe entwickelt, dann muss der Exponent des ersten Gliedes nothwendig negativ sein. Folglich muss $\lim \Phi_n = 0$ sein. Nur der Fall $x = 0$ ist ausgenommen; man ersieht auch sogleich, dass $\Phi_n(0)$ immer gleich Eins ist.

Hieraus folgt nicht nur, dass für ein endliches z immer $\lim M_n = 0$ und also das System der Φ ein relativ vollständiges sein muss, sondern auch dass die Summe der Reihe

$$\sum_1^\infty (\Phi_n^2 - \Phi_n \Phi_{n-1}) = \tfrac{1}{2}(Q_\infty - 2e^{-2z} + \Phi_\infty^2) = \tfrac{1}{2}(e^{-z} - 2e^{-2z})$$

ist. Also convergirt auch die Reihe Q'_n, und man erhält

$$Q'_n = -e^{-z}.$$

Da aber $-Q'_n$ eben den doppelten Werth der Reihe y für $x = z$ darstellt, so ersieht man, dass $y_z = \frac{1}{2}e^{-z}$ wird, oder dass

$$y_z = \tfrac{1}{2}(f(z+0)+f(z-0)).$$

Daraus folgt wieder, dass die Entwickelung innerhalb des Intervalles keine festen kritischen Punkte besitzt.

Das System $\Phi_n(x) = D_x^n e^{-x^2}$ lässt sich auf ähnliche Weise untersuchen. Wir entwickeln hier eine Function $f(x)$, welche von $-\infty$ bis z gleich e^{-x^2} und sonst Null ist. Sie giebt die Entwickelung

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty \frac{1}{2^n n!} \Phi_n(x) \int_{-\infty}^z \Phi_n(x)\,dx,$$

oder was dasselbe ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_1^\infty \frac{1}{2^n n!} \Phi_n(x) \Phi_{n-1}(z)$$

und

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big(\int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx\Big)^2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_1^n \frac{1}{2^n n!} \Phi_{n-1}^2(z),$$

während

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx.$$

Da eine Differentiation der endlichen Reihe Q_n nach z immer erlaubt ist, erhalten wir

$$Q'_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_1^n \frac{1}{2^n n!} \Phi_{n-1} \Phi_n$$

und ebenso

$$Q''_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Big(e^{-2z^2} - 2z e^{-z^2} \int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx\Big) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_1^n \frac{1}{2^n n!} (\Phi_n^2 - \Phi_{n-1} \Phi_{n+1}).$$

Zwischen den auf einander folgenden Φ besteht aber die Relation

$$\Phi_{n+1} + 2x\Phi_n + 2n\Phi_{n-1} = 0,$$

und mittelst derselben reducirt sich die Formel für Q''_n, so dass

$$Q''_n = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 2z e^{-z^2} \int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_1^n \frac{2z\Phi_{n-1}\Phi_n}{2^n n!} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Phi_n^2}{2^n n!}$$

wird. Folglich findet man die Differentialgleichung

$$Q_n'' + 2z\,Q_n' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Phi_n^2(z)}{2^n n!},$$

welche für alle endlichen n identisch erfüllt ist. Aus dieser findet man wieder nach Multiplication mit e^{z^2} und durch nachherige Integration zwischen den Grenzen $-\infty$ und z

$$Q_n' = \frac{2}{2^n n! \sqrt{\pi}}\, e^{-z^2} \int_{-\infty}^{z} e^{x^2} \Phi_n^2(x)\, dx,$$

durch nochmalige Integration Q_n und daraus

$$M_n = \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2} dx - Q_n.$$

Statt diesen Werth direct zu ermitteln, untersuchen wir, für welchen Werth von z er am grössten wird. Derselbe wird bestimmt durch die Gleichung

$$M_n' = e^{-z^2} - \frac{2}{2^n n! \sqrt{\pi}}\, e^{-z^2} \int_{-\infty}^{z} e^{x^2} \Phi_n^2(x)\, dx = 0,$$

und diese giebt ausser $z = \pm\infty$, denen $M = 0$ entspricht und die also alle beide Minima von M geben, nur den Werth $z = 0$. Für $z = 0$ muss desshalb M_n immer einen grössten Werth haben. Nun ist aber für $z = 0$ $(n = 2m+1)$

$$Q_n = \frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{1}^{n} \frac{1}{2^n n!} \Phi_{n-1}^2(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{0}^{m} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2(2m+1)}.$$

Hier tritt rechts eine bekannte convergente Reihe auf, so dass man für $n = \infty$

$$Q = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

erhält. Mit wachsendem n nähert sich desshalb der Maximalwerth von M_n der Grenze Null, und hieraus folgt, dass M auch für alle Werthe von z gegen Null convergiren muss. Folglich wird das System der Φ ein wenigstens relativ vollständiges sein.

Da ferner

$$M_n' = e^{-z^2} - Q_n' = \frac{2}{2^n n! \sqrt{\pi}}\, e^{-z^2} \int_{0}^{z} e^{x^2} \Phi_n^2\, dx,$$

so hat man, um den Grenzwerth von Q_n' zu ermitteln, zunächst die Grenze von Φ_n zu suchen. Auf ähnliche Weise wie im vorigen Beispiel ersieht man aber, dass die Function

$$\Phi_n(x) = \sqrt{2^n n!}\,\varphi_n(x)$$

nur dann die Differenzengleichung der Φ befriedigen kann, wenn $\lim_n \varphi_n(x) = 0$, falls nicht $x = 0$ ist. (Es ist bei dieser Untersuchung nur zu beachten,

dass wenigstens eine der drei Φ negativ sein muss.) Für $x = 0$ erhält man sogleich aus (36.)

$$\Phi_{2m+1} = 0, \quad \frac{\Phi_{2m}^2}{2^{2m}(2m)!} = \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots m}.$$

Folglich wird auch für jeden endlichen Werth von z $\lim M'_n = 0$, woraus folgt, dass die Reihe Q'_n sich mit wachsendem n der Grenze e^{-z^2} nähert. Da aber auch hier Q'_n den doppelten Werth von $y_z^{(n)}$ darstellt, so wird die Reihe y im Unstetigkeitspunkte gegen den Werth

$$\tfrac{1}{2}e^{-z^2} = \tfrac{1}{2}(f(z+0)+f(z-0))$$

convergiren. Also sind innerhalb des Intervalles keine festen kritischen Punkte vorhanden.

Das hier erwähnte System erhält dadurch ein besonderes Interesse, dass mittelst desselben alle solche Functionen, welche ausserhalb gewisser endlicher Grenzen als verschwindend zu betrachten sind, entwickelt werden können. Reihen dieser Art sind desshalb für die allgemeine Fehlertheorie von der grössten Bedeutung.

Kopenhagen, den 18. October 1881.

Zur Theorie der Thetafunctionen mit zwei Argumenten.

(Von Herrn *F. Caspary*.)

Herr *Weierstrass* hat in seinen Vorlesungen und Herr *Weber* in einer Abhandlung *) darauf aufmerksam gemacht, dass zwischen gewissen neun Quotienten, die aus den zehn geraden Thetafunctionen zweier Argumente und ihren zugehörigen Nullwerthen gebildet sind, die Bedingungsgleichungen der orthogonalen Substitution bestehen **). Indem ich versuchte, dieses merkwürdige Resultat, welches zahlreiche Thetarelationen in übersichtlicher Weise gruppirt und auf bekannte Formeln zurückführt, von den zehn geraden Thetafunctionen auf alle sechzehn auszudehnen, gelangte ich zu dem einfachen Theorem I, welches ich in § 1 aufstelle und specialisire, und aus dem ich in § 2 die *Göpel*sche Relation nebst ihrer Umformung in die Gleichung der *Kummer*schen Fläche ableite. In § 3 entwickele ich ein zweites Theorem, welches für einen sehr speciellen Fall diejenigen Formelsysteme liefert, von denen Herr *Rosenhain* in seiner Preisschrift ausgeht. Sämmtliche Theoreme sind auf elementarem Wege aus einfachen Identitäten hergeleitet, so dass die hier gegebene Darstellung vielleicht zweckmässig auch zur Einführung in die Theorie der Thetafunctionen mit zwei Argumenten verwendet werden kann.

§ 1.

Ist

$$w_k = a_{1k}v_1 + a_{2k}v_2 + a_{3k}v_3 + a_{4k}v_4 \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

und wird durch diese Substitution

$$(1.)\qquad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = a(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2),$$

*) Mathem. Annalen Bd. 14, S. 173 flgd.

**) Vgl. auch *Cayley*, dieses Journal Bd. 83, S. 231.

bestehen zwischen den 16 Coefficienten a_{ik} Systeme von Bedingungs-ichungen, welche für den Fall, dass a den Werth 1 erhält, in die wohl-annten der orthogonalen Substitution übergehen. Setzt man nunmehr den Elementen a_{ik} und den, analogen Bedingungsgleichungen unter-rfenen, neuen Elementen b_{ik} die Elemente g_{ik} zusammen, so dass

$$g_{ik} = a_{1i}b_{1k} + a_{2i}b_{2k} + a_{3i}b_{3k} + a_{4i}b_{4k} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

rd, so führt die Substitution $w_k = \sum_{i=1}^{i=4} g_{ik} v_i$ ebenfalls die Summe der Qua-ate der neuen Variablen in die Summe der Quadrate der ursprünglichen, ultiplicirt jedoch noch mit einem Factor, über.

Wählt man für die zweimal 16 Elemente a_{ik} und b_{ik} die folgenden:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 \\ -\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & -\beta_3 & \beta_4 \\ -\beta_2 & \beta_1 & \beta_4 & \beta_3 \\ \beta_3 & -\beta_4 & \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & -\beta_1, \end{array}$$

welche die Gleichung (1.) *identisch* erfüllen, und setzt aus ihnen die Elemente g_{ik} zusammen, so erhält man:

$$(2.)\ \left\{\begin{array}{ll} g_{11} = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4, & g_{21} = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3, \\ g_{12} = -(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3), & g_{22} = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4, \\ g_{13} = \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_2, & g_{23} = -(\alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1), \\ g_{14} = \alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_4\beta_1, & g_{24} = \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_2, \\ & \\ g_{31} = -(\alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_2), & g_{41} = -(\alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_4\beta_1), \\ g_{32} = \alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1, & g_{42} = -(\alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_4 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_2), \\ g_{33} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4, & g_{43} = -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3), \\ g_{34} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3, & g_{44} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4, \end{array}\right.$$

und es bestehen daher auch zwischen diesen Elementen *identisch* die Gleichungen:

$$(3.)\ \left\{\begin{array}{rl} g_{i1}g_{k1} + g_{i2}g_{k2} + g_{i3}g_{k3} + g_{i4}g_{k4} & = 0, \\ g_{1i}g_{1k} + g_{2i}g_{2k} + g_{3i}g_{3k} + g_{4i}g_{4k} & = 0, \\ g_{i1}^2 + g_{i2}^2 + g_{i3}^2 + g_{i4}^2 & = g, \\ g_{1i}^2 + g_{2i}^2 + g_{3i}^2 + g_{4i}^2 & = g, \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{c} i, k = 1, 2, 3, 4 \\ i \gtrless k \end{array}\right)$$

in denen $g = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2)$ ist.

Nach einer bekannten*) Formel für die Thetafunctionen ist

$$\begin{aligned}&\vartheta_5(x_1, x_2)\vartheta_5(y_1, y_2)\\ = &\Theta_5(x_1+y_1, x_2+y_2)\,\Theta_5(x_1-y_1, x_2-y_2)+\Theta_{01}(x_1+y_1, x_2+y_2)\,\Theta_{01}(x_1-y_1, x_2-y_2)\\ &+\Theta_4(x_1+y_1, x_2+y_2)\,\Theta_4(x_1-y_1, x_2-y_2)+\Theta_{23}(x_1+y_1, x_2+y_2)\,\Theta_{23}(x_1-y_1, x_2-y_2),\end{aligned}$$

wobei wie im Folgenden überhaupt die Thetafunctionen in der *Weierstrass*schen Bezeichnung geschrieben sind, und die Functionen ϑ und Θ von den Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} und $2\tau_{11}$, $2\tau_{12}$, $2\tau_{22}$ abhängen. Setzt man nunmehr:

$$(4.)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \Theta_5(x_1+y_1, x_2+y_2), & \beta_1 = \Theta_5(x_1-y_1, x_2-y_2),\\ \alpha_2 = \Theta_{01}(x_1+y_1, x_2+y_2), & \beta_2 = \Theta_{01}(x_1-y_1, x_2-y_2),\\ \alpha_3 = \Theta_4(x_1+y_1, x_2+y_2), & \beta_3 = \Theta_4(x_1-y_1, x_2-y_2),\\ \alpha_4 = \Theta_{23}(x_1+y_1, x_2+y_2), & \beta_4 = \Theta_{23}(x_1-y_1, x_2-y_2),\end{cases}$$

so geht durch Vermehrung der Argumente um halbe Perioden aus der obigen Formel das folgende Formelsystem hervor:

$$(5.)\quad \begin{cases} \vartheta_5(x_1, x_2)\vartheta_5(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4,\\ \vartheta_{34}(x_1, x_2)\vartheta_{34}(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3-\alpha_4\beta_4,\\ \vartheta_{12}(x_1, x_2)\vartheta_{12}(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3-\alpha_4\beta_4,\\ \vartheta_0(x_1, x_2)\vartheta_0(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4,\\[6pt] \vartheta_{01}(x_1, x_2)\vartheta_{01}(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3,\\ \vartheta_2(x_1, x_2)\vartheta_2(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3,\\ \vartheta_{02}(x_1, x_2)\vartheta_{02}(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3,\\ \vartheta_1(x_1, x_2)\vartheta_1(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1-\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3,\\[6pt] \vartheta_4(x_1, x_2)\vartheta_4(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_2,\\ \vartheta_3(x_1, x_2)\vartheta_3(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_1-\alpha_4\beta_2,\\ \vartheta_{03}(x_1, x_2)\vartheta_{03}(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_3-\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_1-\alpha_4\beta_2,\\ \vartheta_{04}(x_1, x_2)\vartheta_{04}(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_3-\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_2,\\[6pt] \vartheta_{23}(x_1, x_2)\vartheta_{23}(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1,\\ \vartheta_{24}(x_1, x_2)\vartheta_{24}(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2-\alpha_4\beta_1,\\ \vartheta_{13}(x_1, x_2)\vartheta_{13}(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_4-\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2-\alpha_4\beta_1,\\ \vartheta_{14}(x_1, x_2)\vartheta_{14}(y_1, y_2) = \alpha_1\beta_4-\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1.\end{cases}$$

Die Vergleichung von (1.), (2.) und (5.) ergiebt dann unmittelbar:

*) Vgl. *Königsberger*, dieses Journal Bd. 64, S. 24.

Theorem I.

Bedeuten x_1, x_2; y_1. y_2 zwei Paare unabhängiger Argumente, so bilden die sechzehn Thetaproducte in der folgenden Anordnung:

$$\tag{6.}\left\{\begin{array}{llll} \vartheta_0(x_1,x_2)\vartheta_0(y_1,y_2) & \vartheta_{01}(x_1,x_2)\vartheta_{01}(y_1,y_2) & -\vartheta_{03}(x_1,x_2)\vartheta_{03}(y_1,y_2) & -\vartheta_{24}(x_1,x_2)\vartheta_{24}(y_1,y_2) \\ -\vartheta_2(x_1,x_2)\vartheta_2(y_1,y_2) & \vartheta_{12}(x_1,x_2)\vartheta_{12}(y_1,y_2) & \vartheta_{23}(x_1,x_2)\vartheta_{23}(y_1,y_2) & -\vartheta_{04}(x_1,x_2)\vartheta_{04}(y_1,y_2) \\ \vartheta_4(x_1,x_2)\vartheta_4(y_1,y_2) & -\vartheta_{14}(x_1,x_2)\vartheta_{14}(y_1,y_2) & \vartheta_{34}(x_1,x_2)\vartheta_{34}(y_1,y_2) & -\vartheta_{02}(x_1,x_2)\vartheta_{02}(y_1,y_2) \\ \vartheta_{13}(x_1,x_2)\vartheta_{13}(y_1,y_2) & \vartheta_3(x_1,x_2)\vartheta_3(y_1,y_2) & \vartheta_1(x_1,x_2)\vartheta_1(y_1,y_2) & \vartheta_5(x_1,x_2)\vartheta_5(y_1,y_2) \end{array}\right.$$

die Coefficienten einer linearen Substitution, welche die Summe der Quadrate der neuen vier Variablen in die mit einem Factor multiplicirte Summe der Quadrate der ursprünglichen vier Variablen überführt.

Von der grossen Anzahl von Folgerungen, welche aus diesem Theorem zu ziehen sind, seien als für die Theorie der Thetarelationen von besonderer Wichtigkeit die Gleichungen (3.) und die sich aus ihnen leicht ergebenden nachstehenden Sätze hervorgehoben.

1. *Bildet man aus den Elementen von* (6.) *die Unterdeterminanten zweiter Ordnung, so sind diese gleich ihren Adjunkten.*

2. *Mit jedem Elemente von* (6.) *stehen drei andere Elemente in einer Horizontalen und drei weitere in einer Vertikalen. Die Summe aus den Quadraten des einen Tripels ist gleich der Summe aus den Quadraten des anderen**).

3. *Die Summe aus den Quadraten irgend welcher vier Elemente von* (6.), *die in einer Unterdeterminante zweiter Ordnung stehen, ist gleich der Summe aus den Quadraten der in ihrer Adjunkten vorkommenden vier Elemente.*

Vermehrt man in (6.) die Argumente der Thetafunctionen um halbe Perioden oder wendet man auf sie Modultransformationen an, so gehen mit Hilfe der von den Herren *Königsberger***) und *Henoch****) gegebenen Tabellen aus (6.) zahlreiche neue Anordnungen hervor; von diesen liefern indess diejenigen keine neuen Formeln, bei denen an beiden Functionen der Thetaproducte die nämliche Indexveränderung vorgenommen ist.

Bezeichnet man die Nullwerthe von ϑ_α und $\vartheta_{\alpha\beta}$ durch c_α und $c_{\alpha\beta}$ und beachtet, dass wegen (5.) die Constanten: c_{13}, c_3, c_1, c_{24}, c_{04}, c_{02} verschwinden, so erhält man aus Theorem I, nachdem man jedes Element durch $c_5\vartheta_5(x_1, x_2)$ dividirt hat, den in der Einleitung erwähnten Satz:

---

*) Dieser Satz ergiebt diejenigen Thetarelationen, welche Herr *Rohn* (Math. Ann. Bd. 15, S. 348 u. 353) aus geometrischen Principien gewinnt.

**) A. a. O. S. 23.

***) De Abelianarum functionum periodis. Diss. inaug. Berolini 1867. pp. 14, 19.

Zwischen den neun Quotienten:

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{c_0\vartheta_0(x_1, x_2)}{c_5\vartheta_5(x_1, x_2)} & \dfrac{c_{01}\vartheta_{01}(x_1, x_2)}{c_5\,\vartheta_5\,(x_1, x_2)} & -\dfrac{c_{03}\vartheta_{03}(x_1, x_2)}{c_5\,\vartheta_5\,(x_1, x_2)} \\[2ex]
-\dfrac{c_2\vartheta_2(x_1, x_2)}{c_5\vartheta_5(x_1, x_2)} & \dfrac{c_{12}\vartheta_{12}(x_1, x_2)}{c_5\,\vartheta_5\,(x_1, x_2)} & \dfrac{c_{23}\vartheta_{23}(x_1, x_2)}{c_5\,\vartheta_5\,(x_1, x_2)} \\[2ex]
\dfrac{c_4\vartheta_4(x_1, x_2)}{c_5\vartheta_5(x_1, x_2)} & -\dfrac{c_{14}\vartheta_{14}(x_1, x_2)}{c_5\,\vartheta_5\,(x_1, x_2)} & \dfrac{c_{34}\vartheta_{34}(x_1, x_2)}{c_5\,\vartheta_5\,(x_1, x_2)}
\end{array}$$

bestehen die Bedingungsgleichungen der orthogonalen Substitution.

Für die Nullwerthe der Argumente ergiebt sich aus Theorem I:

Auch für die Constanten:

$$(7.)\quad \left\{\begin{array}{cccc}
c_0^2 & c_{01}^2 & -c_{03}^2 & 0 \\
-c_2^2 & c_{12}^2 & c_{23}^2 & 0 \\
c_4^2 & -c_{14}^2 & c_{34}^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_5^2
\end{array}\right.$$

bestehen die Gleichungen (3.) *und deren Folgerungen.*

Wendet man auf (7.) die Gleichungen (3.) und den Satz 1. an, so erhält man in übersichtlicher Form diejenigen Constantenrelationen, welche *Göpel**) und *Rosenhain***) gegeben haben; von den aus Satz 3. hervorgehenden Folgerungen finden sich bei *Borchardt****) drei.

Von den mannigfachen Erweiterungen, deren Theorem I fähig ist, will ich eine kurz andeuten.

Wenn r_1, r_2, r_3, r_4 ganz beliebige Werthe haben und

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &= r_1+r_2+r_3+r_4, \\
\varrho_2 &= r_1+r_2-r_3-r_4, \\
\varrho_3 &= r_1-r_2+r_3-r_4, \\
\varrho_4 &= r_1-r_2-r_3+r_4
\end{aligned}$$

ist, so ergeben sich die Identitäten:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}(\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2+\varrho_4^2) &= r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2, \\
\tfrac{1}{2}(\varrho_1\varrho_2+\varrho_3\varrho_4) &= r_1^2+r_2^2-r_3^2-r_4^2, \\
\tfrac{1}{2}(\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_4) &= r_1^2-r_2^2+r_3^2-r_4^2, \\
\tfrac{1}{2}(\varrho_1\varrho_4+\varrho_2\varrho_3) &= r_1^2-r_2^2-r_3^2+r_4^2,
\end{aligned}$$

---

*) Dieses Journal Bd. 35, S. 288.

**) Mémoires présentés par divers savants. 1851. tom. XI p. 416 (89.), (90.).

***) Dieses Journal Bd. 83, S. 238.

die zeigen, welche Grössen an Stelle der ϱ_i treten, wenn man die r_i durch ihre Quadrate ersetzt. Wendet man diese Identitäten auf das Formelsystem (5.) an, indem man statt der α_i und β_i ihre Quadrate setzt, so erhält man eine neue Anordnung von 16 Thetaverbindungen, zwischen denen die nämlichen Gleichungen bestehen, wie zwischen den Thetaproducten in (6.). Für die Nullwerthe der Argumente erhält man aus jener Anordnung, die ich der Kürze wegen hier hinzuschreiben unterlasse, nachdem man jedes Element durch

$$c = \tfrac{1}{2}(c_0^4 + c_5^4 + c_{12}^4 + c_{34}^4)$$

dividirt hat:

Zwischen den neun Quotienten:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{c_0^2 c_5^2 + c_{12}^2 c_{34}^2}{c} & \dfrac{c_2^4 + c_{01}^4}{2c} & -\dfrac{c_4^2 c_{03}^2}{c} \\[2ex] -\dfrac{c_2^2 c_{01}^2}{c} & \dfrac{c_5^2 c_{12}^2 + c_0^2 c_{34}^2}{c} & \dfrac{c_{14}^4 + c_{23}^4}{2c} \\[2ex] \dfrac{c_4^4 + c_{03}^4}{2c} & -\dfrac{c_{14}^2 c_{23}^2}{c'} & \dfrac{c_5^2 c_{34}^2 + c_0^2 c_{12}^2}{c} \end{array}$$

bestehen ebenfalls die Bedingungsgleichungen der orthogonalen Substitution.

§ 2.

Um aus Theorem I die *Göpel*sche biquadratische Relation herzuleiten, werde diejenige der Gleichungen (3.) aufgestellt, welche durch Multiplication der Elemente der ersten und dritten Vertikalreihe von (6.) hervorgeht, und zwar für die Thetafunctionen, welche von den halben Moduln: $\frac{1}{2}\tau_{11}$, $\frac{1}{2}\tau_{12}$, $\frac{1}{2}\tau_{22}$ abhängen. Bezeichnet man diese Thetafunctionen für den Augenblick durch ϑ' und ihre Nullwerthe durch c', so folgt für $y_1 = y_2 = 0$:

$$(8.)\quad c_0' c_{03}' \vartheta_0'(x_1, x_2)\vartheta_{03}'(x_1, x_2) + c_2' c_{23}' \vartheta_2'(x_1, x_2)\vartheta_{23}'(x_1, x_2) - c_4' c_{34}' \vartheta_4'(x_1, x_2)\vartheta_{34}'(x_1, x_2) = 0.$$

Setzt man nun:

$$(9.)\quad \begin{cases} \xi_1 = \vartheta_5\,(x_1, x_2), & \gamma_1 = c_5, \\ \xi_2 = \vartheta_{01}(x_1, x_2), & \gamma_2 = c_{01}, \\ \xi_3 = \vartheta_4\,(x_1, x_2), & \gamma_3 = c_4, \\ \xi_4 = \vartheta_{23}(x_1, x_2), & \gamma_4 = c_{23}, \end{cases}$$

so dass die γ_i die Nullwerthe der ξ_i bedeuten, so erhält man aus (5.):

$$\begin{array}{ll} \vartheta_0'^2(x_1, x_2) = \gamma_1\xi_1 - \gamma_2\xi_2 - \gamma_3\xi_3 + \gamma_4\xi_4, & \vartheta_{03}'^2(x_1, x_2) = \gamma_3\xi_1 - \gamma_4\xi_2 + \gamma_1\xi_3 - \gamma_2\xi_4, \\ \vartheta_2'^2(x_1, x_2) = \gamma_2\xi_1 + \gamma_1\xi_2 - \gamma_4\xi_3 - \gamma_3\xi_4, & \vartheta_{23}'^2(x_1, x_2) = \gamma_4\xi_1 + \gamma_3\xi_2 + \gamma_2\xi_3 + \gamma_1\xi_4, \\ \vartheta_4'^2(x_1, x_2) = \gamma_3\xi_1 + \gamma_4\xi_2 + \gamma_1\xi_3 + \gamma_2\xi_4, & \vartheta_{34}'^2(x_1, x_2) = \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 - \gamma_3\xi_3 - \gamma_4\xi_4, \end{array}$$

und hieraus für $x_1 = x_2 = 0$:

$$c_0'^2 = \gamma_1^2-\gamma_2^2-\gamma_3^2+\gamma_4^2, \quad c_{03}'^2 = 2(\gamma_1\gamma_3-\gamma_2\gamma_4),$$
$$c_2'^2 = 2(\gamma_1\gamma_2-\gamma_3\gamma_4), \quad c_{23}'^2 = 2(\gamma_1\gamma_4+\gamma_2\gamma_3),$$
$$c_4'^2 = 2(\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_4), \quad c_{34}'^2 = \gamma_1^2+\gamma_2^2-\gamma_3^2-\gamma_4^2.$$

Substituirt man diese Werthe in (8.), so ergiebt sich die *Göpel*sche Relation in irrationaler Form*) und diese geht, nachdem man rational gemacht und nach den Grössen ξ_i geordnet hat, in die folgende über:

$$(10.)\quad \left\{\begin{aligned} &(\gamma_1^2\gamma_2^2-\gamma_3^2\gamma_4^2)(\gamma_1^2\gamma_3^2-\gamma_2^2\gamma_4^2)(\gamma_1^2\gamma_4^2-\gamma_2^2\gamma_3^2)(\xi_1^4+\xi_2^4+\xi_3^4+\xi_4^4)\\ &-(\gamma_1^2\gamma_3^2-\gamma_2^2\gamma_4^2)(\gamma_1^2\gamma_4^2-\gamma_2^2\gamma_3^2)(\gamma_1^4+\gamma_2^4-\gamma_3^4-\gamma_4^4)(\xi_1^2\xi_2^2+\xi_3^2\xi_4^2)\\ &-(\gamma_1^2\gamma_2^2-\gamma_3^2\gamma_4^2)(\gamma_1^2\gamma_4^2-\gamma_2^2\gamma_3^2)(\gamma_1^4-\gamma_2^4+\gamma_3^4-\gamma_4^4)(\xi_1^2\xi_3^2+\xi_2^2\xi_4^2)\\ &-(\gamma_1^2\gamma_2^2-\gamma_3^2\gamma_4^2)(\gamma_1^2\gamma_3^2-\gamma_2^2\gamma_4^2)(\gamma_1^4-\gamma_2^4-\gamma_3^4+\gamma_4^4)(\xi_1^2\xi_4^2+\xi_2^2\xi_3^2)\\ &+2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2)(\gamma_1^2+\gamma_2^2-\gamma_3^2-\gamma_4^2)(\gamma_1^2-\gamma_2^2+\gamma_3^2-\gamma_4^2)(\gamma_1^2-\gamma_2^2-\gamma_3^2+\gamma_4^2)\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\\ &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ich will noch eine zweite Ableitung dieser Formel erwähnen, die derjenigen, die *Göpel***) selbst gegeben hat, ähnlich ist. Wendet man auf (6.) die Sätze 1. und 3. an, so folgt für $y_1 = y_2 = 0$:

$$c_2\vartheta_2(x_1, x_2)c_{34}\vartheta_{34}(x_1, x_2)+c_4\vartheta_4(x_1, x_2)c_{23}\vartheta_{23}(x_1, x_2) = c_5\vartheta_5(x_1, x_2)c_{01}\vartheta_{01}(x_1, x_2),$$
$$c_2^2\vartheta_2^2(x_1, x_2)+c_{34}^2\vartheta_{34}^2(x_1, x_2)+c_4^2\vartheta_4^2(x_1, x_2)+c_{23}^2\vartheta_{23}^2(x_1, x_2) = c_5^2\vartheta_5^2(x_1, x_2)+c_{01}^2\vartheta_{01}^2(x_1, x_2)$$

und aus der zweiten Gleichung:

$$c_2^2\vartheta_{34}^2(x_1, x_2)+c_{34}^2\vartheta_2^2(x_1, x_2)+c_4^2\vartheta_{23}^2(x_1, x_2)+c_{23}^2\vartheta_4^2(x_1, x_2) = c_5^2\vartheta_{01}^2(x_1, x_2)+c_{01}^2\vartheta_5^2(x_1, x_2).$$

Substituirt man hierin die Werthe aus (9.), so findet man:

$$c_2\vartheta_2(x_1, x_2)c_{34}\vartheta_{34}(x_1, x_2) = \gamma_1\gamma_2\xi_1\xi_2-\gamma_3\gamma_4\xi_3\xi_4,$$
$$c_2^2\vartheta_2^2(x_1, x_2)+c_{34}^2\vartheta_{34}^2(x_1, x_2) = \gamma_1^2\xi_1^2+\gamma_2^2\xi_2^2-\gamma_3^2\xi_3^2-\gamma_4^2\xi_4^2,$$
$$c_2^2\vartheta_{34}^2(x_1, x_2)+c_{34}^2\vartheta_2^2(x_1, x_2) = \gamma_1^2\xi_2^2+\gamma_2^2\xi_1^2-\gamma_3^2\xi_4^2-\gamma_4^2\xi_3^2.$$

Bestimmt man aus den beiden letzten Gleichungen $\vartheta_2^2(x_1, x_2)$ und $\vartheta_{34}^2(x_1, x_2)$, multiplicirt die erhaltenen Werthe und setzt sie in die quadrirte erste Gleichung ein, so erhält man nach einigen einfachen Umformungen die *Göpel*sche Relation in der Form (10.), wenn man noch beachtet, dass aus obigen Gleichungen für $x_1 = x_2 = 0$:

$$c_2^2c_{34}^2 = \gamma_1^2\gamma_2^2-\gamma_3^2\gamma_4^2,$$
$$c_2^4+c_{34}^4 = \gamma_1^4+\gamma_2^4-\gamma_3^4-\gamma_4^4,$$

---

*) Vgl. *Cayley*, dieses Journal Bd. 83, S. 215.

**) Dieses Journal Bd. 35, S. 291.

und hieraus:

$$(c_2^4-c_{34}^4)^2 = \prod_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}(\gamma_1^2+\mathfrak{p}\gamma_2^2+\mathfrak{p}'\gamma_3^2+\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\gamma_4^2) \qquad (\mathfrak{p},\mathfrak{p}'=\pm 1)$$

hervorgeht.

Dividirt man Gleichung (10.) durch den ersten Coefficienten und substituirt für die ξ_i und γ_i ihre Werthe aus (9.), so erhält man die *Göpel*sche Relation zwischen ϑ_5, ϑ_{01}, ϑ_4, ϑ_{23} genau in derjenigen Form, in welcher sie für ϑ_5, ϑ_0, ϑ_{23}, ϑ_{14} *Borchardt**) aufgestellt hat. Aus dem einen Quadrupel von Thetafunctionen geht das andere, ebenso wie alle übrigen hervor, wenn man die *Henoch*schen**) Transformationen auf die Moduln anwendet und die Argumente um halbe Perioden vermehrt. Auf diese Weise erhält man im Ganzen sechzig Quadrupel, denen sechzig *Göpel*sche Relationen entsprechen***).

Schreibt man in (10.) für ξ_i und γ_i bez. ξ_i' und γ_i' und setzt:

$$(11.)\quad \begin{cases} \xi_1'^2 = s, & \dfrac{\gamma_1'^4+\gamma_2'^4-\gamma_3'^4-\gamma_4'^4}{\gamma_1'^2\gamma_2'^2-\gamma_3'^2\gamma_4'^2} = -2a, \\ \xi_2'^2 = p, & \\ \xi_3'^2 = q, & \dfrac{\gamma_1'^4-\gamma_2'^4+\gamma_3'^4-\gamma_4'^4}{\gamma_1'^2\gamma_3'^2-\gamma_2'^2\gamma_4'^2} = -2b, \\ \xi_4'^2 = r, & \\ & \dfrac{\gamma_1'^4-\gamma_2'^4-\gamma_3'^4+\gamma_4'^4}{\gamma_1'^2\gamma_4'^2-\gamma_2'^2\gamma_3'^2} = -2c, \\ & \dfrac{2\gamma_1'\gamma_2'\gamma_3'\gamma_4'\prod\limits_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}(\gamma_1'^2+\mathfrak{p}\gamma_2'^2+\mathfrak{p}'\gamma_3'^2+\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\gamma_4'^2)}{(\gamma_1'^2\gamma_2'^2-\gamma_3'^2\gamma_4'^2)(\gamma_1'^2\gamma_3'^2-\gamma_2'^2\gamma_4'^2)(\gamma_1'^2\gamma_4'^2-\gamma_2'^2\gamma_3'^2)} = m, \quad (\mathfrak{p},\mathfrak{p}'=\pm 1) \end{cases}$$

und ausserdem:

$$(12.)\quad \begin{cases} \varphi = p^2+q^2+r^2+s^2+2a(qr+ps)+2b(rp+qs)+2c(pq+rs), \\ m = 4\sqrt{k}, \end{cases}$$

so geht (10.) in:

$$\varphi+4\sqrt{kpqrs} = 0$$

über, woraus, nachdem man rational gemacht hat:

$$(13.)\quad \varphi^2-16kpqrs = 0$$

sich ergiebt. Dies ist aber die bekannte und übliche Gleichungsform der *Kummer*schen Fläche†). Betreffs der Constante k ist noch zu bemerken, dass:

$$(14.)\quad k = a^2+b^2+c^2-2abc-1$$

ist, wie sich aus (11.) und (12.) ergiebt.

---

*) Dieses Journal Bd. 83, S. 238. (I.)

**) A. a. O. p. 19.

***) Vgl. *Borchardt* a. a. O. S. 240. *Rohn* Math. Ann. Bd. 15, S. 323. *Frobenius*, dieses Journ. Bd. 89, S. 205.

†) Monatsberichte der Berliner Akademie 1864. S. 253.

Um aus (11.) die *Borchardt*sche Substitution*) zu erhalten, welche (13.) in (10.) überführt, genügt die Bemerkung, dass für die Grössen ξ'_i eins der oben erwähnten sechzig Quadrupel von Thetafunctionen gesetzt werden kann und zwar in beliebigen Argumenten und beliebigen Moduln geschrieben. Wählt man daher für $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$ bez. Thetafunctionen mit den Indices 5, 34, 12, 0 und giebt ihnen die Argumente: $\frac{1}{2}x_1$, $\frac{1}{2}x_2$ und die Moduln: $\frac{1}{2}\tau_{11}$, $\frac{1}{2}\tau_{12}$, $\frac{1}{2}\tau_{22}$, so erhält man aus (5.) und (11.) unmittelbar:

$$(15.)\quad \begin{cases} s = \xi_1'^2 = \gamma_1\xi_1+\gamma_2\xi_2+\gamma_3\xi_3+\gamma_4\xi_4, \\ p = \xi_2'^2 = \gamma_1\xi_1+\gamma_2\xi_2-\gamma_3\xi_3-\gamma_4\xi_4, \\ q = \xi_3'^2 = \gamma_1\xi_1-\gamma_2\xi_2+\gamma_3\xi_3-\gamma_4\xi_4, \\ r = \xi_4'^2 = \gamma_1\xi_1-\gamma_2\xi_2-\gamma_3\xi_3+\gamma_4\xi_4, \end{cases}$$

wobei die ξ_i und γ_i die in (9.) angegebene Bedeutung haben. Für die Nullwerthe der Argumente gehen die ξ'_i und ξ_i bez. in γ'_i und γ_i über, und daher erhält man aus (15.) nach einigen leichten Umformungen für die in (11.) definirten Constanten a, b, c die folgenden Werthe:

$$(16.)\quad \begin{cases} a = -\dfrac{\gamma_1^2\gamma_2^2+\gamma_3^2\gamma_4^2}{\gamma_1^2\gamma_2^2-\gamma_3^2\gamma_4^2}, \\ b = -\dfrac{\gamma_1^2\gamma_3^2+\gamma_2^2\gamma_4^2}{\gamma_1^2\gamma_3^2-\gamma_2^2\gamma_4^2}, \\ c = -\dfrac{\gamma_1^2\gamma_4^2+\gamma_2^2\gamma_3^2}{\gamma_1^2\gamma_4^2-\gamma_2^2\gamma_3^2}. \end{cases}$$

Die Substitutionen (15.) und (16.), die sich hier in einfacher und naturgemässer Weise ergeben, sind genau diejenigen, von denen *Borchardt* a. a. O. nachgewiesen, dass sie die linke Seite von (13.) in die linke Seite von (10.) transformiren.

§ 3.

Setzt man:

$$(17.)\quad \begin{cases} \mathfrak{p}_1 = 1, & \mathfrak{p}'_1 = 1, \\ \mathfrak{p}_2 = 1, & \mathfrak{p}'_2 = -1, \\ \mathfrak{p}_3 = -1, & \mathfrak{p}'_3 = 1, \\ \mathfrak{p}_4 = -1, & \mathfrak{p}'_4 = -1, \end{cases}$$

ferner:

$$(18.)\quad \begin{cases} p_{i1} = \alpha_1\beta_1+\mathfrak{p}_i\alpha_2\beta_2+\mathfrak{p}'_i\alpha_3\beta_3+\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}'_i\alpha_4\beta_4, \\ p_{i2} = \alpha_1\beta_2+\mathfrak{p}_i\alpha_2\beta_1+\mathfrak{p}'_i\alpha_3\beta_4+\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}'_i\alpha_4\beta_3, \\ p_{i3} = \alpha_1\beta_3+\mathfrak{p}_i\alpha_2\beta_4+\mathfrak{p}'_i\alpha_3\beta_1+\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}'_i\alpha_4\beta_2, \\ p_{i4} = \alpha_1\beta_4+\mathfrak{p}_i\alpha_2\beta_3+\mathfrak{p}'_i\alpha_3\beta_2+\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}'_i\alpha_4\beta_1, \end{cases} \quad (i=1,2,3,4)$$

*) Dieses Journal Bd. 83, S. 243.

und gehen aus p_{if} bez. die Grössen r_{kf}, s_{lf}, t_{mf} (i, k, l, m, $f=1, 2, 3, 4$) hervor, wenn man:

$$\alpha_f,\quad \beta_f,\quad \mathfrak{p}_i,\quad \mathfrak{p}'_i,$$

durch die Grössen:

$$\begin{array}{llll} \gamma_f, & \delta_f, & \mathfrak{p}_k, & \mathfrak{p}'_k, \\ \alpha_f, & \gamma_f, & \mathfrak{p}_l, & \mathfrak{p}'_l, \\ \beta_f, & \delta_f, & \mathfrak{p}_m, & \mathfrak{p}'_m \end{array}$$

ersetzt, so besteht die identische Gleichung:

$$(19.)\qquad \begin{cases} p_{i1}r_{k1}+\mathfrak{p}_m p_{i2}r_{k2}+\mathfrak{p}'_m p_{i3}r_{k3}+\mathfrak{p}_m\mathfrak{p}'_m p_{i4}r_{k4} \\ = s_{l1}t_{m1}+\mathfrak{p}_k s_{l2}t_{m2}+\mathfrak{p}'_k s_{l3}t_{m3}+\mathfrak{p}_k\mathfrak{p}'_k s_{l4}t_{m4}. \end{cases}$$

Hierzu ist jedoch zu bemerken, dass der Index l nicht beliebig gewählt werden darf, sondern dass er für gegebene Werthe von i, k, m, durch

$$\mathfrak{p}_l=\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_k\mathfrak{p}_m,\quad \mathfrak{p}'_l=\mathfrak{p}'_i\mathfrak{p}'_k\mathfrak{p}'_m$$

in Verbindung mit (17.) eindeutig bestimmt ist.

Um die Identität (19.) für die Theorie der Thetafunctionen zu verwenden, lege ich den Grössen α_f, β_f die Werthe als Thetafunctionen aus (4.) bei, und den Grössen γ_f, δ_f diejenigen, welche daraus hervorgehen, wenn man die Argumente x_h, y_h ($h=1, 2$) durch z_h, u_h ersetzt. Alsdann stellen die Grössen p_{if}, r_{kf}, s_{lf}, t_{mf}, wie die Vergleichung von (5.) und (18.) zeigt, Producte zweier Thetafunctionen dar, deren bez. Argumente erhalten werden, wenn man aus den Argumenten von α_f, β_f; γ_f, δ_f; α_f, γ_f; β_f, δ_f; also aus den Grössen: x_h+y_h, x_h-y_h; z_h+u_h, z_h-u_h; x_h+y_h, z_h+u_h; x_h-y_h, z_h-u_h die halben Summen und halben Differenzen bildet. Diese sind bez.

$$x_h,\ y_h;\quad z_h,\ u_h;\quad \tfrac{1}{2}(x_h+y_h+z_h+u_h),\ \tfrac{1}{2}(x_h+y_h-z_h-u_h);$$
$$\tfrac{1}{2}(x_h-y_h+z_h-u_h),\ \tfrac{1}{2}(x_h-y_h-z_h+u_h);$$

bezeichnet man die vier letzten Grössen durch x'_h, y'_h, z'_h, u'_h, so ergiebt sich sofort das folgende

Theorem II.

Sind in den beiden Systemen:

$$\begin{array}{llll} p_{11} & p_{21} & p_{31} & p_{41} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} & p_{42} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{43} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} \end{array}$$

und:

$$
(20.)\quad \left\{\begin{matrix}
\vartheta_5\,(x_1, x_2)\vartheta_5\,(y_1, y_2) & \vartheta_{34}(x_1, x_2)\vartheta_{34}(y_1, y_2) & \vartheta_{12}(x_1, x_2)\vartheta_{12}(y_1, y_2) & \vartheta_0\,(x_1, x_2)\vartheta_0\,(y_1, y_2)\\
\vartheta_{01}(x_1, x_2)\vartheta_{01}(y_1, y_2) & \vartheta_2\,(x_1, x_2)\vartheta_2\,(y_1, y_2) & \vartheta_{02}(x_1, x_2)\vartheta_{02}(y_1, y_2) & \vartheta_1\,(x_1, x_2)\vartheta_1\,(y_1, y_2)\\
\vartheta_4\,(x_1, x_2)\vartheta_4\,(y_1, y_2) & \vartheta_3\,(x_1, x_2)\vartheta_3\,(y_1, y_2) & \vartheta_{03}(x_1, x_2)\vartheta_{03}(y_1, y_2) & \vartheta_{04}(x_1, x_2)\vartheta_{04}(x_1, y_2)\\
\vartheta_{23}(x_1, x_2)\vartheta_{23}(y_1, y_2) & \vartheta_{24}(x_1, x_2)\vartheta_{24}(y_1, y_2) & \vartheta_{13}(x_1, x_2)\vartheta_{13}(y_1, y_2) & \vartheta_{14}(x_1, x_2)\vartheta_{14}(y_1, y_2)
\end{matrix}\right.
$$

die an homologer Stelle stehenden Elemente gleich, also $p_{11} = \vartheta_5(x_1, x_2)\vartheta_5(y_1, y_2)$, $p_{21} = \vartheta_{34}(x_1, x_2)\vartheta_{34}(y_1, y_2), \dots p_{44} = \vartheta_{14}(x_1, x_2)\vartheta_{14}(y_1, y_2)$, ***und gehen aus den Grössen*** p_{if} ***die Grössen*** r_{if}, s_{if}, t_{if} ***hervor, wenn man die Argumente*** x_h, y_h ***bez. durch*** z_h, u_h; x'_h, y'_h; z'_h, u'_h $(h = 1, 2)$ ***ersetzt, wobei:***

$$
(21.)\quad \left\{\begin{aligned}
2x'_h &= x_h + y_h + z_h + u_h,\\
2y'_h &= x_h + y_h - z_h - u_h,\\
2z'_h &= x_h - y_h + z_h - u_h,\\
2u'_h &= x_h - y_h - z_h + u_h,
\end{aligned}\right.
$$

ist und x_h, y_h, z_h, u_h ***vier Paare unabhängiger Argumente bedeuten, so besteht die Identität:***

$$
\begin{aligned}
& p_{i1} r_{k1} + \mathfrak{p}_m p_{i2} r_{k2} + \mathfrak{p}'_m p_{i3} r_{k3} + \mathfrak{p}_m \mathfrak{p}'_m p_{i4} r_{k4}\\
= {} & s_{l1} t_{m1} + \mathfrak{p}_k s_{l2} t_{m2} + \mathfrak{p}'_k s_{l3} t_{m3} + \mathfrak{p}_k \mathfrak{p}'_k s_{l4} t_{m4}.
\end{aligned}
\qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)
$$

Dabei ist für gegebene Werthe von i, k, m der Index l bestimmt, und zwar durch:

$$
\mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_k \mathfrak{p}_m, \quad \mathfrak{p}'_l = \mathfrak{p}'_i \mathfrak{p}'_k \mathfrak{p}'_m
$$

in Verbindung mit:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1 &= 1, & \mathfrak{p}'_1 &= 1,\\
\mathfrak{p}_2 &= 1, & \mathfrak{p}'_2 &= -1,\\
\mathfrak{p}_3 &= -1, & \mathfrak{p}'_3 &= 1,\\
\mathfrak{p}_4 &= -1, & \mathfrak{p}'_4 &= -1.
\end{aligned}
$$

Um die Verwendung dieses Theorems, welches dem *Jacobi*schen Fundamentalsatz*) für die elliptischen Thetafunctionen entspricht, an einem Beispiel zu zeigen, will ich den besonderen Fall $i = k$ behandeln, der für eine weitere Specialisirung diejenigen allgemeinen Thetarelationen ergiebt, welche Herr ***Rosenhain*** zur Grundlage und zum Ausgangspunkte seiner Untersuchungen**) gemacht hat. Setzt man nämlich $i = k$ und beachtet, dass die Producte $\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}'_i \mathfrak{p}'_i$ für jeden Werth von i der positiven Einheit gleich sind, so ergiebt sich $\mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}_m$, $\mathfrak{p}'_l = \mathfrak{p}'_m$ und daher $l = m$. Desshalb folgt aus (19.):

$$
\begin{aligned}
& p_{i1} r_{i1} + \mathfrak{p}_m p_{i2} r_{i2} + \mathfrak{p}'_m p_{i3} r_{i3} + \mathfrak{p}_m \mathfrak{p}'_m p_{i4} r_{i4}\\
= {} & s_{m1} t_{m1} + \mathfrak{p}_i s_{m2} t_{m2} + \mathfrak{p}'_i s_{m3} t_{m3} + \mathfrak{p}_i \mathfrak{p}'_i s_{m4} t_{m4},
\end{aligned}
$$

---

*) *C. G. J. Jacobi*s Gesammelte Werke. Herausgegeben von ***C. W. Borchardt.*** Berlin, G. Reimer 1881. Bd. I, S. 506.

**) A. a. O. S. 413.

woraus für:

$$i=1,\quad m=1;\quad i=1,\quad m=2;\quad i=2,\quad m=1;\quad i=2,\quad m=2;$$

wenn man noch zur Abkürzung:

$$(22.)\quad \begin{cases} p_{11}r_{11}+p_{12}r_{12} = X, & s_{11}t_{11}+s_{12}t_{12} = X', \\ p_{13}r_{13}+p_{14}r_{14} = Y, & s_{13}t_{13}+s_{14}t_{14} = Y', \\ p_{21}r_{21}+p_{22}r_{22} = Z, & s_{21}t_{21}+s_{22}t_{22} = Z', \\ p_{23}r_{23}+p_{24}r_{24} = U, & s_{23}t_{23}+s_{24}t_{24} = U', \end{cases}$$

einführt, die Relationen:

$$(23.)\quad \begin{cases} X+Y = X'+Y', & Z+U = X'-Y', \\ X-Y = Z'+U', & Z-U = Z'-U' \end{cases}$$

oder die daraus sich ergebenden

$$(24.)\quad \begin{cases} 2X' = X+Y+Z+U, \\ 2Y' = X+Y-Z-U, \\ 2Z' = X-Y+Z-U, \\ 2U' = X-Y-Z+U, \end{cases}$$

hervorgehen. Nach Theorem II erhält man aber für die in (22.) definirten Grössen X, Y, Z, U:

$$\begin{aligned} X &= \vartheta_5(x_1, x_2)\vartheta_5(y_1, y_2)\vartheta_5(z_1, z_2)\vartheta_5(u_1, u_2)+\vartheta_{01}(x_1, x_2)\vartheta_{01}(y_1, y_2)\vartheta_{01}(z_1, z_2)\vartheta_{01}(u_1, u_2), \\ Y &= \vartheta_4(x_1, x_2)\vartheta_4(y_1, y_2)\vartheta_4(z_1, z_2)\vartheta_4(u_1, u_2)+\vartheta_{23}(x_1, x_2)\vartheta_{23}(y_1, y_2)\vartheta_{23}(z_1, z_2)\vartheta_{23}(u_1, u_2), \\ Z &= \vartheta_{34}(x_1, x_2)\vartheta_{34}(y_1, y_2)\vartheta_{34}(z_1, z_2)\vartheta_{34}(u_1, u_2)+\vartheta_2(x_1, x_2)\vartheta_2(y_1, y_2)\vartheta_2(z_1, z_2)\vartheta_2(u_1, u_2), \\ U &= \vartheta_3(x_1, x_2)\vartheta_3(y_1, y_2)\vartheta_3(z_1, z_2)\vartheta_3(u_1, u_2)+\vartheta_{24}(x_1, x_2)\vartheta_{24}(y_1, y_2)\vartheta_{24}(z_1, z_2)\vartheta_{24}(u_1, u_2), \end{aligned}$$

und hieraus ergeben sich die Werthe von X', Y', Z', U', wenn man die Argumente x_h, y_h, z_h, u_h durch die in (21.) definirten Grössen x'_h, y'_h, z'_h, u'_h ersetzt. Die Formeln (23.) und (24.), aus welchen in Verbindung mit (21.) hervorgeht, ***dass zwischen den Thetafunctionen*** $X, Y, Z, U; X', Y', Z', U'$ ***die nämlichen Relationen bestehen, wie zwischen ihren Argumenten,*** sind genau die ***Rosenhain***schen Formeln (84.) und (85.), weil die a. a. O. pp. 409, 412 und 413 für $\varphi_{r,s}$, $M^{(r)}$ und $M_1^{(r)}$ gegebenen Definitionen zeigen, dass bei passender Wahl der Argumente und Moduln:

$$\vartheta_5 = \varphi_{3,3},\ \vartheta_{01} = \varphi_{3,2};\ \vartheta_4 = \varphi_{2,3},\ \vartheta_{23} = \varphi_{2,2};\ \vartheta_{34} = \varphi_{0,3},\ \vartheta_2 = \varphi_{0,2};\ i\vartheta_3 = \varphi_{1,3},\ i\vartheta_{24} = \varphi_{1,2}$$

und daher:

$$\begin{aligned} X &= M, & Y &= M', & Z &= M''', & U &= M''; \\ X' &= M_1, & Y' &= M'_1, & Z' &= M'''_1, & U' &= M''_1 \end{aligned}$$

gesetzt werden kann.

Wendet man auf die durch (18.) definirten Grössen p_{ik} die Substitutionen:

$$2\alpha_i = \alpha'_1 + \mathfrak{p}_i\,\alpha'_2 + \mathfrak{p}'_i\,\alpha'_3 + \mathfrak{p}_i\mathfrak{p}'_i\,\alpha'_4,$$
$$2\beta_k = \beta'_1 + \mathfrak{p}_k\beta'_2 + \mathfrak{p}'_k\beta'_3 + \mathfrak{p}_k\mathfrak{p}'_k\beta'_4 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

an und bezeichnet mit p'_{ik} diejenigen Ausdrücke, welche aus p_{ik} hervorgehen, wenn man die α_i, β_k durch α'_i, β'_k ersetzt, so findet man sofort, dass:

$$(25.) \qquad p_{ik} = \varepsilon_{ik}\,p'_{ki}$$

ist. Dabei haben die ε_{ik} die Werthe $+1$ oder -1 und zwar sind:

$$\varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_{24}, \quad \varepsilon_{34}, \quad \varepsilon_{32}, \quad \varepsilon_{42}, \quad \varepsilon_{43}$$

gleich -1, die anderen gleich $+1$. Die Ueberlegung, dass Theorem II auf einer Identität beruht, also sich nicht ändern kann, wenn man überall die p, r, s, t durch p', r', s', t' ersetzt, führt wegen (25.) in Verbindung mit der Bemerkung, dass die den Grössen $p_{23}, p_{24}, p_{34}, p_{32}, p_{42}, p_{43}$ gleichen Thetaproducte aus *ungeraden* Thetafunctionen gebildet sind, zu folgendem

Zusatz zu Theorem II.

In dem System (20.) *kann man die entsprechenden Horizontal- und Vertikalreihen mit einander vertauschen, wenn man nur gleichzeitig den sechs Thetaproducten, welche aus den ungeraden Thetafunctionen gebildet sind, das negative Vorzeichen giebt.*

Das hier erwähnte System von Thetaproducten erhält man auch, wenn man auf (20.) die erste *Henoch*sche Transformation*) anwendet und in dem hervorgehenden System die zweiten und dritten Horizontalen und Vertikalen vertauscht. Ebenso liefern die übrigen *Henoch*schen Transformationen und die Vermehrung der Argumente um halbe Perioden neue Systeme, so dass Theorem II in dieser Erweiterung noch andere, überaus zahlreiche Gruppen von Thetarelationen zur Folge hat und ins besondere die der *Rosenhain*schen Arbeit angefügten Formeltabellen ersetzen kann.

---

*) A. a. O. p. 14.

Berlin, den 10. September 1881.

Ueber die Einführung der complexen Zahlen.

(Von Herrn *R. Baltzer* in Giessen.)

---

1. Die Anfänge der Rechnung mit complexen Zahlen lassen sich zurückverfolgen bis auf *Euklides*, der im zehnten Buch der Elemente die Zahl $x+\sqrt{y}$, von den Uebersetzern ein Binomium (ex binis nominibus) genannt, in die griechische Arithmetik einführte. Von selbst verstanden sich dabei die Beschränkung auf positive y und das geometrische Gewand der Rechnung, bis zur Einführung der Buchstabenrechnung und Auflösung der kubischen Gleichungen. Bei *Leibniz* in den Briefen an Oldenburg 1676/77 bemerkt man bereits die reale Summe von conjugirt-complexen Zahlen, und *Moivre* Miscell. anal. 1730 p. 1 formirt bei $\cos x = a$ und positiven ganzen m

$$2\cos mx = (a+\sqrt{a^2-1})^m+(a-\sqrt{a^2-1})^m.$$

Obgleich von *Newton* die Potenzreihen e^x, $\cos x$, $\sin x$ gegeben waren, so hat doch erst *Euler* den *Moivre*schen Satz in seinem weiteren Umfang erkannt; er hat den imaginären Exponenten eingeführt, und e^{ix} durch $\cos x+i\sin x$ ausgedrückt. Introductio 1748 t. 1 § 138. Mém. de Berlin 1749 p. 265. Vergl. den Brief an *Goldbach* 1741 Dec. 9. Die Darstellung der Producte, Quotienten, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen von complexen Zahlen durch ihre Arcus und Moduln hat neben *Euler* auch *D'Alembert* gegeben Mém. de Berlin 1746 p. 192. Sur les vents n°. 78.

2. Neu und aufregend war die Hypothese, von welcher *Argand* 1806 ausging in seinem Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, wieder aufgelegt 1874. Die complexen Zahlen a, b, welche *Euler* und *D'Alembert* durch

$$a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha}, \quad b = s(\cos\beta + i\sin\beta) = se^{i\beta}$$

ausgedrückt hatten, werden von *Argand* auf einer Ebene *construirt* durch die Vectoren OA, OB von bestimmter Richtung und Länge, $OA = r$ auf dem zweiten Schenkel des Winkels $EOA = \alpha$, während auf dem ersten Schenkel $OE = 1$ ist, u. s. w. Alsdann wird bewiesen, dass die Zahl $a + b$ construirt wird durch die Strecke OC, nachdem AC parallel und gleich mit OB gemacht worden; dass die Zahl ab construirt wird durch die Strecke OD, nachdem das Dreieck OAD dem Dreieck OEB ähnlich gemacht worden, während OE das Zeichen der Zahl 1 ist; dass insbesondere die Zahl ai construirt wird durch die Strecke, welche mit OA einen rechten Winkel bildet und ihr gleich ist. U. s. w., wie das Alles aus den Arcus und Moduln der einzelnen Zahlen und Formeln abgelesen werden kann. *Argand* bemerkt am Schluss seines Essai: „La méthode dont on vient d'exposer l'essai repose sur deux principes de construction, l'un pour la multiplication, l'autre pour l'addition des lignes dirigées; et il a été observé que, ces principes résultant d'inductions qui ne possèdent pas un degré suffisant d'évidence, ils ne pouvaient, quant à présent, être admis que comme des hypothèses.“ In einer späteren Aeusserung (1813 *Gerg.* Ann. t. 4) giebt er den Rath, die lignes en direction zu adoptiren als „signes“ des quantités réelles ou imaginaires, und ihre Verwendung anzusehen als „le simple emploi d'une notation particulière.“

3. Ungeachtet des hiergegen namentlich von *Servois* a. a. O. erhobenen Einspruchs hat *Cauchy* 1847 Nouv. Exerc. t. 4 p. 157 die *Argand*sche quantité géométrique $a + b\sqrt{-1}$ adoptirt als droite donnée en grandeur et en direction. Ebenso *Chasles* Rapport sur les progrès de la géometrie en France 1870 p. 60, der im Bericht über die Nouvelle théorie des imaginaires eine Menge Autoren (nicht *Gauss*) anführt. Die Frage, wie auf einer gegebenen Geraden von einem auf ihr gegebenen Punkte aus die Strecke $a + b\sqrt{-1}$ abzuschneiden sei, wenn b nicht Null, diese Frage wurde vermöge der *Argand*schen Hypothese übersprungen; man gab sogar der Hoffnung Raum, dass es gelingen werde, die algebraisch bestimmten gemeinschaftlichen Punkte von zwei sich nicht schneidenden Linien einer Fläche zu construiren. Vergl. *Hankel* über die complexen Zahlen 1867 § 23. Es wäre unrichtig, *Gauss* zu citiren bei einer neuen Theorie des Imaginären, welche eine reale Bedeutung und constructive Darstellung von complexen Strecken kennt, und Punkte nicht-realer Coordinaten construirt.

4. In der Anzeige seiner zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste hat *Gauss* 1831 (Werke t. 2 p. 169) Gelegenheit genommen, sich zu äussern über die Zahlen, deren die Algebra bedarf. Die erforderlichen Zahlen $a+ib$ bilden eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit, wie die Punkte einer Fläche. Die Punkte der Fläche sind die geeigneten „Repräsentanten der Zahlen"; oder, um jedes Gleichniss zu meiden, die verschiedenen Punkte der Fläche sind die Oerter (Plätze) der verschiedenen Zahlen, — so dass eine bestimmte Veränderung der Zahl veranschaulicht wird durch eine bestimmte Bewegung ihres Punktes auf der Zahlenfläche.

Wenn als Zahlenfläche eine Ebene angenommen wird, wenn auf dieser Ebene den Zahlen 0, 1, i die Punkte O, E, J angewiesen werden, während $OJ = OE = 1$ und der Winkel EOJ recht ist, so gebührt der Zahl $a+ib$ der Punkt A, dessen mit OE, OJ parallele Coordinaten a, b sind, und dessen polare Coordinaten Arcus und Modul der Zahl sind. Dass die Plätze der Zahlen zugleich die Endpunkte der Strecken sind, welche nach *Argand* als Zeichen der Zahlen dienen sollen, und dass die Punkte der Formeln $p+q$, pq aus den Punkten der Zahlen p, q auch construirt werden können, ist ein unwesentlicher Zusatz, dessen *Gauss* nicht besonders erwähnt.

Der *rechte* Winkel EOJ ist hierbei nicht nothwendig, aber am bequemsten; bei einer anderen Annahme würde man die Rechnungen mit einer arbiträren Constante belasten, und erhielte

$$a+ib = r\frac{\sin(\gamma-\varphi)+i\sin\varphi}{\sin\gamma} \quad \text{statt} \quad r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Durch die Bemerkung, dass i mittlere Proportionale ist zwischen 1 und -1, wird über den Winkel EOJ nichts entschieden.

5. Zur Berechnung der Wurzeln von Gleichungen bedurfte man *künstlicher* Zahlen im Gegensatz zu den natürlichen. Um auf die Wurzeln nicht zu verzichten, musste man stufenweise gebrochene, irrationale, negative, imaginäre, complexe Zahlen bilden. Nun hat *Gauss* 1799 bewiesen, dass mit der zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit complexer Zahlen die Bedürfnisse der Algebra gedeckt sind. Also ist in den complexen Zahlen die Formation künstlicher Zahlen vollendet, solange nicht das Bedürfniss einer mehr als zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit von Zahlen (eines Zahlenraumes von mehr als zwei Dimensionen) nachgewiesen wird.

Unter den eingeführten Prädicaten für die künstlichen Zahlen, welche *Gauss* für wenig schicklich erklärte, sind hauptsächlich die Cartesischen

„imaginär und real“ geeignet gewesen, unrichtige Vorstellungen zu veranlassen. Imaginär, d. h. der Imagination, dem Reiche der Gedanken angehörig sind alle Zahlen; real aber können nur benannte Zahlen sein, Mengen von Grösseneinheiten. Punkte, deren Coordinaten complex sind, haben eine algebraische Wirklichheit (Wirksamkeit), insofern sie wirkliche Objecte z. B. Linien zu bestimmen vermögen. Aber sie haben keine geometrische Existenz, weil man auf keiner Geraden eine complexe Strecke abschneiden kann.

6. *Gauss* hat seine Repräsentation der complexen Zahlen durch die Punkte einer Ebene erdacht, bevor durch den vierten Band der *Gergonne*schen Annalen 1813 die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die bis dahin unbeachtet gebliebene kleine Schrift *Argand*s gelenkt worden war. Lange vor der ersten Publication *Cauchy*s 1825 über die auf complexen Wegen einer Variablen gewonnenen Integrale ist *Gauss* auch im Besitz der Grundlagen der neueren Functionentheorie gewesen. Beides erfahren wir unzweifelhaft durch den 1880 auf Veranlassung der Berliner Akademie herausgegebenen Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Bessel*. Am 18. December 1811 schrieb *Gauss* an *Bessel:*

„Zuvörderst würde ich jemand, der eine neue Function in die Analyse einführen will, um eine Erklärung bitten, ob er sie schlechterdings bloss auf reelle Grössen (reelle Werthe des Arguments der Function) angewandt wissen will, und die imaginären Werthe des Arguments gleichsam nur als ein Ueberbein ansieht, oder ob er meinem Grundsatze beitrete, dass man in dem Reiche der Grössen die imaginären $a+bi$ als gleiche Rechte mit den reellen geniessend ansehn müsse. Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist mir eine selbständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingirten Grössen ausserordentlich an Schönheit und Rundung verlieren, und alle Augenblicke Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genöthigt sein würde.“

„Was soll man sich nun bei $\int \varphi x . dx$ für $x = a+bi$ denken? Offenbar, wenn man von klaren Begriffen ausgehn will, muss man annehmen, dass x durch unendlich kleine Incremente (jedes von der Form $\alpha+\beta i$) von demjenigen Werthe, für welchen das Integral 0 sein soll, bis zu $x = a+bi$ übergeht, und dann alle $\varphi x . dx$ summirt. So ist der Sinn voll-

kommen festgesetzt. Nun aber kann der Uebergang auf unendlich viele Arten geschehn: so wie man sich das ganze Reich aller reellen Grössen durch eine unendliche gerade Linie denken kann, so kann man das ganze Reich aller Grössen, reeller und imaginärer Grössen, sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt durch Abscisse gleich a, Ordinate gleich b bestimmt, die Grösse $a+bi$ gleichsam repräsentirt. Der stetige Uebergang von einem Werthe von x zu einem andern $a+bi$ geschieht demnach durch eine Linie, und ist mithin auf unendlich viele Arten möglich. Ich behaupte nun, dass das Integral $\int \varphi x . dx$ nach zwei verschiedenen Uebergängen immer einerlei Werth erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Uebergänge repräsentirenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi x = \infty$ wird. Hierbei ist noch angenommen, dass φx selbst eine einförmige Function von x ist, oder wenigstens für deren Werthe innerhalb jenes ganzen Flächenraumes nur ein System von Werthen ohne Unterbrechung der Stetigkeit angenommen wird."

„Diess ist ein sehr schöner Lehrsatz, dessen eben nicht schweren Beweis ich bei einer schicklichen Gelegenheit geben werde. Er hängt mit schönen andern Wahrheiten die Entwickelungen in Reihen betreffend zusammen. Der Uebergang nach jedem Punkte lässt sich immer ausführen, ohne jemals eine solche Stelle, wo $\varphi x = \infty$ wird, zu berühren. Ich verlange daher, dass man solchen Punkten ausweichen soll, wo offenbar der ursprüngliche Grundbegriff von $\int \varphi x . dx$ seine Klarheit verliert und leicht auf Widersprüche führt."

„Uebrigens ist zugleich hieraus klar, wie eine durch $\int \varphi x . dx$ erzeugte Function für einerlei Werthe von x mehrere Werthe haben kann, indem man nämlich beim Uebergange dahin um einen solchen Punkt, wo $\varphi x = \infty$, entweder gar nicht, oder ein Mal, oder mehrere Male herumgehn kann. Definirt man z. B. $\log x$ durch $\int \frac{1}{x} dx$, von $x = 1$ anzufangen, so kommt man zu $\log x$ entweder ohne den Punkt $x = 0$ einzuschliessen, oder durch ein- oder mehrmaliges Umgehen desselben; jedes Mal kommt dann die Constante $2\pi i$ oder $-2\pi i$ hinzu: so sind die vielfachen Logarithmen von jeder Zahl ganz klar. Kann φx nie für einen endlichen Werth von x unendlich werden, so ist das Integral immer nur eine einförmige Function. Diess ist z. B. der Fall für

$$\varphi x = \frac{e^x - 1}{x},$$

so dass

$$\int \frac{e^x - 1}{x} dx$$

gewiss eine einförmige Function von x ist, deren Werth durch die immer convergirende, also immer einen und nur einen Sinn habende Reihe

$$x + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{18}x^3 + \cdots$$

dargestellt wird.“

Giessen, December 1882.

On the bitangents of a plane quartic.

(By Professor *A. Cayley* at Cambridge.)

Riemann in the paper „Zur Theorie der *Abel*schen Functionen für den Fall $p=3$“, Werke pp. 456—479, has given a remarkably elegant solution of the problem of the bitangents of a plane quartic. But his formulae may be improved by a slight change; viz. we may in his first equation $x+y+z+\xi+\eta+\zeta=0$ introduce coefficients so as to bring this into the same form as the other three equations. It thus appears that, instead of his $3+3$ equations of the forms

$$\frac{x}{1-\beta\gamma}+\frac{y}{1-\gamma\alpha}+\frac{z}{1-\alpha\beta}=0 \quad \text{and} \quad \frac{\xi}{\alpha(\gamma-\beta)}+\frac{\eta}{\beta(\gamma-\alpha)}+\frac{\zeta}{\gamma(\beta-\alpha)}=0$$

respectively, we have 6+6 equations of like forms; but these two systems each of 6 equations are equivalent to each other, so that instead of $6+16+3+3=28$, we have $6+16+6(=6)=28$ equations for the 28 bitangents*). I make another slight change of notation by introducing the single letters f, g, h to denote the reciprocals $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$; and I consider the whole question as follows. The theory is based on the equations

$$\begin{aligned}
a\,x+b\,y+c\,z+f\,\xi+g\,\eta+h\,\zeta &= 0,\\
a_1x+b_1y+c_1z+f_1\xi+g_1\eta+h_1\zeta &= 0,\\
a_2x+b_2y+c_2z+f_2\xi+g_2\eta+h_2\zeta &= 0,\\
a_3x+b_3y+c_3z+f_3\xi+g_3\eta+h_3\zeta &= 0,
\end{aligned}$$

where $af=bg=ch=a_1f_1=\text{etc.}=c_3h_3=1$: and the coefficients $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ are arbitrary. The equations $x=0$, $y=0$, $z=0$ represent any three given lines: and considering ξ, η, ζ to be determined as linear functions of x, y, z by means of the first three equations, then (the coefficients

*) It will appear further on that the equation of each of the last-mentioned 6 bitangents can be expressed in 8 different forms.

$a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ being determined accordingly) the equations $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$ will also represent any three given lines. But observe that if the equation of the first of these lines is $x+my+nz=0$, ξ is not $=$ an arbitrary multiple $\theta(x+my+nz)$ of the linear function $x+my+nz$, but the constant factor θ has a completely determinate value: and the like as regards η and ζ respectively.

The coefficients a_3, b_3, c_3 of the fourth equation are such that this fourth equation is a mere consequence of the other three: viz. we must have

$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda a+\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2, \\ b_3 &= \lambda b+\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2, \\ c_3 &= \lambda c+\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2, \\ f_3 &= \lambda f+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2, \\ g_3 &= \lambda g+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2, \\ h_3 &= \lambda h+\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2, \end{aligned}$$

or what is the same thing, we must have

$$\left\|\begin{matrix} a, & b, & c, & f, & g, & h \\ a_1, & b_1, & c_1, & f_1, & g_1, & h_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & f_2, & g_2, & h_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & f_3, & g_3, & h_3 \end{matrix}\right\| = 0,$$

viz. each of the determinants formed with four columns out of this matrix is equal 0.

Using the equations in $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$, and writing for shortness

$$\begin{aligned} a_1f_2+a_2f_1, \quad a_2f+af_2, \quad af_1+a_1f &= F, F_1, F_2, \\ b_1g_2+b_2g_1, \quad b_2g+bg_2, \quad bg_1+b_1g &= G, G_1, G_2, \\ c_1h_2+c_2h_1, \quad c_2h+ch_2, \quad ch_1+c_1h &= H, H_1, H_2; \end{aligned}$$

then, forming the products a_3f_3, b_3g_3, c_3h_3, we find

$$\begin{aligned} 1-\lambda^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2 &= F\lambda_1\lambda_2+F_1\lambda_2\lambda+F_2\lambda\lambda_1, \\ \text{,,} \quad &= G\lambda_1\lambda_2+G_1\lambda_2\lambda+G_2\lambda\lambda_1, \\ \text{,,} \quad &= H\lambda_1\lambda_2+H_1\lambda_2\lambda+H_2\lambda\lambda_1, \end{aligned}$$

or as these equations may be written

$$1-\lambda^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2 : \lambda_1\lambda_2 : \lambda_2\lambda : \lambda\lambda_1$$

$$= \begin{vmatrix} F, & F_1, & F_2 \\ G, & G_1, & G_2 \\ H, & H_1, & H_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & F_1, & F_2 \\ 1, & G_1, & G_2 \\ 1, & H_1, & H_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & F_2, & F \\ 1, & G_2, & G \\ 1, & H_2, & H \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & F, & F_1 \\ 1, & G, & G_1 \\ 1, & H, & H_1 \end{vmatrix}$$

say for shortness

$$= \Pi : A : A_1 : A_2,$$

and we have thus

$$\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2} = \frac{A_1 A_2}{\Pi A},$$

$$\frac{\lambda_1^2}{1-\lambda^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2} = \frac{A_2 A}{\Pi A_1},$$

$$\frac{\lambda_2^2}{1-\lambda^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2} = \frac{A A_1}{\Pi A_2},$$

and thence

$$\frac{1}{1-\lambda^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2} = \frac{1}{\Pi}\left(\frac{A_1 A_2}{A}+\frac{A_2 A}{A_1}+\frac{A A_1}{A_2}\right),$$

equations which give λ, λ_1, λ_2, and consequently a_3, b_3, c_3, f_3, g_3, h_3 in terms of known quantities, the several expressions depending on the single radical $\sqrt{\frac{1}{\Pi}\left(\frac{A_1 A_2}{A}+\frac{A_2 A}{A_1}+\frac{A A_1}{A_2}\right)}$. Observe that we have rationally

$$\lambda : \lambda_1 : \lambda_2 = \frac{1}{A} : \frac{1}{A_1} : \frac{1}{A_2}.$$

I consider now the quartic curve

$$\sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta} = 0,$$

and I write down the equations of the 28 bitangents, each with its double-theta characteristic as given by ***Riemann***, and also with its duad symbol, derived from ***Hesse***'s method. I assume that these characteristics and duad symbols are properly attached to the several lines: and I insert also the current nos. 1 to 28. The equations are:

Current No.	Duad Symbol	Characteristic	
1	18	111 111	$x = 0,$
2	28	001 011	$y = 0,$
3	38	011 001	$z = 0,$
4	23	010 010	$\xi = 0,$
5	13	100 110	$\eta = 0,$
6	12	110 100	$\zeta = 0,$

Current No.	Duad Symbol	Charac-teristic	
7	48	101 100	$ax+by+cz = 0, \quad f\xi+g\eta+h\zeta = 0,$
8	14	010 011	$f\xi+by+cz = 0, \quad ax+g\eta+h\zeta = 0,$
9	24	100 111	$ax+g\eta+cz = 0, \quad f\xi+by+h\zeta = 0,$
10	34	110 101	$ax+by+h\zeta = 0, \quad f\xi+g\eta+cz = 0,$
11	58	100 101	$a_1x+b_1y+c_1z = 0,$
12	15	011 010	$f_1\xi+b_1y+c_1z = 0,$
13	25	101 110	$a_1x+g_1\eta+c_1z = 0,$
14	35	111 100	$a_1x+b_1y+h_1\zeta = 0,$
15	68	110 010	$a_2x+b_2y+c_2z = 0,$
16	16	001 101	$f_2\xi+b_2y+c_2z = 0,$
17	26	111 001	$a_2x+g_2\eta+c_2z = 0,$
18	36	101 011	$a_2x+b_2y+h_2\zeta = 0,$
19	78	010 110	$a_3x+b_3y+c_3z = 0,$
20	17	101 001	$f_3\xi+b_3y+c_3z = 0,$
21	27	011 101	$a_3x+g_3\eta+c_3z = 0,$
22	37	000 111	$a_3x+b_3y+h_3\zeta = 0,$

Current No.	Duad Symbol	Characteristic	
23	67	100 100	$\dfrac{x}{bc-b_1c_1}+\dfrac{y}{ca-c_1a_1}+\dfrac{z}{ab-a_1b_1}=0,\quad \dfrac{\xi}{g_2h_2-g_3h_3}+\dfrac{\eta}{h_2f_2-h_3f_3}+\dfrac{\zeta}{f_2g_2-f_3g_3}=0,$
			$\dfrac{x}{bc-b_1c_1}+\dfrac{\eta}{bb_1(ca_1-c_1a)}-\dfrac{\zeta}{cc_1(ab_1-a_1b)}=0,\quad \dfrac{\xi}{g_2h_2-g_3h_3}+\dfrac{y}{g_2g_3(h_2f_3-h_3f_2)}-\dfrac{z}{h_2h_3(f_2g_3-f_3g_2)}=0,$
			$\dfrac{-\xi}{aa_1(bc_1-b_1c)}+\dfrac{y}{ca-c_1a_1}+\dfrac{\zeta}{cc_1(ab_1-a_1b)}=0,\quad \dfrac{-x}{f_2f_3(g_2h_3-g_3h_2)}+\dfrac{\eta}{h_2f_2-h_3f_3}+\dfrac{z}{h_2h_3(f_2g_3-f_3g_2)}=0,$
			$\dfrac{\xi}{aa_1(bc_1-b_1c)}-\dfrac{\eta}{bb_1(ca_1-c_1a)}+\dfrac{z}{ab-a_1b_1}=0,\quad \dfrac{x}{f_2f_3(g_2h_3-g_3h_2)}-\dfrac{y}{g_2g_3(h_2f_3-h_3f_2)}+\dfrac{\zeta}{f_2g_2-f_3g_3}=0,$
24	57	110 011	$\dfrac{x}{bc-b_2c_2}+\dfrac{y}{ca-c_2a_2}+\dfrac{z}{ab-a_2b_2}=0,$
25	56	010 111	$\dfrac{x}{bc-b_3c_3}+\dfrac{y}{ca-c_3a_3}+\dfrac{z}{ab-a_3b_3}=0,$
26	45	001 001	$\dfrac{x}{b_2c_2-b_3c_3}+\dfrac{y}{c_2a_2-c_3a_3}+\dfrac{z}{a_2b_2-a_3b_3}=0,$
27	46	011 110	$\dfrac{x}{b_3c_3-b_1c_1}+\dfrac{y}{c_3a_3-c_1a_1}+\dfrac{z}{a_3b_3-a_1b_1}=0,$
28	47	111 010	$\dfrac{x}{b_1c_1-b_2c_2}+\dfrac{y}{c_1a_1-c_2a_2}+\dfrac{z}{a_1b_1-a_2b_2}=0.$

As regards each of the bitangents 7 to 22, the equivalence of the two forms of equation is at once seen by means of the fundamental equations $ax+by+cz+f\xi+g\eta+h\zeta=0$: as regards the remaining bitangents 23 to 28, the equation of each of these is expressible in eight different forms, which are written down in full for the bitangent 23; the equivalence of the eight forms of equation must of course be proved.

I proceed to show that each of the 28 lines is in fact a bitangent to the quartic curve

$$\sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta}\;=\;0,$$

or what is the same thing, that writing this equation in the form

$$\Omega = x^2\xi^2+y^2\eta^2+z^2\zeta^2-2yz\,\eta\zeta-2zx\,\zeta\xi-2xy\,\xi\eta=0,$$

then that by means of any one of these equations Ω becomes a perfect square.

This is obviously the case for each of the equations 1, 2, 3, 4, 5, 6.

For the equations 7, 8, 9, 10, observe that the equation of the quartic may be written:

$$\sqrt{ax f\xi} + \sqrt{by g\eta} + \sqrt{cz h\zeta} = 0,$$

or what is the same thing

$$\Omega = a^2 x^2 . f^2 \xi^2 + \cdots = 0.$$

Hence writing $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ in place of $ax, by, cz, f\xi, g\eta, h\zeta$, so that now $x+y+z+\xi+\eta+\zeta=0$, the equation of the line 7 is expressed in the two equivalent forms $x+y+z=0$, $\xi+\eta+\zeta=0$. We have for Ω its original value

$$\begin{aligned}\Omega &= x^2\xi^2+y^2\eta^2+z^2\zeta^2-2yz\,\eta\zeta-2zx\,\zeta\xi-2xy\,\xi\eta,\\ &= (z\zeta-x\xi-y\eta)^2-4xy\,\xi\eta;\end{aligned}$$

and writing herein $z=-x-y$, $\zeta=-\xi-\eta$, we have $z\zeta-x\xi-y\eta=x\eta+y\xi$ and consequently $\Omega=(x\eta+y\xi)^2-4xy\,\xi\eta$, $=(x\eta-y\xi)^2$, a perfect square. The like proof applies to the equations 8, 9, 10: and then clearly the result applies to the equations 11, 12, 13, 14; 15, 16, 17, 18; 19, 20, 21, 22.

We come now to the equation of the line 23, say this is in the first instance taken to be

$$\frac{x}{bc-b_1c_1}+\frac{y}{ca-c_1a_1}+\frac{z}{ab-a_1b_1} = 0;$$

if from this equation, by means of the two fundamental equations

$$\begin{aligned}a\,x+b\,y+c\,z+f\,\xi+g\,\eta+h\,\zeta &= 0,\\ a_1x+b_1y+c_1z+f_1\xi+g_1\eta+h_1\zeta &= 0\end{aligned}$$

we eliminate first (y, z), secondly (z, x), and thirdly (x, y), it is found that ξ, η, ζ will also disappear in the three cases respectively, and that the resulting equations are

$$\begin{aligned}-\frac{x}{bc-b_1c_1}+\frac{\eta}{bb_1(ca_1-c_1a)}-\frac{\zeta}{cc_1(ab_1-a_1b)} &= 0,\\ -\frac{\xi}{aa_1(bc_1-b_1c)}+\frac{y}{ca-c_1a_1}+\frac{\zeta}{cc_1(ab_1-a_1b)} &= 0,\\ \frac{\xi}{aa_1(bc_1-b_1c)}-\frac{\eta}{bb_1(ca_1-c_1a)}+\frac{\zeta}{ab-a_1b_1} &= 0,\end{aligned}$$

so that each of these is in fact equivalent to the original equation in (x, y, z): and observe that, adding together the three equations, we reproduce the original equation in (x, y, z).

Write for shortness

$$\begin{aligned}P &= bc-b_1c_1, & \alpha &= bc_1-b_1c,\\ Q &= ca-c_1a_1, & \beta &= ca_1-c_1a,\\ R &= ab-a_1b_1, & \gamma &= ab_1-a_1b,\end{aligned}$$

then the equation in (x, y, z) is

$$QRx+RPy+PQz = 0,$$

so that eliminating the (y, z) we find

$$\begin{vmatrix} b, & c, & ax+f\xi+g\eta+h\zeta \\ b_1, & c_1, & a_1x+f_1\xi+g_1\eta+h_1\zeta \\ RP, & PQ, & QRx \end{vmatrix} = 0.$$

In this equation the coefficient of x is

$$\begin{aligned} & (bc_1-b_1c)\,QR+(ca_1-c_1a)\,RP+(ab_1-a_1b)\,PQ, \\ = \;& (bc_1-b_1c)\,\{a^2bc+a_1^2b_1c_1-aa_1(bc_1+b_1c)\} \\ & +(ca_1-c_1a)\,\{ab^2c+a_1b_1^2c_1-bb_1(ca_1+c_1a)\} \\ & +(ab_1-a_1b)\,\{abc^2+a_1b_1c_1^2-cc_1(ab_1+a_1b)\}, \\ = \;& -aa_1(b^2c_1^2-b_1^2c^2)-bb_1(c^2a_1^2-c_1^2a^2)-cc_1(a^2b_1^2-a_1^2b^2), \\ = \;& -(bc_1-b_1c)(ca_1-c_1a)(ab_1-a_1b), \\ = \;& -\alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

The coefficient of ξ is

$$= RP(cf_1-c_1f)-PQ(bf_1-b_1f),$$

which $\left(\text{observing that } cf_1-c_1f, = \frac{c}{a_1}-\frac{c_1}{a} \text{ is } = \frac{1}{aa_1}Q, \text{ and } bf_1-b_1f, = \frac{b}{a_1}-\frac{b_1}{a}, \text{ is } = \frac{1}{aa_1}R\right)$ is $=0$.

The coefficient of η is

$$RP(cg_1-c_1g)-PQ(bg_1-b_1g),$$

which is

$$\begin{aligned} = \;& RP\frac{1}{bb_1}(bc-b_1c_1)-PQ\frac{1}{bb_1}(b^2-b_1^2), \\ = \;& \frac{P}{bb_1}\{(bc-b_1c_1)(ab-a_1b_1)-(b^2-b_1^2)(ca-c_1a_1)\}, \\ = \;& \frac{P}{bb_1}\{b_1^2ca+b^2c_1a_1-bb_1(ac_1+a_1c)\} \\ = \;& -\frac{P}{bb_1}\gamma\alpha; \end{aligned}$$

and similarly the coefficient of ζ is

$$= \frac{P}{cc_1}\alpha\beta.$$

We have thus in x, η, ζ the equation

$$-\alpha\beta\gamma x-\frac{P}{bb_1}\gamma\alpha\eta+\frac{P}{cc_1}\alpha\beta\zeta = 0,$$

or what is the same thing

$$\frac{x}{P} + \frac{\eta}{bb_1\beta} - \frac{\zeta}{cc_1\gamma} = 0$$

and in like manner by the elimination of (z, x) and (x, y) respectively

$$-\frac{\xi}{aa_1\alpha} + \frac{y}{Q} + \frac{\zeta}{cc_1\gamma} = 0,$$

$$\frac{\xi}{aa_1\alpha} - \frac{\eta}{bb_1\beta} + \frac{z}{R} = 0,$$

which are the required three equations.

We have next to show that the line is a bitangent — write for a moment $aa_1\alpha,\ bb_1\beta,\ cc_1\gamma = \lambda,\ \mu,\ \nu$, then the three equations give

$$x,\ y,\ z = P\Big(-\frac{\eta}{\mu}+\frac{\zeta}{\nu}\Big),\quad Q\Big(-\frac{\zeta}{\nu}+\frac{\xi}{\lambda}\Big),\quad R\Big(-\frac{\xi}{\lambda}+\frac{\eta}{\mu}\Big).$$

and we thence have

$$\begin{aligned}
\Omega = {} & P^2\Big(-\frac{\xi\eta}{\mu}+\frac{\zeta\xi}{\nu}\Big)^2 \\
& + Q^2\Big(-\frac{\eta\zeta}{\nu}+\frac{\xi\eta}{\lambda}\Big)^2 \\
& + R^2\Big(-\frac{\zeta\xi}{\lambda}+\frac{\eta\zeta}{\mu}\Big)^2 \\
& - 2QR\Big(-\frac{\eta\zeta}{\nu}+\frac{\xi\eta}{\lambda}\Big)\Big(-\frac{\zeta\xi}{\lambda}+\frac{\eta\zeta}{\mu}\Big) \\
& - 2RP\Big(-\frac{\zeta\xi}{\lambda}+\frac{\eta\zeta}{\mu}\Big)\Big(-\frac{\xi\eta}{\mu}+\frac{\zeta\xi}{\nu}\Big) \\
& - 2PQ\Big(-\frac{\xi\eta}{\mu}+\frac{\zeta\xi}{\nu}\Big)\Big(-\frac{\eta\zeta}{\nu}+\frac{\xi\eta}{\lambda}\Big);
\end{aligned}$$

which, putting further $P\lambda,\ Q\mu,\ R\nu = \mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c}$, becomes

$$\begin{aligned}
\Omega = {} & \frac{\eta^2\zeta^2}{\mu^2\nu^2}(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2 \\
& + \frac{\zeta^2\xi^2}{\nu^2\lambda^2}(\mathrm{c}+\mathrm{a})^2 \\
& + \frac{\xi^2\eta^2}{\lambda^2\mu^2}(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 \\
& + \frac{2\xi^2\eta\zeta}{\lambda^2\mu\nu}\{-\mathrm{a}(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})+\mathrm{bc}\} \\
& + \frac{2\xi\eta^2\zeta}{\lambda\mu^2\nu}\{-\mathrm{b}(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})+\mathrm{ca}\} \\
& + \frac{2\xi\eta\zeta^2}{\lambda\mu\nu^2}\{-\mathrm{c}(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})+\mathrm{ab}\}\cdot
\end{aligned}$$

But here

$$\mathfrak{a} = aa_1(bc_1 - b_1c)(bc - b_1c_1) = aa_1\{(b^2+b_1^2)cc_1 - (c^2+c_1^2)bb_1\},$$
$$\mathfrak{b} = bb_1(ca_1 - c_1a)(ca - c_1a_1) = bb_1\{(c^2+c_1^2)aa_1 - (a^2+a_1^2)cc_1\},$$
$$\mathfrak{c} = cc_1(ab_1 - a_1b)(ab - a_1b_1) = cc_1\{(a^2+a_1^2)bb_1 - (b^2+b_1^2)aa_1\}.$$

Hence

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c} = 0,$$

and we obtain

$$\Omega = \left(\frac{\mathfrak{a}\eta\zeta}{\mu\nu} + \frac{\mathfrak{b}\zeta\xi}{\nu\lambda} + \frac{\mathfrak{c}\xi\eta}{\lambda\mu}\right)^2,$$
$$= \left\{\frac{aa_1\alpha P}{bb_1cc_1\beta\gamma}\eta\zeta + \frac{bb_1\beta Q}{cc_1aa_1\gamma\alpha}\zeta\xi + \frac{cc_1\gamma R}{aa_1bb_1\alpha\beta}\xi\eta\right\}^2,$$
$$= \frac{1}{(aa_1bb_1cc_1\alpha\beta\gamma)^2}(a^2a_1^2\alpha^2P\eta\zeta + b^2b_1^2\beta^2Q\zeta\xi + c^2c_1^2\gamma^2R\xi\eta)^2,$$

a perfect square, and the line 23 is thus a bitangent.

We have next to prove the equivalence of the two equations

$$\frac{x}{bc-b_1c_1} + \frac{y}{ca-c_1a_1} + \frac{z}{ab-a_1b_1} = 0,$$

and

$$\frac{\xi}{g_2h_3-g_3h_2} + \frac{\eta}{h_2f_3-h_3f_2} + \frac{\zeta}{f_2g_3-f_3g_2} = 0.$$

Starting from the former equation written in the form

$$-QRx - RPy - PQz = 0,$$

and combining herewith the three fundamental equations

$$a\,x + b\,y + c\,z + f\,\xi + g\,\eta + h\,\zeta = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1z + f_1\xi + g_1\eta + h_1\zeta = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + f_2\xi + g_2\eta + h_2\zeta = 0,$$

if we eliminate from these the (x, y, z), we obtain the following equation in (ξ, η, ζ)

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & f\xi+g\eta+h\zeta \\ a_1, & b_1, & c_1, & f_1\xi+g_1\eta+h_1\zeta \\ a_2, & b_2, & c_2, & f_2\xi+g_2\eta+h_2\zeta \\ -QR, & -RP, & -PQ & \end{vmatrix} = 0,$$

which, observing that the values of $-QR$, $-RP$, $-PQ$ are

$$-a^2bc-a_1^2b_1c_1+aa_1(bc_1+b_1c),\quad -ab^2c-a_1b_1^2c_1+bb_1(ca_1+c_1a),$$
$$-abc^2-a_1b_1c_1^2+cc_1(ab_1+a_1b),$$

is immediately transformed into

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & f\xi+g\eta+h\zeta \\ a_1, & b_1, & c_1, & f_1\xi+g_1\eta+h_1\zeta \\ a_2, & b_2, & c_2, & f_2\xi+g_2\eta+h_2\zeta \\ aa_1(bc_1+b_1c), & bb_1(ca_1+c_1a), & cc_1(ab_1+a_1b), & \begin{cases} abc(f\xi+g\eta+h\zeta) \\ +a_1b_1c_1(f_1\xi+g_1\eta+h_1\zeta)\end{cases} \end{vmatrix} = 0.$$

Here the coefficient of ξ is

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & f \\ a_1, & b_1, & c_1, & f_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & f_2 \\ aa_1(bc_1+b_1c), & bb_1(ca_1+c_1a), & cc_1(ab_1+a_1b), & abcf+a_1b_1c_1f_1 \end{vmatrix}$$

which is of the form $lf+l_1f_1+l_2f_2$; and we find without difficulty

$$\begin{aligned} l = {} & a\,a_2(bc-b_1c_1)(bc_1-b_1c), && = a\,a_2P\alpha \\ & +b\,b_2(ca-c_1a_1)(ca_1-c_1a) && \;\; +b\,b_2Q\beta \\ & +c\,c_2(ab-a_1b_1)(ab_1-a_1b) && \;\; +c\,c_2R\gamma; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 = {} & -a_1\,a_2(bc-b_1c_1)(bc_1-b_1c), && = -a_1a_2P\alpha \\ & -b_1\,b_2(ca-c_1a_1)(ca_1-c_1a) && \;\; -b_1b_2Q\beta \\ & -c_1\,c_2(ab-a_1b_1)(ab_1-a_1b) && \;\; -c_1c_2R\gamma; \end{aligned}$$

$$l_2 = -(bc_1-b_1c)(ca_1-c_1a)(ab_1-a_1b) = -\alpha\beta\gamma.$$

Hence

$$lf+l_1f_1+l_2f_2 = (af-a_1f_1)a_2P\alpha+(bf-b_1f_1)b_2Q\beta+(cf-c_1f_1)c_2R\gamma-\alpha\beta\gamma f_2,$$

which observing that

$$af-a_1f_1=0,\quad bf-b_1f_1=-\frac{\gamma}{aa_1},\quad cf-c_1f_1=\frac{\beta}{aa_1},$$

becomes

$$= -b_2Q\frac{\beta\gamma}{aa_1}+c_2R\frac{\beta\gamma}{aa_1}-\alpha\beta\gamma f_2,$$

or in the last term writing $f_2=\frac{1}{a_2}$, this is

$$= \frac{\beta\gamma}{aa_1a_2}\{-a_2b_2Q + a_2c_2R - aa_1\alpha\},$$

$$= \frac{\beta\gamma}{aa_1a_2}\{-a_2b_2(ca-c_1a_1) + a_2c_2(ab-a_1b_1) - aa_1(bc_1-b_1c)\},$$

$$= \frac{\beta\gamma}{aa_1a_2}\begin{vmatrix} ab, & ac, & 1 \\ a_1b_1, & a_1c_1, & 1 \\ a_2b_2, & a_2c_2, & 1 \end{vmatrix}, \quad = \beta\gamma\begin{vmatrix} b, & c, & f \\ b_1, & c_1, & f_1 \\ b_2, & c_2, & f_2 \end{vmatrix};$$

viz. representing for shortness the last mentioned determinant by (bcf), the coefficient of ξ is $= \beta\gamma(bcf)$. Similarly the coefficients of η, ζ are equal $\gamma\alpha(cag)$, and $\alpha\beta(abh)$, respectively. Hence, for convenience dividing by $\alpha\beta\gamma$, the original equation

$$\frac{x}{bc-b_1c_1} + \frac{y}{ca-c_1a_1} + \frac{z}{ab-a_1b_1} = 0,$$

expressed in terms of (ξ, η, ζ) becomes

$$\frac{1}{\alpha}(bcf)\xi + \frac{1}{\beta}(cag)\eta + \frac{1}{\gamma}(abh)\zeta = 0,$$

and it is to be shown that this is in fact equivalent to

$$\frac{\xi}{g_2h_2-g_3h_3} + \frac{\eta}{h_2f_2-h_3f_3} + \frac{\zeta}{f_2g_2-f_3g_3} = 0.$$

We ought therefore to have

$$(g_2h_2-g_3h_3)\frac{1}{\alpha}(bcf) = (h_2f_2-h_3f_3)\frac{1}{\beta}(cag) = (f_2g_2-f_3g_3)\frac{1}{\gamma}(abh),$$

and it will be sufficient to prove the first of these equalities, say

$$(g_2h_2-g_3h_3)\beta(bcf) = (h_2f_2-h_3f_3)\alpha(cag).$$

Multiply by c_2c_3 this becomes

$$\begin{aligned} &c_3[g_2\beta(bcf) - \quad f_2\alpha(cag)] \\ &-c_2g_3\beta(bcf) + c_2f_3\alpha(cag) = 0, \end{aligned}$$

viz. this is

$$\begin{aligned} &(\lambda c + \lambda_1c_1 + \lambda_2c_2)[g_2\beta(bcf) - f_2\alpha(cag)] \\ &-(\lambda g + \lambda_1g_1 + \lambda_2g_2)\ c_2\beta(bcf) \\ &+(\lambda f + \lambda_1f_1 + \lambda_2f_2)\ c_2\alpha(cag) = 0. \end{aligned}$$

The term in λ_2 disappears and the equation is

$$\begin{aligned} &\lambda\ [(c\,g_2 - c_2g)\ \beta(bcf) - (c\,f_2 - c_2f)\ \alpha(cag)] \\ &+\lambda_1[(c_1g_2 - c_2g_1)\beta(bcf) - (c_1f_2 - c_2f_1)\alpha(cag)] = 0. \end{aligned}$$

But we have $\lambda:\lambda_1 = \frac{1}{\varDelta}:\frac{1}{\varDelta_1}$, that is $\varDelta\lambda - \varDelta_1\lambda_1 = 0$, or if we write for $\varDelta$ and $\varDelta_1$ their values $(1F_1F_2)$, $(=-(1F_2F_1))$, and $(1F_2F)$ respectively, then the equation connecting λ, λ_1 is

$$\lambda(1F_2F_1)+\lambda_1(1F_2F) = 0,$$

where $(1F_2F_1)$ and $(1F_2F)$ denote the determinants

$$\begin{vmatrix} 1, & af_1+a_1f, & af_2+a_2f \\ 1, & bg_1+b_1g, & bg_2+b_2g \\ 1, & ch_1+c_1h, & ch_2+c_2h \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1, & af_1+a_1f, & a_1f_2+a_2f_1 \\ 1, & bg_1+b_1g, & b_1g_2+b_2g_1 \\ 1, & ch_1+c_1h, & c_1h_2+c_2h_1 \end{vmatrix}.$$

Multiplying by cc_1c_2, the equation may be written

$$\lambda\begin{vmatrix} af, & af_1+a_1f, & af_2+a_2f \\ bg, & bg_1+b_1g, & bg_2+b_2g \\ cc_1c_2, & c_2(c^2+c_1^2), & c_1(c^2+c_2^2) \end{vmatrix} + \lambda_1\begin{vmatrix} a_1f_1, & af_1+a_1f, & a_1f_2+a_2f_1 \\ b_1g_1, & bg_1+b_1g, & b_1g_2+b_2g_1 \\ cc_1c_2, & c_2(c^2+c_1^2), & c(c_1^2+c_2^2) \end{vmatrix} = 0.$$

This should agree with the equation in (λ, λ_1) obtained above, and it can in fact be shown that the coefficients

$$(c\,g_2-c_2g)\,\beta(bcf)-(c\,f_2-c_2f)\,\alpha(cag),$$

and

$$(c_1g_2-c_2g_1)\,\beta(bcf)-(c_1f_2-c_2f_1)\,\alpha(cag)$$

are equal to the two determinants respectively; it will be sufficient to prove one of the two relations, say

$$-(cg_2-c_2g)(ca_1-c_1a)(bcf)+(cf_2-c_2f)(bc_1-b_1c)(cag)$$
$$+\begin{vmatrix} af, & af_1+a_1f, & af_2+a_2f \\ bg, & bg_1+b_1g, & bg_2+b_2g \\ cc_1c_2, & c_2(c^2+c_1^2), & c_1(c^2+c_2^2) \end{vmatrix} = 0;$$

where it will be recollected that (bcf) and (cag) stand for the determinants

$$\begin{vmatrix} b, & c, & f \\ b_1, & c_1, & f_1 \\ b_2, & c_2, & f_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c, & a, & g \\ c_1, & a_1, & g_1 \\ c_2, & a_2, & g_2 \end{vmatrix}$$

respectively: each term is thus of the seventh order in all the letters conjointly, but is quadric in f, f_1, f_2, g, g_1, g_2. Instead of α, β, γ used hitherto to denote bc_1-b_1c, ca_1-c_1a, ab_1-a_1b, it will be convenient to call these α_2, β_2, γ_2, and to consider the complete system of coefficients

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2 = b_1c_2 - b_2c_1,\ b_2c - bc_2,\ bc_1 - b_1c;\ \beta, \beta_1, \beta_2 = c_1a_2 - c_2a_1,\ c_2a - ca_2,\ ca_1 - c_1a;$$
$$\gamma, \gamma_1, \gamma_2 = a_1b_2 - a_2b_1,\ a_2b - ab_2,\ ab_1 - a_1b;$$

and to denote by ∇ the determinant formed with $\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. If we then expand in terms of the products $(f, f_1, f_2)(g, g_1, g_2)$, we find first

$$\begin{aligned}
&-(cg_2 - c_2g)(ca_1 - c_1a)(bcf) + (cf_2 - c_2f)(bc_1 - b_1c)(cag)\\
= &-(cg_2 - c_2g)\beta_2(\alpha f + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) + (cf_2 - c_2 f)\alpha_2(\beta g + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2),\\
= &-\alpha_2\beta + \alpha\beta_2 (= -c_1\nabla) c_2 fg\\
&-\alpha_2\beta_1 c_2 fg_1\\
&+\alpha_1\beta_2 c_2 f_1 g\\
&-\beta_2 \quad (\alpha c + \alpha_2 c_2 = -\alpha_1 c_1) fg_2\\
&-\alpha_2(-\beta c - \beta_2 c_2 = \quad \beta_1 c_1) f_2 g\\
&-\alpha_1\beta_2 c f_1 g_2\\
&+\alpha_2\beta_1 c f_2 g_1
\end{aligned}$$

and next

$$\begin{vmatrix} af, & af_1 + a_1 f, & af_2 + a_2 f\\ bg, & bg_1 + b_1 g, & bg_2 + b_2 g\\ cc_1c_2, & c_2(c^2 + c_1^2), & c_1(c^2 + c_2^2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
= &\ cc_1c_2\gamma + c_2(c^2 + c_1^2)\gamma_1 + c_1(c^2 + c_2^2)\gamma_2 (= c_1 c_2 \nabla + c^2(c_1\gamma_2 + c_2\gamma_1)) fg\\
&+ c_1(\beta_1 c_2 b + c^2 ab) fg_1\\
&+ c_1(\alpha_1 c_2 a - c^2 ab) f_1 g\\
&+ c_2(\beta_2 c_1 b - c^2 ab) fg_2\\
&+ c_2(\alpha_2 c_1 a + c^2 ab) f_2 g\\
&+ c_1 c_2 abc f_1 g_2\\
&- c_1 c_2 abc f_2 g_1.
\end{aligned}$$

Uniting the two parts we ought to have

$$\begin{aligned}
0 = &\ c^2(c_2\gamma_1 + c_1\gamma_2) fg\\
&+ [\beta_1 c_2(c_1 b - \alpha_2) + c_1 c^2 ab] fg_1\\
&+ [\alpha_1 c_2(c_1 a + \beta_2) - c_1 c^2 ab] f_1 g\\
&+ [c_1\beta_2(c_2 b + \alpha_1) - c_2 c^2 ab] fg_2\\
&+ [c_1\alpha_2(c_2 a - \beta_1) + c_2 c^2 ab] f_2 g\\
&+ c(c_1 c_2 ab - \alpha_1\beta_2) f_1 g_2\\
&- c(c_1 c_2 ab - \alpha_2\beta_1) f_2 g_1.
\end{aligned}$$

Substituting for α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, then after a slight reduction it is found that the whole equation divides by c, and omitting this factor, we have

$$
\begin{aligned}
0 = \; & c[(c_2a_2-c_1a_1)b-(c_2b_2-c_1b_1)a]fg \\
& +[\;\; cc_1ab+b_1c_2(c_2a-ca_2) \quad]fg_1 \\
& +[-cc_1ab+a_1c_2(b_2c-bc_2) \quad]f_1g \\
& +[-cc_2ab+c_1b_2(ca_1-c_1a) \quad]fg_2 \\
& +[\;\; cc_2ab+c_1a_2(bc_1-b_1c) \quad]f_2g \\
& +[-c^2a_1b_2+ca\,b_2c_1+bc\,a_1c_2 \quad]f_1g_2 \\
& +[\;\; c^2a_2b_1-bc\,a_2c_1-ca\,b_1c_2 \quad]f_2g_1.
\end{aligned}
$$

Writing here $af=bg=\cdots=1$, the equation becomes

$$
\begin{aligned}
0 = \; & c(c_2a_2-c_1a_1)f-c\,(c_2b_2-c_1b_1)g \\
& +cc_1bg_1+c_2(c_2a-ca_2)f \\
& -cc_1af_1+c_2(b_2c-bc_2)g \\
& -cc_2bg_2+c_1(ca_1-c_1a)f \\
& +cc_2af_2+c_1(bc_1-b_1c)g \\
& -c^2+acc_1f_1+bcc_2g_2 \\
& +c^2-bcc_1g_1-cac_2f_2,
\end{aligned}
$$

where all the terms in f_1, g_1 destroy each other; the equation thus becomes

$$
\begin{aligned}
0 = \; & (\;\; cc_2a_2-cc_1a_1+c_2^2a-cc_2a_2+cc_1a_1-c_1^2a)f \\
& +(-cc_2b_2+cc_1b_1+cc_2b_2-c_2^2b+c_1^2b-cc_1b_1)g
\end{aligned}
$$

that is

$$0 = (c_2^2-c_1^2)af+(-c_2^2+c_1^2)bg.$$

Or again writing $af=bg=1$, we have the identity $0=0$. This completes the proof of the equivalence of the two equations

$$\frac{x}{bc-b_1c_1}+\frac{y}{ca-c_1a_1}+\frac{z}{ab-a_1b_1}=0, \quad \frac{\xi}{g_2h_3-g_3h_2}+\frac{\eta}{h_2f_3-h_3f_2}+\frac{\zeta}{f_2g_3-f_3g_2}=0.$$

We have obviously three new forms derived from the equation in (ξ, η, ζ) in like manner as we had previously three new forms derived from the equation in (x, y, z); the equivalence of the 8 forms to each other is thus shown, and the proof is now complete for each of the 28 bitangents.

Cambridge, 15 Dec. 1882.

In what follows instead of the four equations of the form

$$ax+by+cz+f\xi+g\eta+h\zeta = 0,$$

I take the first equation in *Riemann*'s form with the coefficients unity. The equations thus are

$$\begin{aligned} x+\ y+\ z+\ \xi+\ \eta+\ \zeta &= 0, \\ a\,x+b\,y+c\,z+f\,\xi+g\,\eta+h\,\zeta &= 0, \\ a_1x+b_1y+c_1z+f_1\xi+g_1\eta+h_1\zeta &= 0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+f_2\xi+g_2\eta+h_2\zeta &= 0, \end{aligned}$$

and if we assume

$$a_2 = \lambda+\lambda_1 a+\lambda_2 a_1, \quad \text{etc.}$$

then we have

$$\begin{aligned} 1-\lambda^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2 &= \lambda_1\lambda_2(af_1+a_1f)+\lambda_2\lambda(a_1+f_1)+\lambda\lambda_1(a+f), \\ \text{,,} \quad &= \lambda_1\lambda_2(bg_1+b_1g)+\lambda_2\lambda(b_1+g_1)+\lambda\lambda_1(b+g), \\ \text{,,} \quad &= \lambda_1\lambda_2(ch_1+c_1h)+\lambda_2\lambda(c_1+h_1)+\lambda\lambda_1(c+h), \end{aligned}$$

and consequently

$$\lambda_1\lambda_2 : \lambda_2\lambda : \lambda\lambda_1 = P : Q : R,$$

or say

$$\lambda : \lambda_1 : \lambda_2 = QR : RP : PQ,$$

where

$$P, Q, R = \begin{vmatrix} 1, & a_1+f_1, & a+f \\ 1, & b_1+g_1, & b+g \\ 1, & c_1+h_1, & c+h \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1, & a+f, & af_1+a_1f \\ 1, & b+g, & bg_1+b_1g \\ 1, & c+h, & ch_1+c_1h \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1, & af_1+a_1f, & a_1+f_1 \\ 1, & bg_1+b_1g, & b_1+g_1 \\ 1, & ch_1+c_1h, & c_1+h_1 \end{vmatrix}.$$

Suppose that one of these determinants, to fix the ideas, say Q, is $=0$; we have $\lambda : \lambda_1 : \lambda_2 = 0 : RP : 0$; that is λ and λ_1 each $=0$; and consequently $\lambda_1 = 1$: that is, we have $a_2, b_2, c_2, f_2, g_2, h_2 = a, b, c, f, g, h$, the fourth equation identical with the second, or say the second equation,

$$ax+by+cz+f\xi+g\eta+h\zeta = 0,$$

is a double equation: as just seen, the condition for this is

$$Q = \begin{vmatrix} 1, & a+f, & af_1+a_1f \\ 1, & b+g, & bg_1+b_1g \\ 1, & c+h, & ch_1+c_1h \end{vmatrix} = 0,$$

say this is

$$L(af_1+a_1f)+M(bg_1+b_1g)+N(ch_1+c_1h) = 0,$$

if for shortness

$$L,\ M,\ N\ =\ b+g-c-h,\ c+h-a-f,\ a+f-b-g.$$

A special solution is if $a_1,\ b_1,\ c_1 = a^2,\ b^2,\ c^2$; for then

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ f_1,\ g_1,\ h_1\ =\ a^2,\ b^2,\ c^2,\ f^2,\ g^2,\ h^2;$$

consequently $af_1+a_1f,\ bg_1+b_1g,\ ch_1+c_1h\ =\ a+f,\ b+g,\ c+h$: and the condition in question $Q=0$ is thus satisfied.

It is to be shown that in the general case of the equation $Q=0$, the curve is a nodal quartic having the node at the point

$$x:y:z:\xi:\eta:\zeta\ =\ fL:gM:hN:aL:bM:hN,$$

and that in the special case $a_1,\ b_1,\ c_1 = a^2,\ b^2,\ c^2$ the node is a flecnode, viz. a node which is a point of inflexion on each of its two branches. In the former case the six tangents from the node are

$$\begin{array}{rcl} ax+by+cz=0 & \text{or} & f\xi+g\eta+h\zeta=0,\\ f\xi+by+cz=0 & ,, & ax+g\eta+h\zeta=0,\\ ax+g\eta+cz=0 & ,, & f\xi+by+h\zeta=0,\\ ax+by+h\zeta=0 & ,, & f\xi+g\eta+cz=0,\end{array}$$

$$\frac{x}{1-bc}+\frac{y}{1-ca}+\frac{z}{1-ab}=0,\quad\text{or}\quad \frac{\xi}{gh-g_1h_1}+\frac{\eta}{hf-h_1f_1}+\frac{\zeta}{fg-f_1g_1}=0,$$

$$\frac{x}{bc-b_1c_1}+\frac{y}{ca-c_1a_1}+\frac{z}{ab-a_1b_1}=0,\quad ,,\quad \frac{\xi}{1-gh}+\frac{\eta}{1-hf}+\frac{\zeta}{1-fg}=0.$$

In the latter case the same equations represent the four tangents from the node and the two tangents at the node respectively.

For the proof, we assume that the four lines

$$\begin{aligned} ax+by+cz &= 0,\\ f\xi+by+cz &= 0,\\ ax+g\eta+cz &= 0,\\ ax+by+h\zeta &= 0,\end{aligned}$$

have a common intersection: this gives $ax=f\xi,\ by=g\eta,\ cz=h\zeta$; or say $x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta = fL,\ gM,\ hN,\ aL,\ bM,\ cN$, where for the moment $L,\ M,\ N$ are indeterminate quantities: but substituting these values in the first, second and third equations we find

$$\begin{aligned} (a+f)L+\quad(b+g)M+\quad(c+h)N &= 0,\\ L+\qquad M+\qquad N &= 0,\\ (af_1+a_1f)L+(bg_1+b_1g)M+(ch_1+c_1h)N &= 0,\end{aligned}$$

giving for L, M, N the values $b+g-c-h,\ c+h-a-f,\ a+f-b-g$ already attributed to these letters.

And we see further that the point in question

$$x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta\ =\ fL,\ gM,\ hN,\ aL,\ bM,\ cN$$

is a point on each of the lines

$$\frac{x}{1-bc}+\frac{y}{1-ca}+\frac{z}{1-ab}\ =\ 0,$$

$$\frac{x}{bc-b_1c_1}+\frac{y}{ca-c_1a_1}+\frac{z}{ab-a_1b_1}\ =\ 0.$$

In fact for the first of these lines we have only to verify the equation

$$fL(1-ca)(1-ab)+gM(1-ab)(1-bc)+hN(1-bc)(1-ca)\ =\ 0,$$

that is

$$L(f-b-c+abc)+M(g-c-a+abc)+N(h-a-b+abc)\ =\ 0,$$

viz. this is

$$L(a+f)+M(b+g)+N(c+h)+(-a-b-c+abc)(L+M+N)\ =\ 0,$$

which is right. And similarly for the second line we have to verify that

$$fL(ca-c_1a_1)(ab-a_1b_1)+gM(ab-a_1b_1)(bc-b_1c_1)+hN(bc-b_1c_1)(ca-c_1a_1)\ =\ 0,$$

that is

$$L(abc-bc_1a_1-ca_1b_1+fa_1^2b_1c_1)+\text{etc.}\ =\ 0,$$

or multiplying by $f_1g_1h_1$ this is

$$L(abcf_1g_1h_1-bg_1-ch_1+a_1f)+M(abcf_1g_1h_1-ch_1-af_1+b_1g)+N(abcf_1g_1h_1-af_1-bg_1+c_1h)=0,$$

viz. this is

$$(abcf_1g_1h_1-af_1-bg_1-ch_1)(L+M+N)+(af_1+a_1f)L+(bg_1+b_1g)M+(ch_1+c_1h)N=0.$$

We have thus six of the double tangents meeting at the point

$$x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta\ =\ fL,\ gM,\ hN,\ aL,\ bM,\ cN$$

which implies that this point is a node on the curve: and we at once see that the values satisfy the equation $\sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta}=0$ of the curve; viz. the equation for the values in question becomes $\sqrt{L^2}+\sqrt{M^2}+\sqrt{N^2}=0$, and the rationalised equation is satisfied as containing the factor $L+M+N$ which is $=0$.

But to show *à posteriori* with greater distinctness that the point is in fact a node, observe that the rationalised equation being

$$\Omega\ =\ x^2\xi^2+y^2\eta^2+z^2\zeta^2-2yz\,\eta\zeta-2zx\,\zeta\xi-2xy\,\xi\eta$$

the differential $d\Omega$ is

$$= (xd\xi+\xi dx)(x\xi-y\eta-z\zeta)+(yd\eta+\eta dy)(-x\xi+y\eta-z\zeta)+(zd\zeta+\zeta dz)(-x\xi-y\eta+z\zeta)$$

which for the values in question becomes

$$= L(fd\xi+a\,dx)(L^2-M^2-N^2)+M(g\,d\eta+b\,dy)(-L^2+M^2-N^2)$$
$$+N(h\,d\zeta+c\,dz)(-L^2-M^2+N^2);$$

and this, in virtue of $L+M+N=0$, and therefore $L^2-M^2-N^2=2MN$, etc. is

$$= 2LMN(a\,dx+b\,dy+c\,dz+f\,d\xi+g\,d\eta+h\,d\zeta),$$

which is $=0$ in virtue of the second equation.

Consider now in the special case $a_1,\ b_1,\ c_1 = a^2,\ b^2,\ c^2$, the line

$$\frac{x}{1-bc}+\frac{y}{1-ca}+\frac{z}{1-ab} = 0;$$

combining this with the first and second equations

$$x+\ y+\ z+\ \xi+\ \eta+\ \zeta = 0,$$
$$ax+by+cz+f\xi+g\eta+h\zeta = 0,$$

we deduce

$$x = -F\left(\frac{\eta}{b\beta}-\frac{\zeta}{c\gamma}\right),$$
$$y = -G\left(\frac{\zeta}{c\gamma}-\frac{\xi}{a\alpha}\right),$$
$$z = -H\left(\frac{\xi}{a\alpha}-\frac{\eta}{b\beta}\right),$$

if for shortness $F,\ G,\ H,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma = bc-1,\ ca-1,\ ab-1,\ b-c,\ c-a,\ a-b$. (Observe that we have $L=b+g-c-h=(b-c)\left(1-\frac{1}{bc}\right)$, that is $bcL=\alpha F$; and similarly $caM=\beta G$, and $abN=\gamma H$.). And if for a moment we write further

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ I,\ J,\ K = a\alpha X,\ b\beta Y,\ c\gamma Z,\ a\alpha F,\ b\beta G,\ c\gamma H,$$

values which give

$$I+J+K=(abc-a)(b-c)+(abc-b)(c-a)+(abc-c)(a-b),\ =0,$$

then the equation $\sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta}=0$ of the curve becomes

$$\sqrt{IX(Y-Z)}+\sqrt{JY(Z-X)}+\sqrt{KZ(X-Y)} = 0$$

which in the rationalised form is

$$I^2X^2(Y-Z)^2+J^2Y^2(Z-X)^2+K^2Z^2(X-Y)^2$$
$$-2JKYZ(Z-X)(X-Y)-2KIZX(X-Y)(Y-Z)-2IJXY(Y-Z)(Z-X) = 0,$$

viz. this is

$$Y^2Z^2(J^2+2JK+K^2)+\cdots+2YZ(JK-I^2-IJ-IK)+\cdots = 0,$$

which in virtue of $I+J+K=0$, becomes

$$(IYZ+JZX+KXY)^2 = 0,$$

that is, the quartic is met by the line in question at the intersections (each taken twice) of the line with the conic

$$IYZ+JZX+KXY = 0,$$

that is

$$Fa^2\alpha^2.\eta\zeta+Gb^2\beta^2.\zeta\xi+Hc^2\gamma^2.\xi\eta = 0.$$

But the equation of the line in terms of ξ, η, ζ is

$$\frac{\xi}{gh-g_1h_1}+\frac{\eta}{hf-h_1f_1}+\frac{\zeta}{fg-f_1g_1} = 0,$$

that is

$$\frac{\xi}{gh-g^2h^2}+\frac{\eta}{hf-h^2f^2}+\frac{\zeta}{fg-f^2g^2} = 0,$$

or what is the same thing

$$\frac{b^2c^2\xi}{F}+\frac{c^2a^2\eta}{G}+\frac{a^2b^2\zeta}{H} = 0,$$

and this is clearly a tangent to the conic; viz. the rationalised form of

$$\sqrt{Fa^2\alpha^2.\frac{b^2c^2}{F}}+\sqrt{Gb^2\beta^2.\frac{c^2a^2}{G}}+\sqrt{Hc^2\gamma^2.\frac{a^2b^2}{H}} = 0,$$

that is, $\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\beta^2}+\sqrt{\gamma^2}=0$ is satisfied in virtue of $\alpha+\beta+\gamma=0$. Hence the four intersections coincide together, or the line has with the curve a quadruple intersection at the node, that is, it is a tangent at the node to a branch having an inflexion. And similarly the other line

$$\frac{x}{bc-b^2c^2}+\frac{y}{ca-c^2a^2}+\frac{z}{ab-a^2b^2}=0, \quad \text{that is} \quad \frac{\xi}{1-gh}+\frac{\eta}{1-hf}+\frac{\zeta}{1-fg}=0$$

is a tangent at the node to the other branch having also an inflexion; thus the node is a fleflecnode, and the lines are the tangents to the two branches.

I continue the investigation of the special case $a_1, b_1, c_1 = a^2, b^2, c^2$. The three equations give

$$-(h-f)(f-g)\xi+(a-g)(a-h)x+(b-g)(b-h)y+(c-g)(c-h)z = 0,$$
$$-(f-g)(g-h)\eta+(a-h)(a-f)x+(b-h)(b-f)y+(c-h)(c-f)z = 0,$$
$$-(g-h)(h-f)\zeta+(a-f)(a-g)x+(b-f)(b-g)y+(c-f)(c-g)z = 0,$$

and writing

$A, B, C, F, G, H; \alpha, \beta, \gamma = a^2-1, b^2-1, c^2-1, bc-1, ca-1, ab-1; b-c, c-a, a-b,$

and also

$$u = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}(Ax+By+Cz),$$

then we find

$$\xi = a^2(\alpha F u - x),$$
$$\eta = b^2(\beta G u - y),$$
$$\zeta = c^2(\gamma H u - z),$$

say for shortness these values are

$$\xi, \eta, \zeta = pu - a^2x, \ qu - b^2y, \ ru - c^2z,$$

where

$$p, q, r = a^2\alpha F, \ b^2\beta G, \ c^2\gamma H.$$

We have moreover $f^2\beta\gamma.\xi = \beta\gamma(\alpha Fu - x), = F(Ax+By+Cz)-\beta\gamma x;$ or observing that $GH-AF = -\beta\gamma$ etc. we have

$$f^2\beta\gamma\xi = GHx + BFy + CFz,$$
$$g^2\gamma\alpha\eta = AGx + HFy + CGz,$$
$$h^2\alpha\beta\zeta = AHx + BHy + FGz.$$

It is to be shown that the tangents from the fleflecnode

$$ax+by+cz = 0,$$
$$f\xi+by+cz = 0,$$
$$ax+g\eta+cz = 0,$$
$$ax+by+h\zeta = 0$$

touch the quartic at its intersections with the line $u=0$.

To prove this, for the first line we have $ax+by+cz = 0$, $f\xi+g\eta+h\zeta = 0$, and consequently $x\xi - y\eta - z\zeta = bhy\zeta + cgz\eta$. But the equation of the curve is $\Omega = (x\xi - y\eta - z\zeta)^2 - 4yz\eta\zeta = 0$; and this becomes thus

$$\Omega = (bhy\zeta + cgz\eta)^2 - 4bcgh\, yz\eta\zeta = (bhy\zeta - cgz\eta)^2 = 0;$$

and we thus find that for the four lines respectively, the equations for the points of contact are

$$ax+by+cz = 0, \quad bhy\zeta - cgz\eta = 0,$$
$$f\xi+by+cz = 0, \quad \text{,,}$$
$$ax+g\eta+cz = 0, \quad gh\eta\zeta - bcyz = 0,$$
$$ax+by+h\zeta = 0, \quad \text{,,} \quad .$$

But for the first line we have

$$\begin{aligned} bhy\zeta - cgz\eta &= bhyc^2(\gamma Hu - z) - cgzb^2(\beta Gu - y), \\ &= bcy(\gamma Hu - z) - bcz(\beta Gu - y), \\ &= bcu(\gamma Hy - \beta Gz), \end{aligned}$$

so that the intersections with the conic are given by the equations $\gamma Hy - \beta Gz = 0$, and $u = 0$ respectively: the first of these corresponds to the fleflecnode (in fact we have $\gamma H.gM - \beta G.hN = 0$, viz. multiplying by abc, this is

$$\gamma H.caM - \beta G.abN = 0,$$

which is right), hence the second corresponds to the point of contact, that is the point of contact lies on the line $u = 0$. And similarly for each of the other three tangents the point of contact lies on the same line $u = 0$.

It is clear that writing $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = 0$ for the four tangents from the fleflecnode and $T_5 = 0$, $T_6 = 0$ for the tangents at this point, the equation of the curve must be expressible in the form

$$\lambda u^2 T_5 T_6 + \mu T_1 T_2 T_3 T_4 = 0.$$

The reduction to this form is I think effected by means of the formulae which give ξ, η, ζ in terms of x, y, z, more readily than by means of simpler formulae for ξ, η, ζ in terms of x, y, z and u. We have

$$\Omega = x^2\xi^2 + y^2\eta^2 + z^2\zeta^2 - 2yz\eta\zeta - 2zx\zeta\xi - 2xy\xi\eta = 0,$$

and hence

$$\begin{aligned} \Omega' = f^4g^4h^4\alpha^2\beta^2\gamma^2\Omega = \; & g^4h^4\alpha^2x^2(GHx + BFy + CFz)^2 \\ & + h^4f^4\beta^2y^2(AGx + HFy + CGz)^2 \\ & + f^4g^4\gamma^2z^2(AHx + BHy + FGz)^2 \\ & - 2f^4g^2h^2\beta\gamma\, yz(AGx + HFy + CGz)(AHx + BHy + FGz) \\ & - 2g^4h^2f^2\gamma\alpha\, zx(AHx + BHy + FGz)(GHx + BFy + CFz) \\ & - 2h^4f^2g^2\alpha\beta\, xy(GHx + BFy + CFz)(AGx + HFy + CGz) = 0. \end{aligned}$$

The result after some reductions, and putting for shortness

$$\begin{aligned} h^2\beta CG - g^2\gamma BH &= \mathfrak{A}, \\ f^2\gamma AH - h^2\alpha CF &= \mathfrak{B}, \\ g^2\alpha BF - f^2\beta AG &= \mathfrak{C}, \end{aligned}$$

is

$$\begin{aligned} \Omega' = \; & g^4h^4G^2H^2\alpha^2x^4 + h^4f^4H^2F^2\beta^2y^4 + f^4g^4F^2G^2\gamma^2z^4 \\ & + 2h^2f^4HF\beta.\mathfrak{A}y^3z + 2g^2f^4FG\gamma.\mathfrak{A}yz^3 \\ & + 2f^2g^4FG\gamma.\mathfrak{B}z^3x + 2h^2g^4GH\alpha.\mathfrak{B}zx^3 \\ & + 2g^2h^4GH\alpha.\mathfrak{C}x^3y + 2f^2h^4HF\beta.\mathfrak{C}xy^3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+f^4y^2z^2(\mathfrak{A}^2-2g^2h^2\beta\gamma F^2G\,H)\\
&+g^4z^2x^2(\mathfrak{B}^2-2h^2f^2\gamma\alpha F\,G^2H)\\
&+h^4x^2y^2(\mathfrak{C}^2-2f^2g^2\alpha\beta F\,G\,H^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2g^2h^2x^2y\,z\,\{-\mathfrak{B}\mathfrak{C}-f^2GH(2f^2\beta\gamma A^2+g^2\gamma\alpha BH+h^2\alpha\beta CG)\}\\
&+2h^2f^2x\,y^2z\,\{-\mathfrak{C}\mathfrak{A}-g^2HF(f^2\beta\gamma AH+2g^2\gamma\alpha B^2+h^2\alpha\beta CF)\}\\
&+2f^2g^2x\,y\,z^2\{-\mathfrak{A}\mathfrak{B}-h^2FG(f^2\beta\gamma AG+g^2\gamma\alpha BF+2h^2\alpha\beta C^2)\}=0.
\end{aligned}
$$

We have

$$u = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}(Ax+By+Cz),$$

$$T_5 = \frac{x}{1-bc}+\frac{y}{1-ca}+\frac{z}{1-ab},$$

$$T_6 = \frac{x}{bc-b^2c^2}+\frac{y}{ca-c^2a^2}+\frac{z}{ab-a^2b^2},$$

or as these equations may be written

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta\gamma u &= Ax+By+Cz,\\
-FGHT_5 &= GHx+HFy+FGz,\\
-abcFGHT_6 &= aGHx+bHFy+cFGz;
\end{aligned}
$$

whence

$$abcF^2G^2H^2.\alpha\beta\gamma.uT_5T_6 = (Ax+By+Cz)^2(GHx+HFy+FGz)(aGHx+bHFy+cFGz),$$

where the coefficient of x^4 is $= aA^2G^2H^2$.

Again $T_1 = ax+by+cz$. For T_2 we have

$$
\begin{aligned}
bc\beta\gamma T_2 &= abcf\beta\gamma(f\xi+by+cz)\\
&= abc(GHx+BFy+CFz)+bc\beta\gamma(by+cz),
\end{aligned}
$$

where the coefficient of x is $abcGH$. The coefficient of y is

$$
\begin{aligned}
abc(b^2-1)(bc-1)+b^2c(c-a)(a-b), &= bc(ab^3c-b^2c-a^2b+a),\\
&= bc(ab-1)(b^2c-a),\\
&= bcH(b^2c-a),
\end{aligned}
$$

and similarly the coefficient of z is $= bcG(bc^2-a)$. We have thus the expression for T_2; and forming in like manner the expressions for T_3 and T_4 we may write

$$
\begin{aligned}
T_1 &= ax+by+cz,\\
bc\beta\gamma T_2 &= abcGHx+bcH(b^2c-a)y+bcG(bc^2-a)z,\\
ca\gamma\alpha T_3 &= caH(ca^2-b)x+abcHFy+caF(c^2a-b)z,\\
ab\alpha\beta T_4 &= abG(a^2b-c)x+abF(ab^2-c)y+abcFGz,
\end{aligned}
$$

whence in $a^2b^2c^2\alpha^2\beta^2\gamma^2\,T_1T_2T_3T_4$ the coefficient of x^4 is

$$= a^4b^2c^2.\,G^2H^2.\,(ca^2 - b)(a^2b - c) = a^4b^2c^2.\,G^2H^2\,(bc\,A^2 - a^2\alpha^2).$$

We hence obtain the required identity: viz. this is

$$\begin{aligned} a^6b^6c^6\,\Omega' &= a^3b^3c^3.\,abc\,F^2G^2H^2\,\alpha\beta\gamma.\,u\,T_5T_6 \\ &\quad -1.\qquad a^2b^2c^2\alpha^2\beta^2\gamma^2.\,T_1T_2T_3T_4; \end{aligned}$$

for here comparing the terms in x^4, the factor G^2H^2 divides out, and omitting it, we have

$$a^6b^2c^2\alpha^2 = a^3b^3c^3.\,aA^2 - a^4b^2c^2.(bc\,A^2 - a^2\alpha^2)$$

which is right. If for Ω' we substitute its value, $= f^4g^4h^4\alpha^2\beta^2\gamma^2\,\Omega$, then the identity divides by $a^2b^2c^2\alpha\beta\gamma$, and omitting this factor, we obtain the equation of the curve in the form

$$\alpha\beta\gamma\,\Omega = a^2b^2c^2\,FGH.\,u\,T_5T_6 - \alpha\beta\gamma.\,T_1T_2T_3T_4 = 0;$$

the required form, putting in evidence the two tangents at the fleflecnode, and the four tangents from this point.

Cambridge, 3rd January 1883.

Ueber die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien.

(Von Herrn *H. Dobriner.*)

Im XX. Bande des Journal de l'école polytechnique hat Herr *Ossian Bonnet* *) den Flächen, deren Krümmungslinien plan oder sphärisch sind, eine eingehende Untersuchung gewidmet. Während er jedoch zu einer allgemeingiltigen analytischen Darstellung der Flächen mit einem System ebener Krümmungslinien gelangt, erweisen sich im Falle sphärischer Krümmungscurven die zu integrirenden Differentialgleichungen als so complicirt, dass er die Untersuchung auf Flächen beschränken muss, die noch durch besondere geometrische Eigenschaften ausgezeichnet sind. Er bestimmt die Flächen, die in dem einen System von Krümmungslinien sphärisch und in dem anderen plan oder sphärisch sind: ferner diejenigen, die zwar nur ein System sphärischer Krümmungscurven bezitzen, bezüglich dessen aber die nicht nothwendige Annahme gemacht wird, dass die osculirenden Kugelflächen sämmtlich durch einen Punkt gehen oder die zu bestimmende Fläche unter rechten Winkeln schneiden. — Die übriggelassene Lücke, — die Darstellung der Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien, denen keine besonderen Eigenschaften zukommen, — ist, soweit mir bekannt; bisher unausgefüllt geblieben. — Die Arbeiten der Herren *Serret* **), *Dini* ***) und

*) Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques. Journal de l'école polytechnique Tome XX, Cahier 35. 1853. p. 117—306.

**) Mémoire sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques. Journal de mathématiques pures et appliquées par *J. Liouville* Tome XVIII, 1853.

***) Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche: Memoria della societa italiana delle scienze. Firenze 1869—76.

Enneper *) behandeln gleichfalls nur besondere Fälle des allgemeinen Problems.

Es schien mir daher geboten, diesen Gegenstand wieder aufzunehmen und den Versuch zu machen, die Theorie dieser jedenfalls interessanten Flächenfamilie zum Abschluss zu bringen. Es ist mir gelungen, die in Betracht kommenden Differentialgleichungen zu integriren und die Gleichungen der Flächen mit der nöthigen Anzahl willkürlicher Functionen aufzustellen. Dieselben geben wenig zu geometrischen Interpretationen Anlass. Ich beschränke mich daher an dieser Stelle darauf, ein Theorem anzuführen, das die in Frage stehenden Flächen mit denjenigen in Verbindung bringt, welche durch ein System planer Krümmungslinien ausgezeichnet sind. Die Theorie der letzteren ist in den oben citirten Arbeiten von *Bonnet, Serret* und *Enneper* in erschöpfender Weise gegeben.

Man besitzt in der Transformation mittelst reciproker Radien ein Mittel, um aus Flächen mit planen Krümmungslinien solche mit sphärischen hervorgehen zu lassen. Diese Transformation lässt nämlich die Krümmungslinien einer zu transformirenden Fläche in die der transformirten übergehen, und verwandelt Ebenen und Kugeln wiederum in Kugeln. Unterwirft man ihr also eine Fläche mit planen Krümmungslinien, so werden die entsprechenden Krümmungscurven der transformirten Fläche in Kugeln enthalten sein, und zwar in solchen, die durch den Punkt gehen, von dem aus die Transformation vorgenommen wurde. Und umgekehrt geht eine Fläche mit einem System sphärischer Krümmungslinien, deren osculirende Kugeln einen Punkt gemein haben, in eine Fläche mit planen Krümmungslinien über, wenn man sie von jenem Punkte aus mittelst reciproker Radien transformirt. Wüsste man nun die mit sphärischen Krümmungslinien versehenen Flächen der allgemeinsten Art in Verbindung zu bringen mit den besonderen, bei denen die Osculationskugeln durch einen Punkt gehen, so wäre in letzter Instanz die Theorie unserer Flächen auf die der Flächen mit planen Krümmungslinien zurückgeführt. Eine Beziehung ist thatsächlich vorhanden, und zwar eine von folgender Natur.

---

*) Untersuchungen über die Flächen mit planen oder sphärischen Krümmungslinien: Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. XXIII (1878) p. 45—96. Einen ausführlichen Literaturnachweis findet man in *Salmon-Fiedler,* Analytische Geometrie des Raumes III. Auflage, II. Theil, Note 21, p. XXIX.

Herr *Enneper* *) hat die Bezeichnung Parallelflächen in erweiterter Bedeutung auf solche Flächen angewandt, die, ohne äquidistant zu sein, in entsprechenden Punkten parallele Normalen und parallele Krümmungslinien besitzen. Nennt man solche Flächen, zum Unterschiede von den gemeinhin als Parallelflächen bezeichneten, ähnlich liegende Flächen, so besteht folgendes Theorem:

„Jede Fläche mit einem System sphärischer Krümmungslinien ist ähnlich liegend mit einer unendlichen Anzahl anderer Flächen, deren correspondirendes System von Krümmungslinien gleichfalls auf Kugeln gelegen ist; und unter diesen letzteren befinden sich auch solche, bei denen die osculirenden Kugeln sämmtlich durch einen Punkt gehen".

Dieses Theorem giebt zu einer Classificirung unserer Flächen Anlass. Ich fasse alle ähnlich liegenden Flächen zu einer Gruppe zusammen. Es zeigt sich dann, dass zwischen den Gleichungen der einer Gruppe angehörigen Flächen einfache Beziehungen bestehen, vermöge deren man aus den Gleichungen einer der Flächen mit Leichtigkeit die der übrigen aufstellen kann.

Man gelangt demnach durch Transformation der Flächen mit planen Krümmungslinien zu Repräsentanten der einzelnen Gruppen, die zur Darstellung der übrigen Flächen dienen können.

Wenngleich das Problem auch auf diesem Wege seine vollständige Lösung finden würde, so schlägt doch die vorliegende Arbeit den directen Weg ein, der von den zu integrirenden Differentialgleichungen ausgeht.

I. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der zu bestimmenden Fläche bezeichne ich mit $X_1 X_2 X_3$; sie seien als Functionen von u und v, den Parametern der Krümmungslinien, dargestellt. Die Curven, welche constanten Werthen von v entsprechen, sollen die Krümmungslinien (u) heissen, und die constanten Werthen von u entsprechenden die Krümmungslinien (v).

Ich schreibe das Linienelement in der Form

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 = f^2\,du^2 + g^2\,dv^2$$

*) A. a. O. p. 70—82.

und bezeichne mit ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien, von denen der erste dem durch die Curve (u) gehenden Normalschnitt angehört, der zweite dem durch (v) gehenden Normalschnitt. Wird dann zur Abkürzung

$$\frac{f}{\varrho_1} = P; \quad \frac{g}{\varrho_2} = Q; \quad \frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial v} = M; \quad -\frac{1}{f}\frac{\partial g}{\partial u} = N$$

gesetzt, so bestehen zwischen P, Q, M und N die bekannten Relationen:

$$(1.) \qquad M = \frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial v}, \quad N = -\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}, \quad \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} + PQ = 0;$$

$\frac{M}{f}$ und $\frac{N}{g}$ sind die geodätischen Krümmungen von (u) und (v). Die Richtungscosinus der drei orthogonalen Richtungen, die durch die Flächen-Normale und die beiden Tangenten der Krümmungslinien (u) und (v) bestimmt werden, bezeichne ich mit resp. $z_1 z_2 z_3$, $x_1 x_2 x_3$, $y_1 y_2 y_3$. Ueber die Richtung der Normale sei in der Weise verfügt, dass sie gegen die durch ihren Fusspunkt gehenden und im Sinne der zunehmenden u und v gerichteten Krümmungscurven dieselbe Lage habe wie in einem rechtwinkligen Coordinatensystem die positive z-Axe gegen die positive x-Axe resp. y-Axe. Man hat dann folgende Gleichungen:

$$(2.) \quad \Sigma x_i^2 = 1, \quad \Sigma y_i^2 = 1, \quad \Sigma z_i^2 = 1, \quad \Sigma y_i z_i = 0, \quad \Sigma z_i x_i = 0, \quad \Sigma x_i y_i = 0.$$

$$(3.) \quad \begin{cases} dX_i = f x_i du + g y_i dv, \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial u} = f x_i, \quad \dfrac{\partial X_i}{\partial v} = g y_i, \end{cases}$$

$$(4^a.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = -y_i M - z_i P, \\ \dfrac{\partial y_i}{\partial u} = x_i M, \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial u} = x_i P; \end{cases} \qquad (4^b.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial v} = -y_i N, \\ \dfrac{\partial y_i}{\partial v} = x_i N - z_i Q, \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial v} = y_i Q. \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Die Gleichungen (1.), (2.), (3.) und (4.) gelten noch ohne Beschränkung; sie haben nur zur Voraussetzung, dass die Parametercurven (u) und (v) die Krümmungslinien der Fläche sind*).

Ich mache nun die Annahme, dass die Fläche in einem System von Krümmungslinien sphärisch ist, und zwar komme diese Eigenschaft den

*) Bezüglich ihrer Ableitung verweise ich auf: *O. Bonnet:* Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. Journal de l'école polytechnique Tome XXV, Cahier 42 (1867) p. 32—35. *Codazzi:* Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio: Annali di Matematica Serie II, Tomo II p. 110—119.

Curven (u) zu. Dieselben müssen dann einem bekannten Theoreme *Joachimsthals* zufolge in Kugeln enthalten sein, welche die Fläche unter constanten Winkeln schneiden. Es ist demnach für jede dieser osculirenden Kugeln, abgesehen von den Coordinaten ihres Mittelpunktes $X_1^0 X_2^0 X_3^0$ und ihrem Radius R, auch noch der Winkel σ, den sie mit der Fläche einschliesst, allein abhängig von dem Parameter v. — Es empfiehlt sich, über diesen Parameter in besonderer Weise zu verfügen. — Die Mittelpunkte X_i^0 werden in ihrer Aufeinanderfolge eine Curve bilden, die kurz die Mittelpunktscurve heissen mag. Die Länge derselben, von einem beliebigen Anfangspunkte bis X_i^0 gemessen, wollen wir gleich v setzen. Diese Bestimmung wird nur dann nicht ausführbar sein, wenn die Mittelpunktscurve in einen Punkt zusammenschrumpft, d. h. wenn die osculirenden Kugelflächen concentrisch sind.

Lässt man diesen Ausnahmefall zunächst unberücksichtigt und bezeichnet mit $a_1 a_2 a_3$ die Winkel, welche die Tangente an die Mittelpunktscurve im Punkte X_i^0 mit den Coordinatenaxen einschliesst, mit $b_1 b_2 b_3$ und $c_1 c_2 c_3$ die entsprechenden Winkel für die Haupt- und Binormale, ferner mit ϱ den Krümmungsradius, mit r den Torsionsradius der Curve, so bestehen, v in der erwähnten Bedeutung genommen, folgende Gleichungen:

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{dX_i^0}{dv} = \cos a_i, \\ \dfrac{d\cos a_i}{dv} = \dfrac{1}{\varrho}\cos b_i, \quad \dfrac{d\cos b_i}{dv} = -\dfrac{1}{\varrho}\cos a_i - \dfrac{1}{r}\cos c_i, \quad \dfrac{d\cos c_i}{dv} = \dfrac{1}{r}\cos b_i. \end{cases}$$

Aus dem Umstande, dass der von X_i^0 nach X_i gezogene Radius in den Normalschnitt, der durch die Tangente an die Curve (v) geht, hineinfallen muss, fliessen folgende Ausdrücke für die Coordinaten X_i:

$$(6.)\quad \begin{cases} X_1 - X_1^0 = z_1.R\cos\sigma - y_1.R\sin\sigma, \\ X_2 - X_2^0 = z_2.R\cos\sigma - y_2.R\sin\sigma, \\ X_3 - X_3^0 = z_3.R\cos\sigma - y_3.R\sin\sigma. \end{cases}$$

Hierin sind die Grössen X_i^0, R und σ allein von v abhängig. Differentiirt man also $X_i - X_i^0 = z_i.R\cos\sigma - y_i.R\sin\sigma$ nach u, so findet sich in Rücksicht auf (3.) und (4.):

$$x_i f = x_i(P.R\cos\sigma - M.R\sin\sigma),$$
$$\Sigma x_i^2.f = \Sigma x_i^2(P.R\cos\sigma - M.R\sin\sigma),$$
$$(7.)\quad f = P.R\cos\sigma - M.R\sin\sigma.$$

Die Differentiation nach v hingegen ergiebt, da $\dfrac{dX_i^0}{dv} = \cos a_i$ ist,

$$(8.)\quad \begin{cases} y_i.g-\cos a_i \\ = -x_i.NR\sin\sigma+y_i.\left(QR\cos\sigma-\frac{dR\sin\sigma}{dv}\right)+z_i.\left(\frac{dR\cos\sigma}{dv}+QR\sin\sigma\right). \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichung successive mit $x_i y_i z_i$ und bildet jedesmal die Summe nach i, so gehen Ausdrücke für N, Q und g in $x_i y_i z_i$ hervor:

$$(9.)\quad \begin{cases} R\sin\sigma N = \Sigma_i x_i\cos a_i, \\ R\sin\sigma Q = -\Sigma_i z_i\cos a_i-\frac{dR\cos\sigma}{dv}, \\ g-R\cos\sigma Q = \Sigma_i y_i\cos a_i-\frac{dR\sin\sigma}{dv}. \end{cases} \quad (i=1,2,3)$$

Wenn man in $\frac{\partial f}{\partial v}=gM$ und $\frac{\partial P}{\partial v}=QM$ für f, g und Q ihre Werthe aus (7.) und (9.) substituirt, so erhält man

$$(10.)\quad \begin{cases} \frac{dR\cos\sigma}{dv}P-R\sin\sigma\frac{\partial M}{\partial v} = M\Sigma_i y_i\cos a_i, \\ \frac{dR\cos\sigma}{dv}M+R\sin\sigma\frac{\partial P}{\partial v} = -M\Sigma_i z_i\cos a_i. \end{cases} \quad (i=1,2,3)$$

In (4^b.) sind die Differentialquotienten $\frac{\partial x_i}{\partial v}, \frac{\partial y_i}{\partial v}, \frac{\partial z_i}{\partial v}$ dargestellt als Functionen von $x_i y_i z_i$ und den Grössen N, Q; die Werthe der letzteren haben wir in (9.) kennen gelernt. Durch Combination von (4^b.) und (9.) gelangen wir demnach zu Gleichungen, in welche neben den Richtungscosinus $x_i y_i z_i$ und deren Ableitungen nach v nur noch die Functionen $\cos a_i$, $R\sin\sigma$ und $R\cos\sigma$ eingehen, also Gleichungen, welche zur Bestimmung der ersteren dienen können, wenn die letzteren in ihrer Abhängigkeit von v gegeben sind. Sie lauten nach einer einfachen Reduction

$$(11.)\quad \begin{cases} R\sin\sigma\frac{\partial x_i}{\partial v} = -y_i(x_1\cos a_1+x_2\cos a_2+x_3\cos a_3), \\ R\sin\sigma\frac{\partial y_i}{\partial v} = -y_i(y_1\cos a_1+y_2\cos a_2+y_3\cos a_3)+z_i\frac{dR\cos\sigma}{dv}+\cos a_i, \\ R\sin\sigma\frac{\partial z_i}{\partial v} = -y_i(z_1\cos a_1+z_2\cos a_2+z_3\cos a_3)-y_i\frac{dR\cos\sigma}{dv}. \end{cases} \quad (i=1,2,3)$$

In Verbindung mit ihnen sind noch die Gleichungen

$$(4^a.)\quad \frac{\partial x_i}{\partial u}=-y_iM-z_iP,\quad \frac{\partial y_i}{\partial u}=x_iM,\quad \frac{\partial z_i}{\partial u}=x_iP \qquad (i=1,2,3)$$

in Betracht zu ziehen.

Man überzeugt sich leicht, dass ausser den Gleichungen (11.), (4^a.), (10.) und den Orthogonalitätsbedingungen (2.) keine weiteren Beziehungen

zwischen den Grössen $x_i y_i z_i$, $\cos a_i$, R, σ, M und P vorhanden sind; es fragt sich mithin nur, ob und unter welchen Bedingungen jene gleichzeitig bestehen können. Zunächst ist es evident, dass die Gleichungen (10.) eine Folge der Coexistenz von (11.), (4^a.) und (2.) sind, denn sie resultiren, wenn in den Identitäten

$$\Sigma_i y_i \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right) = \Sigma_i y_i \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right), \quad \Sigma_i z_i \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right) = \Sigma_i z_i \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)$$

links für $\frac{\partial x_i}{\partial v}$ der Werth aus (11.) und für $\frac{\partial x_i}{\partial v}$ rechts der Werth aus (4^a.) substituirt und nach der Differentiation die auftretenden Differentialquotienten wiederum durch die Werthe ersetzt werden, die (11.) und (4^a.) liefern. Es bleibt demnach nur zu untersuchen, wann (11.) und (4^a.), als Differentialgleichungen für $x_i y_i z_i$ angesehen, simultane Lösungen zulassen.

Sieht man vor der Hand $\cos a_i$, $R\sin\sigma$, $R\cos\sigma$ als bekannte Functionen von v an, so giebt (11.) ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zur Bestimmung der $x_i y_i z_i$ ab, aus dessen Integralen man die letzteren als Functionen von v und den Constanten der Integration, für welche neun willkürliche Functionen von u zu setzen sind, wird darstellen können. Zwischen jenen arbiträren Functionen müssen sich aber, wie aus der Form der Differentialgleichungen unmittelbar hervorgeht, sechs Relationen der Art aufstellen lassen, dass die $x_i y_i z_i$ den Orthogonalitätsbedingungen genügen, so dass nur noch drei von einander unabhängige Functionen u_1, u_2, u_3 des Parameters u in die Ausdrücke für die Richtungscosinus $x_i y_i z_i$ eingehen.

Was nun die nach u genommenen Differentialquotienten der letzteren betrifft, so lässt sich leicht zeigen, dass man dieselben stets in folgender Weise ausdrücken kann:

$$(12.)\quad \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial u} = -y_i M - z_i P, \\ \frac{\partial y_i}{\partial u} = \quad x_i M + z_i L, \\ \frac{\partial z_i}{\partial u} = \quad x_i P - y_i L. \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Denn aus den identischen Gleichungen

$$x_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} + x_3 \frac{\partial x_3}{\partial u} = 0, \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0, \quad x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0$$

geht hervor, dass sich zwei Factoren M und P der Art bestimmen lassen, dass

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = -My_i - Pz_i$$

eine für jeden Index i identische Gleichung ist. In analoger Weise verificirt man die Relationen

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = x_i M' + z_i L, \quad \frac{\partial z_i}{\partial u} = x_i P' - y_i L',$$

mit Rücksicht auf welche die Gleichungen

$$\Sigma x_i \frac{\partial y_i}{\partial u} + \Sigma y_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \quad \Sigma y_i \frac{\partial z_i}{\partial u} + \Sigma z_i \frac{\partial y_i}{\partial u} = 0, \quad \Sigma z_i \frac{\partial x_i}{\partial u} + \Sigma x_i \frac{\partial z_i}{\partial u} = 0$$

die Beziehungen

$$M' - M = 0, \quad L - L' = 0, \quad P' - P = 0$$

ergeben, in denen die Bestätigung von (12.) enthalten ist. Vergleicht man (12.) mit (4^a.), so erhellt, dass

$$L = 0$$

die gesuchte Bedingung für das gleichzeitige Bestehen von (11.) und (4^a.) ist. Es ist nun

$$L = \Sigma z_i \frac{\partial y_i}{\partial u},$$

folglich (11.)

$$R \sin\sigma \frac{\partial L}{\partial v} = R \sin\sigma \Big(\Sigma \frac{\partial z_i}{\partial v} \frac{\partial y_i}{\partial u} + \Sigma z_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v} \Big) = -\Sigma z_i \cos a_i \Sigma y_i \frac{\partial y_i}{\partial u}$$

$$-\frac{dR\cos\sigma}{dv} \Sigma y_i \frac{\partial y_i}{\partial u} - \Sigma y_i \cos a_i \Sigma z_i \frac{\partial y_i}{\partial u} - \Sigma z_i y_i \Sigma \frac{\partial y_i}{\partial u} \cos a_i + \frac{dR\cos\sigma}{dv} \Sigma z_i \frac{\partial z_i}{\partial u},$$

oder wegen

$$\Sigma y_i \frac{\partial y_i}{\partial u} = 0, \quad \Sigma z_i y_i = 0, \quad \Sigma z_i \frac{\partial z_i}{\partial u} = 0,$$

$$R \sin\sigma \frac{\partial L}{\partial v} = -\Sigma y_i \cos a_i \Sigma z_i \frac{\partial y_i}{\partial u} = -\Sigma y_i \cos a_i L,$$

$$\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial v} = -\frac{\Sigma y_i \cos a_i}{R \sin\sigma}$$

und integrirt

$$L = U e^{-\int \frac{dv \Sigma y_i \cos a_i}{R \sin\sigma}} = U . F(u_1 u_2 u_3 v),$$

wo U allein von u abhängt, und die Function F nur $u_1 u_2 u_3$ und nicht deren Differentialquotienten enthält. Man hat also identisch

$$L = \Sigma z_i \frac{\partial y_i}{\partial u} = \frac{du_1}{du} \Sigma z_i \frac{\partial y_i}{\partial u_1} + \frac{du_2}{du} \Sigma z_i \frac{\partial y_i}{\partial u_2} + \frac{du_3}{du} \Sigma z_i \frac{\partial y_i}{\partial u_3} = U . F(u_1 u_2 u_3 v).$$

Da nun die linke Seite die Differentialquotienten $\frac{du_i}{du}$ in linearer Verbindung

enthält, und dieselben in F nicht vorkommen, so muss

$$U = m_1 \frac{du_1}{du} + m_2 \frac{du_2}{du} + m_3 \frac{du_3}{du}$$

sein, wo $m_1 m_2 m_3$ nur von $u_1 u_2 u_3$ abhängen, und mithin

$$L = \left(m_1 \frac{du_1}{du} + m_2 \frac{du_2}{du} + m_3 \frac{du_3}{du}\right) e^{-\int \frac{dv \Sigma y_i \cos a_i}{R \sin \sigma}}.$$

Ist $\int \frac{dv \Sigma y_i \cos a_i}{R \sin \sigma}$ nicht ∞, so verschwindet L nur dann, wenn

$$(13.) \qquad m_1 \frac{du_1}{du} + m_2 \frac{du_2}{du} + m_3 \frac{du_3}{du} = 0$$

ist.

Der Fall $\int \frac{dv \Sigma y_i \cos a_i}{R \sin \sigma} = \infty$, $\sin \sigma = 0$ bietet wenig Interesse. Er führt auf die Enveloppe einer Kugel mit veränderlichem Halbmesser, deren Mittelpunkt sich längs einer beliebigen Raumcurve bewegt. Das eine System von Krümmungslinien der Enveloppe besteht aus Kreisen, welche auf den erzeugenden Kugeln liegen. Die letzteren berühren die Fläche; daher ist $\sigma = 0$.

Wir sehen also, dass im Allgemeinen die in (11.) vorkommenden Functionen von v keiner Beschränkung unterliegen, dass dagegen die bei der Integration auftretenden Functionen von u nicht von einander unabhängig sind, sondern einer Gleichung von der Form (13.) zu genügen haben.

Geometrisch besagt dieses Resultat, dass stets eine Fläche mit einem System sphärischer Krümmungslinien bestimmbar ist, für welche eine vorgeschriebene Curve Mittelpunktscurve ist, und bei der sich der Radius der osculirenden Kugel, sowie der Winkel, welchen die letztere mit der Fläche macht, nach einem gegebenen Gesetz mit der Lage des Centrums auf jener Curve ändern.

Im Ganzen ist die Familie der Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien durch Gleichungen charakterisirt, welche sechs willkürliche Functionen enthalten; von diesen hängen vier nur von dem Parameter der sphärischen Krümmungslinien, zwei nur von dem der nicht sphärischen ab *). Die Stelle der ersteren sollen in unserer Behandlungsweise zunächst die zwei Functionen vertreten, die die Gestalt der Mittelpunktscurve bedingen, nebst den beiden R und σ, mit dem Vorbehalt, durch

*) Eine der letzteren kann, sofern sie keine Constante ist, gleich u gesetzt werden.

arbiträre Functionen von anderer geometrischer Bedeutung ersetzt zu werden, falls es sich im Laufe der Untersuchung als vortheilhaft erweisen sollte.

Der Weg, den diese nun einzuschlagen hat, ist schon durch das Vorstehende gekennzeichnet. Wir werden die Integration der Gleichungen (11.) versuchen, ohne über die Functionen $\cos a_i$, R und σ specialisirende Annahmen zu machen, und, wenn die Integralgleichungen mit der nöthigen Anzahl willkürlicher Functionen aufgestellt sind, die Gleichung (13.) aufsuchen, welcher diese zu genügen haben.

Zuvor will ich jedoch die in der Einleitung hervorgehobenen Sätze über ähnlich liegende Flächen behandeln. Diese Bezeichnung sollte den Flächen beigelegt werden, die sich in eine Lage zu einander bringen lassen, in der die Krümmungslinien und Normalen entsprechender Punkte parallel laufen.

Wenn von zwei derartigen Flächen die eine plane Krümmungslinien besitzt, so müssen die bezüglichen Linien der zweiten gleichfalls plan sein. Sphärischen Linien dagegen brauchen nicht nothwendig wiederum sphärische zu entsprechen. Es knüpft sich an diese Ueberlegung die Frage, ob es eine zu einer Fläche mit einem System sphärischer Krümmungslinien ähnlich liegende Fläche giebt, welche gleichfalls in dem correspondirenden Systeme sphärisch ist, und im bejahenden Falle, welche Beziehungen zwischen den beiden bestehen. Auf eine erschöpfende Behandlung dieses Themas an dieser Stelle verzichtend, will ich nur aus den Differentialgleichungen (11.) die Existenz einer Flächenklasse, die sich aus ähnlich liegenden Flächen zusammensetzt, nachweisen, wobei es dahingestellt bleibe, ob nicht unter anderen als den sich ergebenden Bedingungen Flächen mit sphärischen Krümmungslinien in der besprochenen Weise mit einander verbunden sein könnten *).

Die Gleichungen (11.) bleiben ungeändert, wenn man gleichzeitig vertauscht

$$dv, \qquad R\sin\sigma, \qquad R\cos\sigma, \qquad \cos a_i$$

mit

$$dv' = \lambda dv, \quad R'\sin\sigma' = \lambda R\sin\sigma, \quad R'\cos\sigma' = \int \frac{dR\cos\sigma}{dv}\lambda dv, \quad \cos a_i' = \cos a_i,$$

wo λ eine beliebige Function von v ist.

---

*) Wenn die Forderung aufrecht erhalten wird, dass die ähnlich liegenden Flächen in den *sphärischen* Krümmungslinien correspondiren, und dass diese nicht zugleich auch plan, also Kreise seien, so sind in der That die gefundenen Bedingungen nicht bloss hinreichend sondern auch nothwendig.

Es besteht also zwischen der Flächenklasse mit den Elementen v, R, σ, a_i und der Klasse mit den Elementen v', R', σ', a'_i die Beziehung, dass es zu jeder Fläche der ersten eine der zweiten giebt, mit der sie die Werthe von $x_i y_i z_i$ gemein hat. Und dieses besagt nichts anderes, als dass die Krümmungslinien und Normalen beider Flächen in correspondirenden Punkten parallel sind, wenn die Coordinatensysteme, auf welche die Richtungscosinus $x_i y_i z_i$ bezogen sind, in eins zusammenfallen.

Jene Vertauschungen bedeuten aber geometrisch eine Aenderung der Curve, auf der die Centra der osculirenden Kugeln der zu bestimmenden Fläche liegen sollen, und der Gesetze, nach welchen die Radien der ersteren und die Winkel, welche sie mit der Fläche machen, sich ändern. Die Coordinaten X_i^0 eines Punktes der Mittelpunktscurve gehen durch die Vertauschungen über in

$$X_i^{0\prime} = \int dv \,.\, \lambda \cos a_i = \int \lambda \, dX_i^0,$$

woraus erhellt, dass die transformirte Curve der ursprünglichen parallel ist. Die Krümmungs- und Torsionsradien stehen in beiden Curven in demselben Verhältniss zu einander; es ist nämlich

$$\varrho' = \varrho \,.\, \lambda, \quad r' = r \,.\, \lambda.$$

Bezeichnen wir mit A eine Fläche, der die ursprüngliche Curve und die Functionen R, σ angehören, mit B eine Fläche, welcher die transformirte Curve und die Functionen R', σ' zukommen, so können wir folgendes Theorem aussprechen:

„Jeder Fläche A entspricht eine Fläche B, und jeder Fläche B eine Fläche A von der Eigenschaft, dass, wenn die beiden Flächen sich in der geeigneten Lage befinden, die Krümmungslinien der einen den Krümmungslinien der anderen parallel sind.“

Theilen wir alle ähnlich liegenden Flächen einer Gruppe zu, so zeigt es sich, dass man, wenn eine specielle Fläche einer Gruppe bekannt ist, mit Leichtigkeit für die übrigen Flächen derselben die Gleichungen aufstellen kann. Man braucht nämlich nur, wenn die Gleichungen

$$X_i - X_i^0 = z_i R \cos \sigma - y_i R \sin \sigma$$

die erstere charakterisiren, darin X_i^0, $R \cos \sigma$, $R \sin \sigma$ durch resp.

$$X_i^{0\prime} = \int \lambda \, dX_i^0, \quad R' \cos \sigma' = \int \lambda \, dR \cos \sigma, \quad R' \sin \sigma' = \lambda R \sin \sigma$$

zu ersetzen und für λ eine willkürliche Function von v zu wählen, um die analytische Darstellung der Gruppe in der Form

$$X_i' - \int \lambda dX_i'' = z_i . \int \lambda dR \cos\sigma - y_i . \lambda R \sin\sigma$$

zu erhalten.

Dieser Umstand ist für die Theorie unserer Flächen von grosser Wichtigkeit; er giebt uns die Berechtigung, die Allgemeinheit des Problems einzuschränken und nur die Bestimmung je einer, im übrigen beliebigen Fläche einer Gruppe zu verlangen. Damit ist der Vortheil erlangt, dass wir uns, wenn sich in jeder Gruppe Flächen von besonderen, die Untersuchung vereinfachenden Eigenschaften vorfinden, nur mit diesen zu beschäftigen brauchen.

Nun lässt sich zeigen,

dass jede Gruppe der Flächen mit sphärischen Krümmungslinien auch solche enthält, bei denen die Osculations-Kugeln sämmtlich durch einen Punkt gehen.

Dazu ist nur der Nachweis erforderlich, dass die Function λ stets so bestimmt werden kann, dass

$$\Sigma X_i''^2 = R'^2 = (R' \sin\sigma')^2 + (R' \cos\sigma')^2$$

ist, vorausgesetzt, dass der Coordinatenanfangspunkt der den osculirenden Kugelflächen gemeinsame Punkt sein soll.

Setzt man

$$(14.) \quad \begin{cases} \Sigma X_i'' \cos a_i = \mathfrak{A}, \quad \Sigma X_i'' \cos b_i = \mathfrak{B}, \quad \Sigma X_i'' \cos c_i = \mathfrak{C}, \\ R' \sin\sigma' = \lambda R \sin\sigma = \mathfrak{D}, \quad R' \cos\sigma' = \int \frac{dR \cos\sigma}{dv} \lambda\, dv = \mathfrak{E}, \end{cases}$$

so erhält man durch Differentiation nach v, da $X_i'' = \int \lambda \cos a_i dv$,

$$(15.) \quad \begin{cases} R \sin\sigma \dfrac{d\mathfrak{A}}{dv} = \dfrac{R \sin\sigma}{\varrho} \mathfrak{B} + \mathfrak{D}, \\ R \sin\sigma \dfrac{d\mathfrak{B}}{dv} = -\dfrac{R \sin\sigma}{\varrho} \mathfrak{A} - \dfrac{R \sin\sigma}{r} \mathfrak{C}, \\ R \sin\sigma \dfrac{d\mathfrak{C}}{dv} = \dfrac{R \sin\sigma}{r} \mathfrak{B}, \\ R \sin \dfrac{d\mathfrak{D}}{dv} = -\dfrac{dR \cos\sigma}{dv} \mathfrak{E} + \mathfrak{A}, \\ R \sin \dfrac{d\mathfrak{E}}{dv} = +\dfrac{dR \cos\sigma}{dv} \mathfrak{D}, \\ \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 - \mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E}^2 = 0. \end{cases}$$

Dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen muss sich stets integriren lassen, wie auch immer die Functionen R, σ, ϱ, r beschaffen sein mögen.

Damit ist unsere Behauptung gerechtfertigt. Andererseits ist aber bekannt, dass jede Fläche mit sphärischen Krümmungslinien, bei der die osculirenden Kugeln sämmtlich durch einen Punkt gehen, durch Transformation mittelst reciproker Radien aus einer Fläche mit einem System ebener Krümmungslinien hervorgeht.

Da wir nun, wie oben hervorgehoben wurde, wenn diese speciellen Flächen bekannt sind, auch die Gleichungen der Flächen allgemeiner Art herzuleiten wissen, so ist unser Problem auf das bereits gelöste zurückgeführt, welches die Flächen mit ebenen Krümmungslinien zum Gegenstand hat, und man würde auch die analytische Darstellung für die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien finden, wenn man die obigen geometrischen Andeutungen mittelst der Analysis verfolgte. Im Folgenden wird jedoch der directe Weg, der von der Integration der Differentialgleichungen (11.) ausgeht, eingeschlagen.

II. Der allgemeine Fall.

Die Gleichungen (11.), (4^a.) und (6.) sollen zunächst in eine für die Behandlung bequemere Form gebracht werden.

Setzt man

$$(16.)\quad \begin{cases} \xi_1 = \Sigma x_i \cos a_i, & \eta_1 = \Sigma y_i \cos a_i, & \zeta_1 = \Sigma z_i \cos a_i, \\ \xi_2 = \Sigma x_i \cos b_i, & \eta_2 = \Sigma y_i \cos b_i, & \zeta_2 = \Sigma z_i \cos b_i, \\ \xi_3 = \Sigma x_i \cos c_i, & \eta_3 = \Sigma y_i \cos c_i, & \zeta_3 = \Sigma z_i \cos c_i, \end{cases}$$

und führt die abkürzenden Bezeichnungen

$$(17.)\quad \frac{1}{p} = \frac{1}{R\sin\sigma}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{R\sin\sigma}\,\frac{dR\cos\sigma}{dv}$$

ein, so treten an die Stelle der erwähnten Gleichungssysteme folgende andere:

$$(18.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = -\frac{1}{p}\eta_1\xi_1 + \frac{1}{\varrho}\xi_2, & \frac{\partial \eta_1}{\partial v} = -\frac{1}{p}(\eta_1^2-1) + \frac{1}{q}\zeta_1 + \frac{1}{\varrho}\eta_2, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial v} = -\frac{1}{p}\eta_2\xi_1 - \frac{1}{\varrho}\xi_1 - \frac{1}{r}\xi_3, & \frac{\partial \eta_2}{\partial v} = -\frac{1}{p}\eta_2\eta_1 + \frac{1}{q}\zeta_2 - \frac{1}{\varrho}\eta_1 - \frac{1}{r}\eta_3, \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial v} = -\frac{1}{p}\eta_3\xi_1 + \frac{1}{r}\xi_2, & \frac{\partial \eta_3}{\partial v} = -\frac{1}{p}\eta_3\eta_1 + \frac{1}{q}\zeta_3 + \frac{1}{r}\eta_2, \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} = -\frac{1}{p}\eta_1\zeta_1 - \frac{1}{q}\eta_1 + \frac{1}{\varrho}\zeta_2, & \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial v} = -\frac{1}{p}\eta_2\zeta_1 - \frac{1}{q}\eta_2 - \frac{1}{\varrho}\zeta_1 - \frac{1}{r}\zeta_3, & \\ \frac{\partial \zeta_3}{\partial v} = -\frac{1}{p}\eta_3\zeta_1 - \frac{1}{q}\eta_3 + \frac{1}{r}\zeta_2, & \end{cases}$$

$$(19.)\qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = -M\eta_i - P\zeta_i,\quad \frac{\partial \eta_i}{\partial u} = M\xi_i,\quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial u} = P\xi_i,$$

$$(20.)\qquad \begin{cases} \Sigma_i(X_i - X_i^{(1)})\cos a_i = \zeta_1 . R\cos\sigma - \eta_1 . R\sin\sigma, \\ \Sigma_i(X_i - X_i^{(1)})\cos b_i = \zeta_2 . R\cos\sigma - \eta_2 . R\sin\sigma, \\ \Sigma_i(X_i - X_i^{(1)})\cos c_i = \zeta_3 . R\cos\sigma - \eta_3 . R\sin\sigma. \end{cases} \qquad (i=1,2,3)$$

Die Integration der Gleichungen (18.) soll nun unsere Hauptaufgabe sein.

Ich multiplicire $\xi_1\xi_2\xi_3$ der Reihe nach mit drei noch näher zu bestimmenden Functionen α, β, γ von v und differentiire die Summe

$$x = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma\xi_3$$

nach v:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{p}\xi_1(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3) + \xi_1\Big(\frac{d\alpha}{dv} - \frac{\beta}{\varrho}\Big) + \xi_2\Big(\frac{d\beta}{dv} + \frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\gamma}{r}\Big) + \xi_3\Big(\frac{d\gamma}{dv} - \frac{\beta}{r}\Big).$$

Setzt man

$$\frac{d\alpha}{dv} - \frac{\beta}{\varrho} = \frac{\delta}{p} \quad\text{und}\quad \alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3 - \delta = y,$$

so hat man

$$(I.)\qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{p}\xi_1 y + \xi_2\Big(\frac{d\beta}{dv} + \frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\gamma}{r}\Big) + \xi_3\Big(\frac{d\gamma}{dv} - \frac{\beta}{r}\Big).$$

Für den Differentialquotienten von y nach v findet sich:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{p}\eta_1(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3) + \frac{\alpha}{p} + \eta_1\Big(\frac{d\alpha}{dv} - \frac{\beta}{\varrho}\Big) + \eta_2\Big(\frac{d\beta}{dv} + \frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\gamma}{r}\Big)$$
$$+\eta_3\Big(\frac{d\gamma}{dv} - \frac{\beta}{r}\Big) + \frac{1}{q}(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2 + \gamma\zeta_3) - \frac{d\delta}{dv}$$
$$= -\frac{1}{p}\eta_1 y + \frac{1}{q}(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2 + \gamma\zeta_3) + \frac{\alpha}{p} - \frac{d\delta}{dv} + \eta_2\Big(\frac{d\beta}{dv} + \frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\gamma}{r}\Big) + \eta_3\Big(\frac{d\gamma}{dv} - \frac{\beta}{r}\Big)$$

oder, wenn

$$\frac{d\delta}{dv} - \frac{\alpha}{p} = \frac{\varepsilon}{q} \quad\text{und}\quad \alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2 + \gamma\zeta_3 - \varepsilon = z$$

gesetzt wird:

$$(II.)\qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{p}\eta_1 y + \frac{1}{q}z + \eta_2\Big(\frac{d\beta}{dv} + \frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\gamma}{r}\Big) + \eta_3\Big(\frac{d\gamma}{dv} - \frac{\beta}{r}\Big).$$

Gleichzeitig ist

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{1}{p}\zeta_1(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3) - \frac{1}{q}(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3) + \zeta_1\Big(\frac{d\alpha}{dv} - \frac{\beta}{\varrho}\Big)$$
$$+\zeta_2\Big(\frac{d\beta}{dv} + \frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\gamma}{r}\Big) + \zeta_3\Big(\frac{d\gamma}{dv} - \frac{\beta}{r}\Big) - \frac{d\varepsilon}{dv},$$

$$(III.)\qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{1}{p}\zeta_1 y - \frac{1}{q}y + \zeta_2\Big(\frac{d\beta}{dv} + \frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\gamma}{r}\Big) + \zeta_3\Big(\frac{d\gamma}{dv} - \frac{\beta}{r}\Big) - \frac{d\varepsilon}{dv} - \frac{\delta}{q}.$$

Wie man leicht übersieht, nehmen die Gleichungen (I.), (II.), (III.) wesentlich einfachere Formen an, wenn man die Coefficienten $\frac{d\beta}{dv}+\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\gamma}{r}$, $\frac{d\gamma}{dv}-\frac{\beta}{r}$ und $\frac{d\varepsilon}{dv}+\frac{\delta}{q}$ verschwinden lässt. Thut man das, so hat man zur Bestimmung von α, β, γ, δ, ε die folgenden fünf Gleichungen:

$$(21.)\quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dv} = \frac{1}{\varrho}\beta+\frac{1}{p}\delta, \\ \frac{d\beta}{dv} = -\frac{1}{\varrho}\alpha-\frac{1}{r}\gamma, \\ \frac{d\gamma}{dv} = \frac{1}{r}\beta, \\ \frac{d\delta}{dv} = \frac{1}{p}\alpha+\frac{1}{q}\varepsilon, \\ \frac{d\varepsilon}{dv} = -\frac{1}{q}\delta, \end{cases}$$

während (I.), (II.), (III.) in der vereinfachten Gestalt wie folgt lauten:

$$(22.)\quad \frac{\partial x}{dv} = -\frac{1}{p}\xi_1 y,\quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{p}\eta_1 y+\frac{1}{q}z,\quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{1}{p}\zeta_1 y-\frac{1}{q}y.$$

Die Gleichungen (21.) liefern unmittelbar ein Integral:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2-\varepsilon^2 = \text{Const.}$$

Es empfiehlt sich, — schon um von dem Summenzeichen Σ häufiger Gebrauch machen zu können — δ und ε durch $i\delta$ *) und $i\varepsilon$ zu ersetzen, wodurch (21.) übergeht in

$$(21^*.)\quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dv} = \frac{1}{\varrho}\beta+\frac{i}{p}\delta, \\ \frac{d\beta}{dv} = -\frac{1}{\varrho}\alpha-\frac{1}{r}\gamma, \\ \frac{d\gamma}{dv} = \frac{1}{r}\beta, \\ \frac{d\delta}{dv} = -\frac{i}{p}\alpha+\frac{1}{q}\varepsilon, \\ \frac{d\varepsilon}{dv} = -\frac{1}{q}\delta, \end{cases}$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2 = \text{Const.}$$

Sind $\alpha_i\beta_i\gamma_i\delta_i\varepsilon_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) fünf particuläre, die Gleichungen (21*.) befriedigende Werthsysteme, so genügen denselben auch die Werthe

$$\alpha = \Sigma_i f_i\alpha_i,\quad \beta = \Sigma_i f_i\beta_i,\quad \gamma = \Sigma_i f_i\gamma_i,\quad \delta = \Sigma_i f_i\delta_i,\quad \varepsilon = \Sigma_i f_i\varepsilon_i,\quad (i=1,2,3,4,5)$$

---

*) Wenn i nicht Index ist, bedeutet es wie üblich $\sqrt{-1}$.

wo die f_i beliebige Constanten sind, und dies sind die vollständigen Integralgleichungen von (21*.), wenn die $\alpha_i\beta_i\gamma_i\delta_i\varepsilon_i$ von einander linear unabhängig sind. Man wird nun diese particulären Werthsysteme stets so wählen können, dass sie den Orthogonalitäts-Bedingungen

$$(23.)\quad \alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2+\delta_i^2+\varepsilon_i^2 = 1 \ (i=1,2,3,4,5),\quad \alpha_i\alpha_k+\beta_i\beta_k+\gamma_i\gamma_k+\delta_i\delta_k+\varepsilon_i\varepsilon_k = 0 \ (i \gtrless k)$$

genügen. Denn für ein beliebiges System $\alpha_i'\beta_i'\gamma_i'\delta_i'\varepsilon_i'$ müssen, wie mit Hülfe von (21*.) leicht zu verificiren ist, die Gleichungen

$$\alpha_i'\alpha_k'+\beta_i'\beta_k'+\gamma_i'\gamma_k'+\delta_i'\delta_k'+\varepsilon_i'\varepsilon_k' = C_{ik} \qquad (i,k=1,2,3,4,5)$$

bestehen, in denen die C_{ik} constante Grössen sind. Führt man dann ein neues System particulärer Werthe durch die Gleichungen

$$\alpha_h = \Sigma_i f_{hi}\alpha_i',\ \beta_h = \Sigma_i f_{hi}\beta_i',\ \gamma_h = \Sigma_i f_{hi}\gamma_i',\ \delta_h = \Sigma_i f_{hi}\delta_i',\ \varepsilon_h = \Sigma_i f_{hi}\varepsilon_i' \quad (i,h=1,2,3,4,5)$$

ein, so lässt es sich durch geeignete Bestimmung der constanten Factoren f_{hi} erreichen, dass dasselbe den Gleichungen (23.) genügt.

Die Bedingungen der Orthogonalität können auch in der anderen Form gegeben werden:

$$(24.)\quad \begin{cases} \Sigma_i\alpha_i^2 = 1, & \Sigma_i\beta_i^2 = 1, & \Sigma_i\gamma_i^2 = 1, & \Sigma_i\delta_i^2 = 1, & \Sigma_i\varepsilon_i^2 = 1, \\ \Sigma_i\alpha_i\beta_i = 0, & \Sigma_i\alpha_i\gamma_i = 0, & \Sigma_i\alpha_i\delta_i = 0, & \Sigma_i\alpha_i\varepsilon_i = 0, & \Sigma_i\beta_i\gamma_i = 0, \\ \Sigma_i\beta_i\delta_i = 0, & \Sigma_i\beta_i\varepsilon_i = 0, & \Sigma_i\gamma_i\delta_i = 0, & \Sigma_i\gamma_i\varepsilon_i = 0, & \Sigma_i\delta_i\varepsilon_i = 0. \\ & & (i=1,2,3,4,5) & & \end{cases}$$

Gehen wir auf die Formeln zurück, welche die Grössen x, y, z definirten, und lassen jedem der fünf Systeme $\alpha_i\beta_i\gamma_i\delta_i\varepsilon_i$ auch ein System $x_iy_iz_i$*) entsprechen, so resultiren die Beziehungen

$$(25.)\quad \begin{cases} x_i = \alpha_i\xi_1+\beta_i\xi_2+\gamma_i\xi_3, \\ y_i = \alpha_i\eta_1+\beta_i\eta_2+\gamma_i\eta_3-i\delta_i, \\ z_i = \alpha_i\zeta_1+\beta_i\zeta_2+\gamma_i\zeta_3-i\varepsilon_i, \end{cases} \qquad (i=1,2,3,4,5)$$

aus denen in Rücksicht auf (24.) die folgenden hervorgehen:

$$(26.)\quad \begin{cases} \Sigma_i x_i\delta_i = 0, & \Sigma_i x_i\varepsilon_i = 0, & \Sigma_i x_i^2 = 1, \\ \Sigma_i y_i\delta_i = -i, & \Sigma_i y_i\varepsilon_i = 0, & \Sigma_i y_i^2 = 0, \\ \Sigma_i z_i\delta_i = 0, & \Sigma_i z_i\varepsilon_i = -i, & \Sigma_i z_i^2 = 0, \\ \Sigma_i y_i z_i = 0, & \Sigma_i z_i x_i = 0, & \Sigma_i x_i y_i = 0; \end{cases} \qquad (i=1,2,3,4,5)$$

*) Die hierdurch eingeführten Grössen $x_iy_iz_i$ $(i=1,2,3,4,5)$ sind nicht zu verwechseln mit den Richtungscosinus $x_iy_iz_i$ $(i=1,2,3)$, welche zunächst im Texte keine weitere Verwendung finden werden.

$$(27.)\quad \begin{cases} \xi_1 = \Sigma_i \alpha_i x_i, & \eta_1 = \Sigma_i \alpha_i y_i, & \zeta_1 = \Sigma_i \alpha_i z_i, \\ \xi_2 = \Sigma_i \beta_i x_i, & \eta_2 = \Sigma_i \beta_i y_i, & \zeta_2 = \Sigma_i \beta_i z_i, \\ \xi_3 = \Sigma_i \gamma_i x_i, & \eta_3 = \Sigma_i \gamma_i y_i, & \zeta_3 = \Sigma_i \gamma_i z_i. \end{cases} \qquad (i=1,2,3,4,5)$$

Die Differentialgleichungen (22.), in denen xyz mit dem Index i zu versehen sind, lassen sich nun mit Leichtigkeit integriren:

$$(22^*.)\quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = -\frac{1}{p}\xi_1 y_i, \quad \frac{\partial y_i}{\partial v} = -\frac{1}{p}\eta_1 y_i + \frac{1}{q} z_i, \quad \frac{\partial z_i}{\partial v} = -\frac{1}{p}\zeta_1 y_i - \frac{1}{q} y_i.$$

Man hat nämlich

$$\frac{\partial}{\partial v}(y_h z_i - z_h y_i) = -\frac{1}{p}\eta_1(y_h z_i - z_h y_i),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\log(y_h z_i - z_h y_i) = -\frac{1}{p}\eta_1 = \frac{\partial \log W}{\partial v}$$

oder integrirt

$$(28.)\quad y_h z_i - z_h y_i = m_{hi} W, \qquad (h, i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

wenn die von u abhängige Integrationsconstante mit m_{hi} bezeichnet wird.

Durch diese Gleichung sind 25 Grössen m_{hi} definirt, für welche man die unmittelbar aus (28.) sich ergebenden Relationen

$$(A.)\quad m_{hi} + m_{ih} = 0, \quad m_{ii} = 0,$$

$$(B.)\quad m_{gh} m_{ik} + m_{gi} m_{kh} + m_{gk} m_{hi} = 0 \qquad (g, h, i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

aufstellen kann, denen sich noch in Rücksicht auf die Gleichungen

$$\Sigma y_i^2 = 0, \quad \Sigma z_i^2 = 0, \quad \Sigma y_i z_i = 0$$

die folgende anschliesst:

$$(C.)\quad \Sigma_i m_{hi} m_{ki} = 0 \qquad (i, h, k = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Wir werden noch zu untersuchen haben, ob sich Functionen m_{ik} diesen Gleichungen gemäss bestimmen lassen, und wie viel von ihnen willkürlich bleiben.

Zuvor sollen aber die Integralgleichungen von (22*.) aufgestellt werden, und mit Hülfe derselben die des Systems (18.).

Multiplicirt man die Gleichung (28.) zuerst mit ε_i und dann mit δ_i und bildet jedes Mal die Summe Σ nach i, so findet man wegen (26.)

$$y_h \Sigma_i z_i \varepsilon_i - z_h \Sigma_i y_i \varepsilon_i = -i y_h = \Sigma_i m_{hi}\varepsilon_i . W, \quad y_h \Sigma_i z_i \delta_i - z_h \Sigma_i y_i \delta_i = +i z_h = \Sigma_i m_{hi} \delta_i . W,$$

$$y_h = i \Sigma_i m_{hi} \varepsilon_i . W, \quad z_h = -i \Sigma_i m_{hi} \delta_i . W.$$

Der Werth von W ist in Rücksicht auf $\Sigma_h y_h \delta_h = -i$, oder auf $\Sigma_h z_h \varepsilon_h = -i$ gleich

$$W = -\frac{1}{\Sigma_h \Sigma_i m_{hi} \delta_h \varepsilon_i},$$

folglich

$$(29.)\quad y_h = -i\frac{\Sigma_i m_{hi}\varepsilon_i}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k},\quad z_h = +i\frac{\Sigma_i m_{hi}\delta_i}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}.\quad (h,\ i,\ k=1,2,3,4,5)$$

Wie aus (28.) ersichtlich, muss

$$y_h m_{ik} + y_i m_{kh} + y_k m_{hi} = 0$$

sein, und demnach, da $\frac{\partial x_i}{\partial v} = -\frac{1}{p}\xi_1 y_i$ ist,

$$\frac{\partial x_h}{\partial v} m_{ik} + \frac{\partial x_i}{\partial v} m_{kh} + \frac{\partial x_k}{\partial v} m_{hi} = 0;$$

dies integrirt sich, wenn die von u abhängige Integrationsconstante mit n_{hik} bezeichnet wird, zu:

$$(30.)\quad x_h m_{ik} + x_i m_{kh} + x_k m_{hi} = n_{hik}.\quad (h,\ i,\ k=1,2,3,4,5)$$

Um x_h zu finden, multiplicire man die vorstehende Gleichung mit $\delta_i\varepsilon_k$ und bilde die Doppelsumme $\Sigma_i\Sigma_k$. Es fallen dann wegen (26.) die Glieder $\Sigma_i x_i\delta_i\Sigma_k m_{hk}\varepsilon_k$ und $\Sigma_k x_k\varepsilon_k\Sigma_i m_{hi}\delta_i$ fort, und man erhält

$$(31.)\quad x_h = \frac{\Sigma_i\Sigma_k n_{hik}\delta_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}.\quad (h,\ i,\ k=1,2,3,4,5)$$

Hinsichtlich der durch (30.) eingeführten Functionen n_{hik} ist zunächst zu bemerken, dass n_{hik} sein Zeichen ändert, wenn zwei Zahlen im Index mit einander vertauscht werden, und dass es einen verschwindenden Werth annimmt, wenn zwei Zahlen einander gleich sind. In welcher Beziehung n_{hik} zu m_{ik} steht, findet man am einfachsten in folgender Weise: Man setze in der Identität

$$\xi_1 = \eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2$$

$$\xi_1 = \Sigma\alpha_i x_i,\quad \eta_2 = \Sigma\beta_i y_i,\quad \eta_3 = \Sigma\gamma_i y_i,\quad \zeta_2 = \Sigma\beta_i z_i,\quad \zeta_3 = \Sigma\gamma_i z_i,$$

wodurch dieselbe übergeht in

$$\Sigma\alpha_i x_i = \Sigma\beta_i y_i.\Sigma\gamma_i z_i - \Sigma\gamma_i y_i.\Sigma\beta_i z_i = \Sigma_i\Sigma_k\beta_i\gamma_k(y_i z_k - z_i y_k) = W\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\beta_i\gamma_k$$

$$\Sigma\alpha_i x_i = -\frac{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\beta_i\gamma_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}.\quad (i,\ k=1,2,3,4,5)$$

Andererseits ist aber nach (31.)

$$\Sigma\alpha_i x_i = \frac{\Sigma_h\Sigma_i\Sigma_k n_{hik}\alpha_h\delta_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k},$$

folglich hat man identisch

$$\Sigma_h\Sigma_i\Sigma_k n_{hik}\alpha_h\delta_i\varepsilon_k = -\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\beta_i\gamma_k.\quad (h,\ i,\ k=1,2,3,4,5)$$

Da links h, i, k unter dem Summenzeichen unabhängig von einander die

Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 durchlaufen, und n_{hik} bei Vertauschung zweier Indices nur sein Zeichen ändert, so finden wir, wenn wir alle Glieder mit n_{hik} zusammenfassen, n_{hik} multiplicirt mit der Determinante $\Sigma\pm\alpha_h\delta_i\varepsilon_k$, welche nach einem bekannten Satze aus der Determinantenlehre gleich ist $\beta_g\gamma_l-\gamma_g\beta_l$, vorausgesetzt, dass $hikgl$ eine gerade Permutation von 12345 ist, und die Determinante $\Sigma\pm\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4\varepsilon_5$ den Werth $+1$ besitzt. Rechts ist aber $\beta_g\gamma_l-\gamma_g\beta_l$ multiplicirt mit m_{gl}, mithin folgt aus der obigen Identität, dass für jede gerade Permutation von $12345 = hikgl$

$$(32.)\qquad n_{hik} = -m_{gl}$$

ist. Ich stelle nun die Integralgleichungen des Systems (18.) übersichtlich zusammen und gebe dabei den Werth von ξ_1 in den beiden Formen an, die den zwei soeben aufgestellten Ausdrücken für $\Sigma\alpha_i x_i$ entsprechen, und desgleichen die Werthe von $\xi_2\xi_3$ in analoger Weise doppelt dargestellt:

$$(33.)\qquad \xi_1 = \frac{\Sigma_h\Sigma_i\Sigma_k n_{hik}\alpha_h\delta_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k},\quad \xi_2 = \frac{\Sigma_h\Sigma_i\Sigma_k n_{hik}\beta_h\delta_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k},\quad \xi_3 = \frac{\Sigma_h\Sigma_i\Sigma_k n_{hik}\gamma_h\delta_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k},$$

$$(34.)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{-\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\beta_i\gamma_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}, & \xi_2 = \dfrac{-\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\gamma_i\alpha_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}, \quad \xi_3 = \dfrac{-\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\alpha_i\beta_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}, \\ \eta_1 = \dfrac{-i\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\alpha_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}, & \eta_2 = \dfrac{-i\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\beta_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}, \quad \eta_3 = \dfrac{-i\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\gamma_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}, \\ \zeta_1 = \dfrac{+i\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\alpha_i\delta_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}, & \zeta_2 = \dfrac{+i\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\beta_i\delta_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}, \quad \zeta_3 = \dfrac{+i\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\gamma_i\delta_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}. \end{cases}$$
$$(i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

Von den 25 durch die Gleichungen

$$(A.)\qquad m_{ik}+m_{ki} = 0,\quad m_{ii} = 0,$$
$$(B.)\qquad m_{gh}m_{ik}+m_{gi}m_{kh}+m_{gk}m_{hi} = 0,$$
$$(C.)\qquad \Sigma_i m_{ih}m_{ik} = 0 \qquad (g,\ h,\ i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

definirten Grössen m_{ik} sind, wie aus $(A.)$ hervorgeht, abgesehen von den fünf verschwindenden m_{ii} je zwei der übrigbleibenden bis auf das Zeichen einander gleich. Es lässt sich nun zeigen, dass $(B.)$ und $(C.)$ für die zehn ihren absoluten Werthen nach verschiedenen Grössen nur sechs von einander unabhängige Gleichungen repräsentiren, so dass noch vieren von ihnen beliebige Werthe ertheilt werden dürfen.

Wenn in einer der Gleichungen $(B.)$ zwei der Indices $ghik$ gleich sind, so ist sie nach $(A.)$ identisch erfüllt; es bleiben in $(B.)$ demnach fünf zu beachtende Gleichungen; von diesen sind jedoch nur drei von einander unabhängig, da zwischen je vieren eine identische lineare Relation besteht.

In der That, multiplicirt man die Gleichungen:

$$m_{gh}m_{ik}+m_{gi}m_{kh}+m_{gk}m_{hi} = 0,$$
$$m_{gi}m_{kl}+m_{gk}m_{li}+m_{gl}m_{ik} = 0,$$
$$m_{gk}m_{lh}+m_{gl}m_{hk}+m_{gh}m_{kl} = 0,$$
$$m_{gl}m_{hi}+m_{gh}m_{il}+m_{gi}m_{lh} = 0,$$

wo $ghikl$ eine beliebige Permutation von 1, 2, 3, 4, 5 ist, der Reihe nach mit m_{gl}, $-m_{gh}$, $+m_{gi}$, $-m_{gk}$, und addirt die Producte, so erhält man identisch Null.

Multiplicirt man (*B.*) mit $m_{l'i}$ und bildet die Summe Σ_i, so geht die Gleichung hervor

$$0 = -m_{gh}\Sigma_i m_{ik}m_{il'}+m_{kh}\Sigma_i m_{ig}m_{il'}+m_{gk}\Sigma_i m_{ih}m_{il'}. \qquad (i=1,2,3,4,5)$$

Aus ihr erhellt, dass, wenn für die besonderen Werthe $l'=h$ und $l'=g$ die Gleichung $\Sigma_i m_{il}m_{il'}=0$ erfüllt ist, sie für jeden beliebigen Werth $l'=k$ des Index l' gleichfalls richtig ist.

Wenn demnach drei Gleichungen

$$\Sigma_i m_{ig}m_{ih}=0, \quad \Sigma_i m_{ih}m_{ik}=0, \quad \Sigma_i m_{ik}m_{ig}=0$$

als bestehend vorausgesetzt werden, so ist jede andere Gleichung der Gruppe (*C.*) eine nothwendige Folge dieser drei und des Systems (*B.*)

Beachtet man nun, dass man die fünf einem bestimmten Index k entsprechenden Grössen m_{ik} gleich Null setzen darf, ohne mit (*A.*) oder (*B.*) in Widerspruch zu gerathen, und dass diese Annahme die Summen $\Sigma_i m_{ih}m_{ik}$ und $\Sigma_i m_{ig}m_{ik}$ verschwinden macht, ohne den Werth der Summe $\Sigma_i m_{ig}m_{ih}$ zu beeinflussen, so leuchtet ein, dass die drei vorhin angeführten Gleichungen von (*A.*) und (*B.*) unabhängig sind. Damit ist bewiesen, dass die Grössen m_{ik} sechs und nur sechs von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen unterworfen sind.

Wenn man in der Gleichung $\Sigma_k m_{hk}^2=0$ für m_{hk}^2 den aus $\Sigma_i m_{ki}^2=0$ sich ergebenden Werth

$$m_{hk}^2 = -\Sigma_i m_{ki}^2 \qquad (h, i, k=1,2,3,4,5;\ i \gtrless h)$$

setzt und überdies beachtet, dass k in $\Sigma_k m_{hk}^2=0$ den Werth h nicht anzunehmen braucht, so gelangt man zu der Relation

$$(D.) \qquad \Sigma_i\Sigma_k m_{ik}^2 = 0. \qquad (i, k=1,2,3,4,5;\ i, k \gtrless h)$$

Von den sechs Gliedern, von denen jedes zweimal in der linken Seite von (*D.*) enthalten ist, haben drei den Index g, während die Indices der drei

anderen sowohl von h als von g frei sind. Die ersteren geben wegen $\Sigma_i m_{gi}^2 = 0$ summirt $-m_{gh}^2$, folglich ist

$$(E.)\qquad m_{gh}^2 = m_{ik}^2 + m_{kl}^2 + m_{li}^2,$$

wenn ikl die drei Zahlen sind, die von 1, 2, 3, 4, 5 übrig bleiben, wenn h und g ausscheiden.

Führt man nun die Grössen n_{hik} durch die Bestimmung ein, dass für jede gerade Permutation von $12345 = ghikl$

$$m_{gh} = -n_{ikl}$$

sei, so schreiben sich $(B.)$ und $(E.)$

$$(B^*.)\qquad \Sigma_i m_{hi} n_{ghi} = 0,$$

$$(E^*.)\qquad \begin{cases} n_{ikl}^2 = m_{ik}^2 + m_{kl}^2 + m_{li}^2 \\ \text{oder} \\ m_{gh}^2 = \Sigma_i n_{ghi}^2. \end{cases} \qquad (g,\ h,\ i,\ k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Das i unter dem Summenzeichen der letzten Gleichung braucht nur die drei von g und h verschiedenen Zahlenwerthe, welche ich nun mit $\iota\iota'\iota''$ bezeichnen will, anzunehmen. Stellt man nun mit derselben die Gleichungen $\Sigma m_{gi}^2 = 0$, $\Sigma m_{hi}^2 = 0$, $\Sigma m_{gi} m_{hi} = 0$, $\Sigma m_{hi} n_{ghi} = 0$, $\Sigma m_{gi} n_{ghi} = 0$ zusammen und schreibt sie in der Form:

$$\begin{aligned}
m_{gh}^2 &= n_{gh\iota}^2 + n_{gh\iota'}^2 + n_{gh\iota''}^2, \\
-m_{gh}^2 &= m_{g\iota}^2 + m_{g\iota'}^2 + m_{g\iota''}^2, \\
-m_{gh}^2 &= m_{h\iota}^2 + m_{h\iota'}^2 + m_{h\iota''}^2, \\
0 &= m_{g\iota} m_{h\iota} + m_{g\iota'} m_{h\iota'} + m_{g\iota''} m_{h\iota''}, \\
0 &= m_{g\iota}\, n_{gh\iota} + m_{g\iota'}\, n_{gh\iota'} + m_{g\iota''}\, n_{gh\iota''}, \\
0 &= m_{h\iota}\, n_{gh\iota} + m_{h\iota'}\, n_{gh\iota'} + m_{g\iota''}\, n_{gh\iota''},
\end{aligned}$$

so übersieht man, dass die Grössen $\frac{n_{ghi}}{m_{gh}}$, $i\frac{m_{gi}}{m_{gh}}$, $i\frac{m_{hi}}{m_{gh}}$ $(i = \iota, \iota', \iota'')$ als Richtungscosinus dreier orthogonalen Richtungen angesehen werden dürfen.

Wir haben nun unter (12.) nachgewiesen, dass einem Orthogonal-Systeme $x_i y_i z_i$ $(i = 1, 2, 3)$ stets für die Differentialquotienten nach einer Variablen u Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = -y_i M - z_i P, \quad \frac{\partial y_i}{\partial u} = x_i M + y_i L, \quad \frac{\partial z_i}{\partial u} = x_i P - y_i L$$

angehören; für

$$x_i = \frac{n_{ghi}}{m_{gh}}, \quad y_i = i\frac{m_{gi}}{m_{gh}}, \quad z_i = i\frac{m_{hi}}{m_{gh}}$$

ist mithin, wenn M durch $\frac{is_{gh}}{m_{gh}}$, P durch $\frac{i\sigma_{gh}}{m_{gh}}$ und endlich L durch $-\frac{t_{gh}}{m_{gh}}$ ersetzt werden:

$$(F.)\quad \begin{cases} m_{gh}\frac{dn_{ghi}}{du}-n_{ghi}\frac{dm_{gh}}{du} = s_{gh}m_{gi}+\sigma_{gh}m_{hi}, \\ m_{gh}\frac{dm_{gi}}{du}-m_{gi}\frac{dm_{gh}}{du} = s_{gh}n_{ghi}-t_{gh}m_{hi}, \\ m_{gh}\frac{dm_{hi}}{du}-m_{hi}\frac{dm_{gh}}{du} = \sigma_{gh}n_{ghi}+t_{gh}m_{gi}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben zur Voraussetzung, dass g und h zwei bestimmte Zahlen sind, hingegen i irgend eine der drei von g und h verschiedenen Zahlen der Reihe 12345; dem entsprechend sind die Grössen s, σ, t, mit dem Index gh versehen.

Setzt man in der zweiten Gleichung $(F.)$ $i = h'$:

$$m_{gh}\frac{dm_{gh'}}{du}-m_{gh'}\frac{dm_{gh'}}{du} = s_{gh}n_{ghh'}-t_{gh}m_{hh'},$$

multiplicirt die erhaltene Gleichung mit m_{gi} und subtrahirt das Product von der mit $m_{gh'}$ multiplicirten zweiten Gleichung $(F.)$, so findet man

$$m_{gh}\left(m_{gh'}\frac{dm_{gi}}{du}-m_{gi}\frac{dm_{gh}}{du}\right) = s_{gh}(n_{ghi}m_{gh'}-n_{ghh'}m_{gi})-t_{gh}(m_{hi}m_{gh'}+m_{hh'}m_{ig}),$$

was in Rücksicht auf die Bedeutung der n_{ghk} und die Gleichungen $(C.)$ und $(B.)$ übergeht in:

$$m_{gh}\left(m_{gh'}\frac{dm_{gi}}{du}-m_{gi}\frac{dm_{gh'}}{du}\right) = s_{gh}m_{gh}n_{gh'i}-t_{gh}m_{h'i}m_{gh},$$

$$m_{gh'}\frac{dm_{gi}}{du}-m_{gi}\frac{dm_{gh'}}{du} = s_{gh}n_{gh'i}-t_{gh}m_{h'i}.$$

In dieser Gleichung kann i alle von g und h' verschiedenen Zahlenwerthe annehmen; denn, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, ist sie richtig, wenn i von g, h' und h verschieden ist, und für $i = h$ fällt sie mit der zweiten Gleichung $(F.)$ zusammen, wenn in derselben $i = h'$ gesetzt ist.

Man hat nun andererseits aus einem mit $(F.)$ analogen System

$$m_{gh'}\frac{dm_{gi}}{du}-m_{gi}\frac{dm_{gh'}}{du} = s_{gh'}n_{gh'i}-t_{gh'}m_{h'i},$$

folglich

$$t_{gh'} = t_{gh}, \quad s_{gh'} = s_{gh}.$$

In gleicher Weise liesse sich die dritte Gleichung $(F.)$ behandeln, und man

würde finden

$$t_{g'h} = t_{gh}, \quad \sigma_{g'h} = \sigma_{gh}.$$

Hieraus erhellt, dass t_{gh} für alle Indices das gleiche ist, dass s_{gh} nur von dem ersten Index g abhängig ist, hingegen σ_{gh} nur von h. Demnach dürfen in $(F.)$ t_{gh} durch t, s_{gh} durch s_g und σ_{gh} durch σ_h ersetzt werden. Durch Vertauschung von g mit h geht aber die zweite Gleichung $(F.)$ in die dritte über, folglich muss $\sigma_h = s_h$ sein. Es ist somit

$$(F^*.) \quad \begin{cases} m_{gh}\dfrac{dn_{ghi}}{du} - n_{ghi}\dfrac{dm_{gh}}{du} = s_g m_{gi} + s_h m_{hi}, \\ m_{gh}\dfrac{dm_{gi}}{du} - m_{gi}\dfrac{dm_{gh}}{du} = s_g n_{ghi} - t m_{hi}, \\ m_{gh}\dfrac{dm_{hi}}{du} - m_{hi}\dfrac{dm_{gh}}{du} = s_h n_{ghi} + t m_{gi}. \end{cases}$$

Zwischen den s_i und t bestehen gewisse Relationen, zu denen man durch Elimination von $\dfrac{dm_{gh}}{du}$ aus den beiden letzten Gleichungen gelangt:

$$\begin{aligned} m_{gh}\left(m_{hi}\frac{dm_{gi}}{du} - m_{gi}\frac{dm_{hi}}{du}\right) &= n_{ghi}(s_g m_{hi} + s_h m_{ig}) - t(m_{hi}^2 + m_{gi}^2), \\ m_{gh}(s_i n_{ihg} - t m_{hg}) &= n_{ghi}(s_g m_{hi} + s_h m_{ig}) - t(m_{hi}^2 + m_{gi}^2), \\ t(m_{gh}^2 + m_{hi}^2 + m_{gi}^2) &= n_{ghi}(s_g m_{hi} + s_h m_{ig} + s_i m_{gh}) \end{aligned}$$

oder wegen $(E^*.)$

$$(G.) \quad t n_{ghi} = s_g m_{hi} + s_h m_{ig} + s_i m_{gh}.$$

Durch die Gleichungen $(F.)$ und $(G.)$ sind wir nunmehr in den Stand gesetzt, die Grössen $\xi_i \eta_i \zeta_i$, deren Werthe in (34.) zusammengestellt sind, den Differentialgleichungen (19.)

$$(19.) \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = -M\eta_i - P\zeta_i, \quad \frac{\partial \eta_i}{\partial u} = M\xi_i, \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial u} = P\xi_i$$

zu unterwerfen. Dadurch werden sich P und M bestimmen, und Bedingungen für die bisher noch willkürlichen Functionen s_h und t ergeben.

Aus (19.) fliessen für

$x_i = \alpha_i\xi_1 + \beta_i\xi_2 + \gamma_i\xi_3$, $y_i = \alpha_i\eta_1 + \beta_i\eta_2 + \gamma_i\eta_3 - i\delta_i$ und $z_i = \alpha_i\zeta_1 + \beta_i\zeta_2 + \gamma_i\zeta_3 - i\varepsilon_i$

die Gleichungen

$$(35.) \quad \frac{\partial x_i}{\partial u} = -My_i - Pz_i - i(M\delta_i + P\varepsilon_i), \quad \frac{\partial y_i}{\partial u} = x_i M, \quad \frac{\partial z_i}{\partial u} = x_i P.$$

Ich differentiire die Gleichungen

$$y_h z_i - y_i z_h = m_{hi} W \quad \text{und} \quad y_k z_i - z_k y_i = m_{ki} W$$

in Bezug auf u und eliminire nachträglich $\frac{\partial W}{\partial u}$; ich finde dann:

$$z_i\left(m_{ki}\frac{\partial y_h}{\partial u}+m_{ih}\frac{\partial y_k}{\partial u}\right)-y_i\left(m_{ki}\frac{\partial z_h}{\partial u}+m_{ih}\frac{\partial z_k}{\partial u}\right)+\frac{\partial z_i}{\partial u}(y_h m_{ki}+y_k m_{ih})-\frac{\partial y_i}{\partial u}(z_h m_{ki}+z_k m_{ih})$$
$$= W\left(m_{ki}\frac{dm_{hi}}{du}-m_{hi}\frac{dm_{ki}}{du}\right),$$

was wegen

$$y_h m_{ki}+y_k m_{ih}+y_i m_{hk}=0,\quad z_h m_{ki}+z_k m_{ih}+z_i m_{hk}=0$$

übergeht in

$$(36.)\quad \left\{\begin{aligned} & z_i\left(m_{ki}\frac{\partial y_h}{\partial u}+m_{ih}\frac{\partial y_k}{\partial u}+m_{hk}\frac{\partial y_i}{\partial u}\right)-y_i\left(m_{ki}\frac{\partial z_h}{\partial u}+m_{ih}\frac{\partial z_k}{\partial u}+m_{hk}\frac{\partial z_i}{\partial u}\right)\\ & \qquad = W\left(m_k\frac{dm_{hi}}{du}-m_{hi}\frac{dm_{ki}}{du}\right).\end{aligned}\right.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bestimmt sich nach (F^*.) zu $W(s_i n_{ikh}-t m_{hk})$; substituirt man für die Differentialquotienten von y und z ihre Werthe aus (35.) und nimmt dabei auf die Gleichung (30.) $x_h m_{ki}+x_k m_{ih}+x_i m_{hk}=n_{hki}$ Rücksicht, so erhält man, vorausgesetzt, dass h, i, k drei von einander verschiedene Zahlen sind, die Gleichung

$$n_{hki}(z_i.M-y_i.P) = W(s_i n_{ikh}-t m_{hk})$$

oder

$$n_{hki}(z_i.M-y_i.P+s_i.W) = -m_{hk}.W.t.$$

Multiplicirt man dieselbe nun mit m_{hk}, lässt k alle von h und i verschiedenen Zahlenwerthe der Reihe $1-5$ annehmen und addirt die so entstandenen Gleichungen, so findet sich die Klammer links multiplicirt mit $\sum_{1-5}{}_k n_{hki}m_{hk}$, und rechts $-W.t$ multiplicirt mit $(\sum_{1-5}{}_k m_{hk}^2-m_{hi}^2)$. Nach ($B^*$.) und ($C$.) ist aber $\sum_{1-5}{}_k n_{hki}m_{hk}=0$ und $\sum_{1-5}{}_k m_{hk}^2=0$, folglich muss

$$0 = m_{hi}^2.t.W,$$

d. h.

$$(37.)\quad t = 0$$

sein. Hierdurch vereinfacht sich die oben stehende Gleichung zu

$$(38.)\quad y_i P-z_i M = s_i W. \qquad (i=1,2,3,4,5)$$

Durch successives Multipliciren mit δ_i und ε_i und darauf folgendes Summiren nach i gehen die Werthe von M und P hervor. Da nämlich (26.)

$$\Sigma y_i\delta_i=-i,\quad \Sigma z_i\delta_i=0,\quad \Sigma y_i\varepsilon_i=0,\quad \Sigma z_i\varepsilon_i=-i$$

ist, so findet man

$$(39.)\quad \begin{cases} P = \quad i\Sigma_i s_i \delta_i . W = \dfrac{-i\Sigma_i s_i \delta_i}{\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i \varepsilon_k}, \\ M = -i\Sigma_i s_i \varepsilon_i . W = \dfrac{+i\Sigma_i s_i \varepsilon_i}{\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i \varepsilon_k}. \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Mit $t = 0$ ist die Gleichung gefunden, welche, wie unter (13.) (Abschnitt I) bewiesen wurde, zwischen den in das Problem eingehenden willkürlichen Functionen von u bestehen muss als die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Coexistenz von (11.) und (4^a.) oder der sie ersetzenden Gleichungen (18.) und (19.). Dass dieselbe in der That ausreicht, bestätigt der Versuch; wenn man in (18.) und (19.) ξ_i, η_i, ζ_i, M und P durch ihre Werthe aus (34.) und (39.) ersetzt und zur Bestimmung der auftretenden Differentialquotienten $\frac{dm_{ik}}{du}$ das System (F^*.) und die Gleichung $t = 0$ heranzieht, so erweisen sich jene Gleichungen als identisch erfüllt.

Damit sind wir im Wesentlichen an das Ziel gelangt, das wir erstrebten; es erübrigt nur noch die Aufstellung der Gleichungen der gefundenen Fläche und die kurze Erörterung, wie die Functionen, aus denen die letzteren sich zusammensetzen, zu finden sind.

Zu dem Zwecke haben wir nur in (20.) ζ_i und η_i durch ihre Werthe aus (34.) zu ersetzen; es resultiren dann die definitiven Gleichungen unserer Fläche in der Form:

$$(40.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{i=3} (X_i - X_i^{(1)}) \cos a_i = i\,\dfrac{R\cos\sigma\,\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\alpha_i\delta_k + R\sin\sigma\,\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\alpha_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}, \\ \sum\limits_{i=1}^{i=3} (X_i - X_i^{(1)}) \cos b_i = i\,\dfrac{R\cos\sigma\,\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\beta_i\delta_k + R\sin\sigma\,\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\beta_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}, \\ \sum\limits_{i=1}^{i=3} (X_i - X_i^{(1)}) \cos c_i = i\,\dfrac{R\cos\sigma\,\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\gamma_i\delta_k + R\sin\sigma\,\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\gamma_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}. \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Hierin sind nach der bisherigen Festsetzung R und σ zwei willkürliche Functionen des Parameters v; ebenso können die beiden Functionen, welche die Mittelpunktscurve analytisch darstellen, und durch welche $X_i^{(1)} a_i b_i c_i$, sowie ϱ und r, Krümmungs- und Torsionsradius derselben, in ihrer Abhängigkeit von v gegeben sind, beliebig angenommen werden. Die Kenntniss der Grössen $\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i \varepsilon_i$ hingegen setzt die Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (21*.) voraus. Es ist nun evident, dass die Aufgabe, die Integration vollständig durchzuführen, nur dann in Frage kommen kann, wenn die analytischen Ausdrücke für ϱ, r, p und q thatsächlich vorliegen. Jedoch ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass sich durch Reductionen

an den allgemeinen Differentialgleichungen Vortheile für die Integration ergeben. In welchem Sinne dies möglicher Weise geschehen könnte, wird im nächsten Abschnitte klar werden, wo sich zeigt, dass für $\frac{1}{r}$ oder $\frac{1}{q} = 0$ die Gleichungen (21*.) auf lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückführbar sind. Eine ähnliche Reduction ist mir zwar in dem allgemeinen Falle nicht gelungen, indessen ist dieser Umstand für die Theorie unserer Flächen ohne Belang. Diese verlangt nämlich nur die Aufstellung der Gleichungen einer im wesentlichen durch eine partielle Differentialgleichung definirten Flächenfamilie mit der nöthigen Anzahl willkürlicher Functionen, ohne über die letzteren beschränkende Verfügungen zu treffen. Es steht uns mithin frei, dieselben so zu wählen, dass die Integration des Systems (21*.) unnöthig wird. Wir erreichen dies, wenn wir nicht mehr R, σ, ϱ und r als die willkürlichen Functionen des Problems ansehen, sondern festsetzen, dass für die fünf Grössen $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5$ die Gleichung $\Sigma\varepsilon_i^2 = 1$ befriedigende, im übrigen aber beliebige Functionen zu setzen sind. Dann erfordert die Bestimmung von $\alpha_i\beta_i\gamma_i\delta_i$, R, σ, ϱ und r nur noch Differentiationen und rein algebraische Operationen.

Wählt man dem entsprechend für $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5$ fünf Functionen einer Variabeln, die ich zum Unterschiede von v mit ν bezeichnen will, so liefern die Gleichungen (21*.) und (24.) in eindeutiger Weise die Werthe von $\alpha_i\beta_i\gamma_i\delta_i$ in Function der Variabeln ν; sie lassen hingegen das Element der Mittelpunktscurve dv in soweit unbestimmt, als dasselbe dem Producte von $d\nu$ in eine neue willkürliche Function λ gleichgesetzt werden darf, und zwar ohne dass die ersteren in ihren Werthen beeinflusst werden; die Functionen R, σ, ϱ und r dagegen ändern sich mit λ; ihre Abhängigkeit von $\lambda = \frac{dv}{d\nu}$ wird, wie man aus den Gleichungen (21*.) ersehen kann, dargestellt durch die Gleichungen

$$R\sin\sigma = \lambda R'\sin\sigma', \quad \frac{dR\cos\sigma}{d\nu} = \lambda\,\frac{dR'\cos\sigma'}{d\nu}, \quad r = \lambda r', \quad \varrho = \lambda\varrho',$$

wenn die dem besonderen Werthe $\lambda = 1$ entsprechenden Functionen mit Strichen versehen werden.

Die Richtungen der Krümmungslinien und der Normale der durch (40.) dargestellten Fläche hängen allein von den Functionen $\alpha_i\beta_i\gamma_i\delta_i\varepsilon_i$ und $\cos a_i$, $\cos b_i$, $\cos c_i$ ab, auf welche λ ohne Einfluss ist; wir finden mithin die im Abschnitt I bewiesene Thatsache bestätigt, dass diejenigen Flächen

mit sphärischen Krümmungslinien, bei denen zwischen den Elementen R, σ, ϱ, r der einen und den correspondirenden Elementen R', σ', ϱ', r' der anderen die oben hervorgehobene Beziehung besteht, in eine solche Lage zu einander gebracht werden können, dass in entsprechenden Punkten die Krümmungslinien und Normalen beider Flächen parallel sind.

Wenn über die willkürlichen Functionen von v in der besprochenen Weise Verfügung getroffen ist, so hat man zum Schluss noch die Gleichungen der Mittelpunktscurve mit Hilfe der bekannten Werthe ihrer Krümmungs- und Torsionsradien aufzustellen, und die Grössen X_i^0, $\cos a_i$, $\cos b_i$, $\cos c_i$ aufzusuchen*), womit alle in die Gleichungen (40.) eingehenden Functionen von v bestimmt wären. Die Verhältnisse der m_{ik}, von denen wegen $t=0$ nunmehr nur drei noch willkürlich sind, repräsentiren zwei arbiträre Functionen von u. Man kann für die vier einem bestimmten Index entsprechenden Grössen, z. B. für $m_{g1} m_{g2} \dots$ beliebige, aber die Gleichung $\sum_{1-5} {}_i m_{gi}^2 = 0$ befriedigende Functionen wählen und dann die übrigen mit Hilfe der leicht zu verificirenden Gleichungen berechnen:

$$(41.) \quad m_{gh}\frac{dm_{gi}}{du} - m_{gi}\frac{dm_{gh}}{du} = s_g n_{ghi}, \quad \sqrt{\Sigma_i\left(\frac{dm_{gi}}{du}\right)^2} = s_g. \qquad (g,\ h,\ i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Den Gleichungen (40.) kann man eine wesentlich einfachere Form geben, wenn man anstatt $\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i \varepsilon_i$ gewisse in linearer Beziehung zu ihnen stehende Grössen anwendet; allerdings tritt dann an Stelle von (21*.) ein System weniger einfacher Differentialgleichungen. Setzt man

$$\alpha_i \cos a_1 + \beta_i \cos b_1 + \gamma_i \cos c_1 = \alpha_i', \quad \alpha_i \cos a_2 + \beta_i \cos b_2 + \gamma_i \cos c_2 = \beta_i',$$
$$\alpha_i \cos a_3 + \beta_i \cos b_3 + \gamma_i \cos c_3 = \gamma_i', \quad \delta_i \cos\sigma + \varepsilon_i \sin\sigma = \delta_i', \quad \delta_i \sin\sigma - \varepsilon_i \cos\sigma = \varepsilon_i',$$

so ergiebt die Differentiation nach v in Rücksicht auf (21*.) und die Gleichungen $\frac{d\cos a_i}{dv} = \frac{1}{\varrho}\cos b_i$, $\frac{d\cos b_i}{dv} = -\frac{1}{\varrho}\cos a_i - \frac{1}{r}\cos c_i$, $\frac{d\cos c_i}{dv} = \frac{1}{r}\cos b_i$:

$$\frac{d\alpha_i'}{dv} = \frac{i}{p}\cos a_1(\delta_i'\cos\sigma + \varepsilon_i'\sin\sigma),$$
$$\frac{d\beta_i'}{dv} = \frac{i}{p}\cos a_2(\delta_i'\cos\sigma + \varepsilon_i'\sin\sigma),$$
$$\frac{d\gamma_i'}{dv} = \frac{i}{p}\cos a_3(\delta_i'\cos\sigma + \varepsilon_i'\sin\sigma),$$
$$\frac{d\delta_i'}{dv} = -\frac{i}{p}\cos\sigma\,(\alpha_i'\cos a_1 + \beta_i'\cos a_2 + \gamma_i'\cos a_3) - \frac{\operatorname{cotg}\sigma}{R}\frac{dR}{dv}\varepsilon_i',$$
$$\frac{d\varepsilon_i'}{dv} = -\frac{i}{p}\sin\sigma\,(\alpha_i'\cos \alpha_1 + \beta_i'\cos a_2 + \gamma_i'\cos a_3) + \frac{\operatorname{cotg}\sigma}{R}\frac{dR}{dv}\delta_i'.$$

*) Vgl. über diese Aufgabe die Abhandlung von Herrn *Hoppe:* dies Journ. B. 63 p. 122.

Die Gleichungen (40.) nehmen durch diese Substitution die einfache Gestalt an:

$$(42.)\quad \begin{cases} X_1 - X_1^0 = -iR\dfrac{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\alpha_i'\delta_k'}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i'\varepsilon_k'}, \\ X_2 - X_2^0 = -iR\dfrac{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\beta_i'\delta_k'}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i'\varepsilon_k'}, \\ X_3 - X_3^0 = -iR\dfrac{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\gamma_i'\delta_k'}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i'\varepsilon_k'}. \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Ich will nun noch kurz auf diejenige Fläche mit einem System sphärischer Krümmungslinien eingehen, bei der die osculirenden Kugeln sämmtlich den Coordinatenanfangspunkt enthalten, und die in Bezug auf die durch (40.) dargestellte Fläche ähnlich gelegen ist.

Wie wir wissen, behalten, wenn man von einer Fläche zu einer ihr ähnlich liegenden übergeht, $\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i \varepsilon_i$ $\cos a_i$ $\cos b_i$ $\cos c_i$ ihre Werthe, während $X_i^0 R\sigma$ in $X_i^{0\prime} R'\sigma'$ geändert werden, und zwar in dem vorliegenden Falle so, dass die Grössen

$$\mathfrak{A} = \Sigma X_i^{0\prime}\cos a_i,\quad \mathfrak{B} = \Sigma X_i^{0\prime}\cos b_i,\quad \mathfrak{C} = \Sigma X_i^{0\prime}\cos c_i,\quad \mathfrak{D} = R'\sin\sigma',\quad \mathfrak{E} = R'\cos\sigma' \qquad (i = 1, 2, 3)$$

den Gleichungen (15.) genügen, welche nach Ersetzung von $\dfrac{1}{R\sin\sigma}$ durch $\dfrac{1}{p}$ und von $\dfrac{1}{R\sin\sigma}\dfrac{dR\cos\sigma}{dv}$ durch $\dfrac{1}{q}$ in der Form erscheinen:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{A}}{dv} &= \frac{1}{\varrho}\mathfrak{B} + \frac{1}{p}\mathfrak{D}, \\ \frac{d\mathfrak{B}}{dv} &= -\frac{1}{\varrho}\mathfrak{A} - \frac{1}{r}\mathfrak{C}, \\ \frac{d\mathfrak{C}}{dv} &= \frac{1}{r}\mathfrak{B}, \\ \frac{d\mathfrak{D}}{dv} &= +\frac{1}{p}\mathfrak{A} - \frac{1}{q}\mathfrak{E}, \\ \frac{d\mathfrak{E}}{dv} &= \frac{1}{q}\mathfrak{D}, \\ \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 - \mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E}^2 &= 0; \end{aligned}$$

vergleicht man sie mit den Gleichungen des Systems (21*.), so erhellt, dass die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ in einfacher Beziehung zu den α_i, β_i, γ_i, δ_i, ε_i stehen. Es muss nämlich

$$\mathfrak{A} = \Sigma_i f_i\alpha_i,\quad \mathfrak{B} = \Sigma_i f_i\beta_i,\quad \mathfrak{C} = \Sigma_i f_i\gamma_i,\quad \mathfrak{D} = i\Sigma_i f_i\delta_i,\quad \mathfrak{E} = -i\Sigma_i f_i\varepsilon_i,\quad \Sigma_i f_i^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

sein, wo f_i fünf Constanten sind.

19*

Wenn wir nun in (40.) R, σ und X_i'' durch die gestrichenen Functionen ersetzen und dann deren soeben gefundene Werthe substituiren, so erhalten wir die Gleichungen für die Coordinaten $X_1' X_2' X_3'$ eines Punktes der gesuchten Fläche:

$$\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i \varepsilon_k . \Sigma_i X_i' \cos a_i = \Sigma f_i \varepsilon_i \Sigma\Sigma m_{ik} \alpha_i \delta_k - \Sigma f_i \delta_i \Sigma\Sigma m_{ik} \alpha_i \varepsilon_k + \Sigma f_i \alpha_i \Sigma\Sigma m_{ik} \delta_i \varepsilon_k$$
$$= \Sigma_h \Sigma_i \Sigma_k \alpha_h \delta_i \varepsilon_k (m_{hi} f_k + m_{ik} f_h + m_{kh} f_i).$$

In der dreifachen Summe rechts verschwinden alle Glieder, für welche hik nicht ungleich sind; man kann daher den Coefficienten $m_{hi} f_k + m_{ik} f_h + m_{kh} f_i$, mit dem die Determinante $\Sigma \pm \alpha_h \delta_i \varepsilon_k$ multiplicirt ist, mit $-\Sigma_i n_{gli} f_i$ bezeichnen, vorausgesetzt, dass $hikgl$ eine gerade Permutation von 12345 ist (vgl. (32.)). Unter dieser Voraussetzung ist aber die Determinante

$$\Sigma \pm \alpha_h \delta_i \varepsilon_k = (\beta_g \gamma_l - \beta_l \gamma_g);$$

demnach hat man

$$\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i \varepsilon_k \Sigma_i X_i' \cos a_i = -\Sigma_h \Sigma_i \Sigma_k n_{hik} f_h \beta_i \gamma_k$$

und analoge Ausdrücke für $\Sigma X_i' \cos b_i$ und $\Sigma X_i' \cos c_i$:

$$(43.) \quad \begin{cases} \Sigma X_i' \cos a_i = -\dfrac{\Sigma_h \Sigma_i \Sigma_k n_{hik} f_h \beta_i \gamma_k}{\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i \varepsilon_k} = -\dfrac{\Sigma_i \Sigma_k p_{ik} \beta_i \gamma_k}{\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i \varepsilon_k}, \\ \Sigma X_i' \cos b_i = -\dfrac{\Sigma_h \Sigma_i \Sigma_k n_{hik} f_h \gamma_i \alpha_k}{\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i \varepsilon_k} = -\dfrac{\Sigma_i \Sigma_k p_{ik} \gamma_i \alpha_k}{\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i \varepsilon_k}, \\ \Sigma X_i' \cos c_i = -\dfrac{\Sigma_h \Sigma_i \Sigma_k n_{hik} f_h \alpha_i \beta_k}{\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i \varepsilon_k} = -\dfrac{\Sigma_i \Sigma_k p_{ik} \alpha_i \beta_k}{\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i \varepsilon_k}, \\ \qquad p_{ik} = \Sigma_h n_{hik} f_h. \end{cases}$$

Auch diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn man $\alpha_i' \beta_i' \gamma_i' \delta_i' \varepsilon_i'$ statt der $\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i \varepsilon_i$ einführt; man findet

$$(43^*.) \quad \begin{cases} X_1' = +\dfrac{\Sigma_i \Sigma_k p_{ik} \beta_i' \gamma_k'}{\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i' \varepsilon_k'}, \\ X_2' = +\dfrac{\Sigma_i \Sigma_k p_{ik} \gamma_i' \alpha_k'}{\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i' \varepsilon_k'}, \\ X_3' = +\dfrac{\Sigma_i \Sigma_k p_{ik} \alpha_i' \beta_k'}{\Sigma_i \Sigma_k m_{ik} \delta_i' \varepsilon_k'}. \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Die osculirenden Kugelflächen dieser Oberfläche gehen, wie wir wissen, sämmtlich durch den Coordinatenanfangspunkt; wenn man daher diese Fläche mittelst reciproker Radien, den Nullpunkt der Coordinaten zum Centrum der Transformation genommen, transformirt, so muss eine Fläche hervorgehen, die in dem den sphärischen Linien entsprechenden System

von Krümmungslinien plan ist. Ich will noch die analytische Darstellung derselben geben.

Die Coordinaten X_i'' des Punktes der transformirten Fläche, der dem Punkte X_i' correspondirt, sind

$$X_i'' = 2a\frac{X_i'}{\Sigma_i X_i'^2}, \qquad (i=1,2,3)$$

wenn $2a$ das constante Product zugehöriger Radienvectoren bezeichnet. — Nun folgt aus der Gleichung für eine Osculationskugel der Fläche (43.) die Relation $\Sigma X_i'^2 = 2\Sigma X_i' X_i^{0\prime}$, der man auch die Form geben kann:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Sigma_k X_k'^2 &= \Sigma_k X_k' \cos a_k \Sigma_k X_k^{0\prime}\cos a_k + \Sigma_k X_k'\cos b_k \Sigma_k X_k^{0\prime}\cos b_k + \Sigma_k X_k'\cos c_k \Sigma_k X_k^{0\prime}\cos c_k \\
&= \mathfrak{A}\,\Sigma X_k'\cos a_k + \mathfrak{B}\,\Sigma X_k'\cos b_k + \mathfrak{C}\,\Sigma X_k'\cos c_k \\
&= \Sigma_i f_i \alpha_i \Sigma_k X_k'\cos a_k + \Sigma_i f_i \beta_i \Sigma_k X_k'\cos b_k + \Sigma_i f_i \gamma_i \Sigma_k X_k'\cos c_k \\
&= X_1'\Sigma_i f_i \alpha_i' + X_2'\Sigma_i f_i \beta_i' + X_3'\Sigma_i f_i \gamma_i'. \qquad \binom{i=1,2,3,4,5}{k=1,2,3}
\end{aligned}$$

Man hat demnach in Rücksicht auf (43*.)

$$\tfrac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i'\varepsilon_k'\Sigma_i X_i'^2 = \Sigma_h\Sigma_i\Sigma_k \alpha_h'\beta_i'\gamma_k'(f_h p_{ik} + f_i p_{kh} + f_k p_{hi}).$$

Man bezeichne nun $f_h p_{ik}+f_i p_{kh}+f_k p_{hi}$ abkürzend mit q_{gl}, wenn gl die beiden mit hik eine gerade Permutation von 1 2 3 4 5 bildenden Zahlen sind; dann schreibt sich die obige Relation einfacher wie folgt:

$$\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i'\varepsilon_k'\Sigma X_i'^2 = 2\Sigma_i\Sigma_k q_{ik}\delta_i'\varepsilon_k',$$

und man erhält die Gleichungen der Fläche mit einem System planer Krümmungslinien in folgender Gestalt:

$$(44.)\quad \begin{cases}
X_1'' = a\dfrac{\Sigma_i\Sigma_k p_{ik}\beta_i'\gamma_k'}{\Sigma_i\Sigma_k q_{ik}\delta_i'\varepsilon_k'}, \\[2ex]
X_2'' = a\dfrac{\Sigma_i\Sigma_k p_{ik}\gamma_i'\alpha_k'}{\Sigma_i\Sigma_k q_{ik}\delta_i'\varepsilon_k'}, \\[2ex]
X_3'' = a\dfrac{\Sigma_i\Sigma_k p_{ik}\alpha_i'\beta_k'}{\Sigma_i\Sigma_k q_{ik}\delta_i'\varepsilon_k'}.
\end{cases} \qquad (i,k=1,2,3,4,5)$$

$$p_{ik} = \Sigma_h n_{hik} f_h, \quad q_{gl} = f_h p_{ik} + f_i p_{kh} + f_k p_{hi}, \quad \Sigma_i f_i^2 = 0.$$

Diese Form ist wesentlich von der verschieden, welche Herr *Enneper* in seiner Abhandlung über Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien (Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Bd. XXIII, 1878, p. 35) den Gleichungen dieser Fläche gegeben hat. Auch lassen sich beide Formen nicht ohne complicirte Rechnungen auf einander zurückführen.

III. Besondere Fälle.

a) Die osculatorischen Kugelflächen schneiden die Fläche rechtwinklig.

Zunächst machen wir die Annahme, dass die Kugeln, welche die Krümmungslinien (u) enthalten, die Fläche unter rechten Winkeln schneiden; man hat dann $\sigma = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{1}{q} = \frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dR\cos\sigma}{dv} = 0$ zu setzen. Die ε_i sind wegen der aus (21*.) folgenden Gleichung $\frac{d\varepsilon'_i}{dv} = 0$ constante Grössen; man kann, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$, $\varepsilon_5 = 1$ und gleichzeitig $\alpha_5 = \beta_5 = \gamma_5 = \delta_5 = 0$ annehmen. Die Gleichungen der Fläche (40.) lauten dann:

$$(45.)\quad \begin{cases} \Sigma_i(X_i - X_i^0)\cos a_i = iR\cdot\dfrac{\Sigma_i m_{i5}\alpha_i}{\Sigma_i m_{i5}\delta_i}, \\ \Sigma_i(X_i - X_i^0)\cos b_i = iR\cdot\dfrac{\Sigma_i m_{i5}\beta_i}{\Sigma_i m_{i5}\delta_i}, \\ \Sigma_i(X_i - X_i^0)\cos c_i = iR\cdot\dfrac{\Sigma_i m_{i5}\gamma_i}{\Sigma_i m_{i5}\delta_i}, \end{cases} \qquad (i=1,2,3,4)$$

oder wenn man $\alpha'_i = \alpha_i\cos a_1 + \beta_i\cos b_1 + \gamma_i\cos c_1$, $\beta'_i = \alpha_i\cos a_2 + \beta_i\cos b_2 + \gamma_i\cos c_2$. $\gamma'_i = \alpha_i\cos a_3 + \beta_i\cos b_3 + \gamma_i\cos c_3$ einführt:

$$(45^*.)\quad X_1 - X_1^0 = \frac{iR\,\Sigma_i m_{i5}\alpha'_i}{\Sigma_i m_{i5}\delta_i},\quad X_2 - X_2^0 = \frac{iR\,\Sigma_i m_{i5}\beta'_i}{\Sigma_i m_{i5}\delta_i},\quad X_3 - X_3^0 = \frac{iR\,\Sigma_i m_{i5}\gamma'_i}{\Sigma_i m_{i5}\delta_i}.$$
$$(i=1,2,3,4)$$

Die Bestimmung der Grössen $\alpha_i\beta_i\gamma_i\delta_i$ lässt sich in diesem Falle, wie schon bemerkt, zurückführen auf die Integration von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Zu dem Zwecke gehen wir von den Gleichungen (21*.)

$$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{1}{\varrho}\beta + \frac{i}{p}\delta,\quad \frac{d\beta}{dv} = -\frac{1}{\varrho}\alpha - \frac{1}{r}\gamma,\quad \frac{d\gamma}{dv} = \frac{1}{r}\beta,\quad \frac{d\delta}{dv} = -\frac{i}{p}\alpha$$

aus und suchen Factoren $m_i n_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) von der Beschaffenheit, dass die Grössen $s = m_1\alpha + m_2\beta + m_3\gamma + m_4\delta$ und $t = n_1\alpha + n_2\beta + n_3\gamma + n_4\delta$ durch die Gleichungen

$$\frac{ds}{dv} = At,\quad \frac{dt}{dv} = Bs$$

mit einander in Verbindung stehen, in denen A und B näher zu bestimmende Functionen von v sind. Es zeigt sich, dass die m_i und n_i sämmtlich durch zwei Functionen s_1 und t_1 linear ausdrückbar sind, zwischen denen ähnliche Beziehungen bestehen wie zwischen s und t. In der That, wenn

$$(46.)\quad \begin{cases} s = s_1(\alpha+i\gamma)-t_1(\beta+i\delta), \\ t = -t_1(\alpha-i\gamma)-s_1(\beta-i\delta) \end{cases}$$

gesetzt wird, so lassen sich vier Functionen A, B, C und D der Art bestimmen, dass

$$\frac{ds}{dv} = At, \quad \frac{dt}{dv} = Bs; \quad \frac{ds_1}{dv} = Ct_1, \quad \frac{dt_1}{dv} = Ds_1$$

wird. Es ist nämlich in Rücksicht auf (21*.) und die vorstehenden Gleichungen

$$\frac{ds}{dv} = s_1\Big(\frac{1}{\varrho}\beta+\frac{i}{p}\delta+\frac{i}{r}\beta-D\beta-iD\delta\Big)+t_1\Big(\frac{1}{\varrho}\alpha+\frac{1}{r}\gamma-\frac{1}{p}\alpha+C\alpha+iC\gamma\Big)$$
$$= At = -At_1(\alpha-i\gamma)-As_1(\beta-i\delta),$$

$$\frac{dt}{dv} = t_1\Big(-\frac{1}{\varrho}\beta-\frac{i}{p}\delta+\frac{i}{r}\beta-C\beta+iC\delta\Big)+s_1\Big(\frac{1}{\varrho}\alpha+\frac{1}{r}\gamma+\frac{1}{p}\alpha-D\alpha+iD\gamma\Big)$$
$$= Bs = Bs_1(\alpha+i\gamma)-Bt_1(\beta+i\delta),$$

woraus durch Gleichsetzung der beiderseitigen Coefficienten von $\alpha\beta\gamma\delta$ folgende Gleichungen für A, B, C, D hervorgehen.

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{i}{r}-D=-A; \quad \frac{1}{\varrho}-\frac{1}{p}+C=-A; \quad -\frac{1}{\varrho}+\frac{i}{r}-C=-B; \quad \frac{1}{\varrho}+\frac{1}{p}-D=B,$$

$$\frac{i}{p}-iD=iA; \quad \frac{1}{r}+iC=+iA; \quad -\frac{i}{p}+iC=-iB; \quad \frac{1}{r}+iD=iB,$$

$$2A=\frac{1}{p}-\frac{1}{\varrho}-\frac{i}{r}, \quad 2A=\frac{1}{p}-\frac{1}{\varrho}-\frac{i}{r}, \quad 2B=\frac{1}{p}+\frac{1}{\varrho}-\frac{i}{r}, \quad 2B=\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{p}-\frac{i}{r},$$

$$2D=\frac{1}{p}+\frac{1}{\varrho}+\frac{i}{r}, \quad 2C=\frac{1}{p}-\frac{1}{\varrho}+\frac{i}{r}, \quad 2C=\frac{1}{p}-\frac{1}{\varrho}+\frac{i}{r}, \quad 2D=\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{p}+\frac{i}{r}.$$

Demnach lauten die Differentialgleichungen für s, t, s_1, t_1:

$$(47.)\quad \begin{cases} \dfrac{ds}{dv} = \frac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{\varrho}-\dfrac{i}{r}\Big)t, & \dfrac{ds_1}{dv} = \frac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{\varrho}+\dfrac{i}{r}\Big)t_1, \\ \dfrac{dt}{dv} = \frac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{\varrho}-\dfrac{i}{r}\Big)s, & \dfrac{dt_1}{dv} = \frac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{\varrho}+\dfrac{i}{r}\Big)s_1. \end{cases}$$

Wir ersehen aus ihnen, dass s und s_1 Integrale der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(48.)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dv}\,\dfrac{\Big(\dfrac{ds}{dv}\Big)}{\frac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{\varrho}-\dfrac{i}{r}\Big)} = \frac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{\varrho}-\dfrac{i}{r}\Big)s, \\ \dfrac{d}{dv}\,\dfrac{\Big(\dfrac{ds_1}{dv}\Big)}{\frac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{\varrho}+\dfrac{i}{r}\Big)} = \frac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{\varrho}+\dfrac{i}{r}\Big)s_1 \end{cases}$$

sind. Für t und t_1 lassen sich Gleichungen derselben Form aufstellen: wenn man indessen s und s_1 kennt, so genügt es, um t und t_1 zu bestimmen, auf die Gleichungen (47.) zurückzugehen. Es seien nun s und σ zwei von einander unabhängige Integrale der ersten Gleichung (48.) und s_1 und σ_1 solche der zweiten, denen t und τ resp. t_1 und τ_1 nach den Gleichungen (47.) entsprechen mögen. Man hat dann die Relationen

$$s\frac{d\sigma}{dv}-\sigma\frac{ds}{dv} = \text{Const.}\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\varrho}-\frac{i}{r}\right),$$
$$s_1\frac{d\sigma_1}{dv}-\sigma_1\frac{ds_1}{dv} = \text{Const.}\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\varrho}+\frac{i}{r}\right),$$

in denen die Constanten von Null verschieden sein müssen, und die mit Berücksichtigung von (47.) übergehen in:

$$(49.)\quad \begin{cases} s\,\tau-\sigma\,t = 1, \\ s_1\tau_1-\sigma_1 t_1 = 1, \end{cases}$$

wenn man, was offenbar gestattet ist, die Constanten gleich Eins setzt. Bestimmt man nun α, β, γ, δ aus

$$s = s_1(\alpha+i\gamma)-t_1(\beta+i\delta),\qquad t = -t_1(\alpha-i\gamma)-s_1(\beta-i\delta),$$
$$\sigma = \sigma_1(\alpha+i\gamma)-\tau_1(\beta+i\delta),\qquad \tau = -\tau_1(\alpha-i\gamma)-\sigma_1(\beta-i\delta),$$

so findet man

$$(50.)\quad \begin{cases} \alpha = \tfrac{1}{2}(s\tau_1-t_1\sigma+t\sigma_1-\tau s_1), \\ \beta = \tfrac{1}{2}(s\sigma_1-\sigma s_1-t\tau_1+\tau t_1), \\ \gamma = -\frac{i}{2}(s\tau_1-t_1\sigma-t\sigma_1+\tau s_1), \\ \delta = -\frac{i}{2}(s\sigma_1-\sigma s_1+t\tau_1-\tau t_1). \end{cases}$$

In (50.) sind die vollständigen Integralgleichungen des Systems (21*.) gegeben, wenn darin vier willkürliche Constanten enthalten sind. Verstehen wir von nun an unter s und σ resp. s_1 und σ_1 particuläre, keine willkürlichen Constanten enthaltende Integrale der Gleichungen (48.), welche den Gleichungen (49.) genügen, so kann man in (50.)

$$s,\qquad \sigma,\qquad s_1,\qquad \sigma_1,$$

ersetzen durch resp.

$$as+b\sigma,\quad a's+b'\sigma,\quad cs_1+d\sigma_1,\quad c's_1+d'\sigma_1,$$

und gleichzeitig

$$t,\qquad \tau,\qquad t_1,\qquad \tau_1,$$

durch resp.

$$at+b\tau,\quad a't+b'\tau,\quad ct_1+d\tau_1,\quad c't_1+d'\tau_1,$$

wenn $aba'b'cdc'd'$ sonst willkürliche, nur die Gleichungen

$$ab'-ba' = 1, \quad cd'-dc' = 1$$

befriedigende Constanten sind.

Man findet dann

$$\begin{aligned}
2\alpha &= C_1(s\tau_1+t\sigma_1+\sigma t_1+\tau s_1)+C_2(s\tau_1+t\sigma_1-\sigma t_1-\tau s_1)+C_3(st_1+ts_1+\sigma\tau_1+\tau\sigma_1)+C_4(st_1+ts_1-\sigma\tau_1-\tau\sigma_1),\\
2\beta &= C_1(s\sigma_1-t\tau_1+\sigma s_1-\tau t_1)+C_2(s\sigma_1-t\tau_1-\sigma s_1+\tau t_1)+C_3(ss_1-tt_1+\sigma\sigma_1-\tau\tau_1)+C_4(ss_1-tt_1-\sigma\sigma_1+\tau\tau_1),\\
2i\gamma &= C_1(s\tau_1-t\sigma_1+\sigma t_1-\tau s_1)+C_2(s\tau_1-t\sigma_1-\sigma t_1+\tau s_1)+C_3(st_1-ts_1+\sigma\tau_1-\tau\sigma_1)+C_4(st_1-ts_1-\sigma\tau_1+\tau\sigma_1),\\
2i\delta &= C_1(s\sigma_1+t\tau_1+\sigma s_1+\tau t_1)+C_2(s\sigma_1+t\tau_1-\sigma s_1-\tau t_1)+C_3(ss_1+tt_1+\sigma\sigma_1+\tau\tau_1)+C_4(ss_1+tt_1-\sigma\sigma_1-\tau\tau_1),
\end{aligned}$$

$$C_1 = \tfrac{1}{2}(ad'-a'd+bc'-b'c);\; C_2 = \tfrac{1}{2}(ad'-a'd-bc'+b'c);\; C_3 = \tfrac{1}{2}(ac'-a'c+bd'-b'd);\; C_4 = \tfrac{1}{2}(ac'-a'c-bd'+b'd).$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \tfrac{1}{2}(s\tau_1+t\sigma_1+\sigma t_1+\tau s_1);\; \beta_1 = \tfrac{1}{2}(s\sigma_1-t\tau_1+\sigma s_1-\tau t_1);\; \gamma_1 = -\frac{i}{2}(s\tau_1-t\sigma_1+\sigma t_1-\tau s_1);\; \delta_1 = -\frac{i}{2}(s\sigma_1+t\tau_1+\sigma s_1+\tau t_1),\\
\alpha_2 &= \frac{i}{2}(s\tau_1+t\sigma_1-\sigma t_1-\tau s_1);\; \beta_2 = \frac{i}{2}(s\sigma_1-t\tau_1-\sigma s_1+\tau t_1);\; \gamma_2 = \tfrac{1}{2}(s\tau_1-t\sigma_1-\sigma t_1+\tau s_1);\; \delta_2 = \tfrac{1}{2}(s\sigma_1+t\tau_1-\sigma s_1-\tau t_1),\\
\alpha_3 &= \frac{i}{2}(st_1+ts_1+\sigma\tau_1+\tau\sigma_1);\; \beta_3 = \frac{i}{2}(ss_1-tt_1+\sigma\sigma_1-\tau\tau_1);\; \gamma_3 = \tfrac{1}{2}(st_1-ts_1+\sigma\tau_1-\tau\sigma_1);\; \delta_3 = \tfrac{1}{2}(ss_1+tt_1+\sigma\sigma_1+\tau\tau_1),\\
\alpha_4 &= \tfrac{1}{2}(st_1+ts_1-\sigma\tau_1-\tau\sigma_1);\; \beta_4 = \tfrac{1}{2}(ss_1-tt_1-\sigma\sigma_1+\tau\tau_1);\; \gamma_4 = -\frac{i}{2}(st_1-ts_1-\sigma\tau_1+\tau\sigma_1);\; \delta_4 = -\frac{i}{2}(ss_1+tt_1-\sigma\sigma_1-\tau\tau_1),
\end{aligned}$$

so überzeugt man sich leicht, dass $\alpha_i\beta_i\gamma_i\delta_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ die vier particulären Werthsysteme sind, welche die Gleichungen (21*.) und die Orthogonalitätsbedingungen befriedigen.

In dem Falle also, dass die osculirenden Kugeln die Fläche orthogonal schneiden, lassen sich die $\alpha_i\beta_i\gamma_i\delta_i$ durch die particulären Integrale von vier linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausdrücken. Man braucht indessen von diesen vier Gleichungen für s, s_1, t und t_1 nur eine, etwa die für s, zu integriren, da für s_1 und σ_1 die zu s und σ conjugirt imaginären Functionen gesetzt werden dürfen, und da t, t_1, τ und τ_1 ohne neue Integrationen mittelst der Gleichungen (47.) zu finden sind.

b) Die Mittelpunktscurve ist plan.

Ganz analog der eben beendeten lässt sich die Behandlung des Falles durchführen, wo die Mittelpunkte der osculirenden Kugelflächen auf einer ebenen Curve liegen. Die Gleichungen (21*.) vermindern sich wiederum um eine, da für eine ebene Mittelpunktscurve die Torsion $\frac{1}{r} = 0$ wird. Es ist $\frac{d\gamma}{dv} = 0$, und man kann

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0, \; \gamma_5 = 1, \quad \alpha_5 = \beta_5 = \delta_5 = \varepsilon_5 = 0$$

setzen. Verlegt man die $(X_1 X_2)$-Ebene in die der planen Mittelpunktscurve, so hat man, wenn ϑ der Winkel ist, den die positive X_1-Richtung mit der im Sinne des positiven dv verlaufenden Tangente der Curve bildet,

$$\begin{array}{llll} \cos a_1 = \cos\vartheta, & \cos a_2 = \sin\vartheta, & \cos a_3 = 0, & X_3^0 = 0, \\ \cos b_1 = -\sin\vartheta, & \cos b_2 = \cos\vartheta, & \cos b_3 = 0, & \\ \cos c_1 = 0, & \cos c_2 = 0, & \cos c_3 = 1, & \frac{d\vartheta}{dv} = \frac{1}{\varrho} \end{array}$$

und für die Fläche die Gleichungen:

$$(51.)\quad \left\{ \begin{aligned} (X_1-X_1^0)\cos\vartheta+(X_2-X_2^0)\sin\vartheta &= i\,\frac{R\cos\sigma\,\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\alpha_i\delta_k+R\sin\sigma\,\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\alpha_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}, \\ -(X_1-X_1^0)\sin\vartheta+(X_2-X_2^0)\cos\vartheta &= i\,\frac{R\cos\sigma\,\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\beta_i\delta_k+R\sin\sigma\,\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\beta_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}, \\ X_3 &= i\,\frac{R\cos\sigma\,\Sigma_i m_{5i}\delta_i+R\sin\sigma\,\Sigma_i m_{5i}\varepsilon_i}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}. \\ &(i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{aligned} \right.$$

Was nun die Integration der Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{1}{\varrho}\beta+\frac{i}{p}\delta,\quad \frac{d\beta}{dv} = -\frac{1}{\varrho}\alpha,\quad \frac{d\delta}{dv} = -\frac{i}{p}\alpha+\frac{1}{q}\varepsilon,\quad \frac{d\varepsilon}{dv} = -\frac{1}{q}\delta$$

anbelangt, so macht der Umstand, dass sie in der Form den vorher behandelten

$$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{1}{\varrho}\beta+\frac{i}{p}\delta,\quad \frac{d\beta}{dv} = -\frac{1}{\varrho}\alpha-\frac{1}{r}\gamma,\quad \frac{d\gamma}{dv} = \frac{1}{r}\beta,\quad \frac{d\delta}{dv} = -\frac{i}{p}\alpha$$

vollständig gleichen, eine neue Integration überflüssig. Die letzteren gehen in die ersteren durch folgende gleichzeitige Vertauschungen über:

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \frac{1}{\varrho},\quad -\frac{1}{r},\quad \frac{i}{p},$$

mit

$$\alpha,\quad \delta,\quad \varepsilon,\quad \beta,\quad \frac{i}{p},\quad \frac{1}{q},\quad \frac{1}{\varrho}.$$

Führen wir dieselben in (47.) und (48.) ein und ersetzen dabei t durch it, ebenso t_1 durch it_1, so gehen Gleichungen zur Bestimmung von s, t, s_1, t_1 hervor, aus denen das Imaginäre verschwunden ist:

$$(52.)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{ds}{dv} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{q}\right)t, & \frac{ds_1}{dv} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{q}\right)t_1, \\ \frac{dt}{dv} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{q}\right)s, & \frac{dt_1}{dv} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{q}\right)s_1; \end{aligned} \right.$$

$$
(53.)\quad \begin{cases}
\dfrac{d}{dv}\,\dfrac{\dfrac{ds}{dv}}{\frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{\varrho}-\dfrac{1}{q}\right)} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{\varrho}+\dfrac{1}{q}\right)s, \\[3ex]
\dfrac{d}{dv}\,\dfrac{\dfrac{ds_1}{dv}}{\frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{\varrho}+\dfrac{1}{q}\right)} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{\varrho}-\dfrac{1}{q}\right)s_1.
\end{cases}
$$

Nunmehr ist die Integration dieser beiden Gleichungen nothwendig, da s_1 nicht mehr zu s conjugirt imaginär ist; es seien s, σ zwei particuläre Integrale der ersten von ihnen, s_1, σ_1 solche der zweiten, und $t\tau$, $t_1\tau_1$ die nach Vorschrift von (52.) aus denselben hergeleiteten Functionen; ferner sei auch jetzt

$$
(54.)\qquad s\tau-\sigma t = 1,\quad s_1\tau_1-\sigma_1 t_1 = 1.
$$

Die den Gleichungen (46.) entsprechenden lauten dann:

$$
\begin{aligned}
s &= s_1(\alpha+i\varepsilon)-it_1(\delta+i\beta), & it &= -it_1(\alpha-i\varepsilon)-s_1(\delta-i\beta),\\
\sigma &= \sigma_1(\alpha+i\varepsilon)-i\tau_1(\delta+i\beta), & i\tau &= -i\tau_1(\alpha-i\varepsilon)-\sigma_1(\delta-i\beta);
\end{aligned}
$$

aus ihnen findet man:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \tfrac{1}{2}(s\tau_1-\sigma t_1+t\sigma_1-\tau s_1),\\
\beta &= \tfrac{1}{2}(\sigma s_1-s\sigma_1+t\tau_1-\tau t_1),\\
\delta &= \frac{i}{2}(\sigma s_1-s\sigma_1-t\tau_1+\tau t_1),\\
\varepsilon &= -\frac{i}{2}(s\tau_1-\sigma t_1-t\sigma_1+\tau s_1).
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich, wie der Vergleich lehrt, von den in (50.) zusammengestellten nur dadurch, dass an die Stelle von β und γ $-\beta$ und ε getreten sind. Mit Berücksichtigung dieser Aenderung liefert das oben aufgestellte Gleichungssystem für $\alpha_i\beta_i\gamma_i\delta_i$ unmittelbar die vier particulären orthogonalen Werthsysteme für $\alpha_i\beta_i\delta_i\varepsilon_i$:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(s\tau_1+t\sigma_1+\sigma t_1+\tau s_1);\ \beta_1 = -\tfrac{1}{2}(s\sigma_1-t\tau_1+\sigma s_1-\tau t_1);\ \delta_1 = -\frac{i}{2}(s\sigma_1+t\tau_1+\sigma s_1+\tau t_1);\ \varepsilon_1 = -\frac{i}{2}(s\tau_1-t\sigma_1+\sigma t_1-\tau s_1),\\
&\alpha_2 = \frac{i}{2}(s\tau_1+t\sigma_1-\sigma t_1-\tau s_1);\ \beta_2 = -\frac{i}{2}(s\sigma_1-t\tau_1-\sigma s_1+\tau t_1);\ \delta_2 = \tfrac{1}{2}(s\sigma_1+t\tau_1-\sigma s_1-\tau t_1);\ \varepsilon_2 = \tfrac{1}{2}(s\tau_1-t\sigma_1-\sigma t_1+\tau s_1),\\
&\alpha_3 = \frac{i}{2}(st_1+ts_1+\sigma\tau_1+\tau\sigma_1);\ \beta_3 = -\frac{i}{2}(ss_1-tt_1+\sigma\sigma_1-\tau\tau_1);\ \delta_3 = \tfrac{1}{2}(ss_1+tt_1+\sigma\sigma_1+\tau\tau_1);\ \varepsilon_3 = \tfrac{1}{2}(st_1-ts_1+\sigma\tau_1-\tau\sigma_1),\\
&\alpha_4 = \tfrac{1}{2}(st_1+ts_1-\sigma\tau_1-\tau\sigma_1);\ \beta_4 = -\tfrac{1}{2}(ss_1-tt_1-\sigma\sigma_1+\tau\tau_1);\ \delta_4 = -\frac{i}{2}(ss_1+tt_1-\sigma\sigma_1-\tau\tau_1);\ \varepsilon_4 = -\frac{i}{2}(st_1-ts_1-o\tau_1+\tau\sigma_1).
\end{aligned}
$$

Zwei Unter-Klassen der zuletzt behandelten Flächenfamilie, von denen die eine auch der unter *a*) untersuchten Familie zuzuzählen ist, geben zu interessanten geometrischen Betrachtungen Anlass. Wir wollen uns erstens mit den Flächen beschäftigen, bei denen die osculirenden Kugeln der sphärischen Krümmungslinien ihre Centren in einer Ebene haben und die Fläche unter rechten Winkeln schneiden, und zweitens mit denjenigen, für welche die Mittelpunktscurve eine Gerade ist.

c) *Die osculatorischen Kugelflächen schneiden die Fläche rechtwinklig und haben eine plane Mittelpunktscurve.*

Setzt man $\cos\sigma = 0$, womit die erste Annahme eingeführt wird, so gehen in (52.) wegen $\frac{1}{q} = \frac{1}{R\sin\sigma}\,\frac{dR\cos\sigma}{dv} = 0$ die beiden Paare von Gleichungen in einander über, und man kann $s_1 = s$, $t_1 = t$, $\sigma_1 = \sigma$, $\tau_1 = \tau$ annehmen. Dadurch werden α_2, β_2, δ_2, ε_1, ε_3 und ε_4 zu Null, während ε_2 den Werth Eins annimmt.

In den Gleichungen der Fläche (51.) fallen die mit $\cos\sigma$ behafteten Glieder fort, und man erhält:

$$(55.)\quad \begin{cases} (X_1-X_1^{(0)})\cos\vartheta+(X_2-X_2^{(0)})\sin\vartheta = \dfrac{iR(m_{12}\alpha_1+m_{13}\alpha_3+m_{14}\alpha_4)}{m_{12}\delta_1+m_{13}\delta_3+m_{14}\delta_4}, \\ -(X_1-X_1^{(0)})\sin\vartheta+(X_2-X_2^{(0)})\cos\vartheta = \dfrac{iR(m_{12}\beta_1+m_{13}\beta_3+m_{14}\beta_4)}{m_{12}\delta_1+m_{13}\delta_3+m_{14}\delta_4}, \\ X_3 = \dfrac{iR\,m_{52}}{m_{12}\delta_1+m_{13}\delta_3+m_{14}\delta_4}. \end{cases}$$

Ich führe eine neue Bezeichnung ein. Mit der Bestimmung, dass beziehentlich $h = 1, 3, 4$ und $i = 1, 2, 3$ zusammengehörige Werthe seien, setze ich

$$\delta_h = \lambda'_i, \quad \alpha_h\cos\vartheta-\beta_h\sin\vartheta = \mu'_i, \quad \alpha_h\sin\vartheta+\beta_h\cos\vartheta = \nu'_i,$$

$$\frac{m_{2h}}{im_{25}} = l'_i, \qquad \frac{m_{5h}}{im_{25}} = m'_i, \qquad \frac{n_{5h}}{m_{25}} = n'_i.$$

Dann ist $\lambda_i\mu_i\nu_i$ ein Orthogonal-System mit der Determinante $\Sigma\pm\lambda_1\mu_2\nu_3 = +1$, für welches die Differentialgleichungen bestehen:

$$(56.)\quad \frac{d\lambda_i}{dv} = -\frac{i}{w'_1}\mu'_i-\frac{i}{w'_2}\nu'_i, \quad \frac{d\mu'_i}{dv} = \frac{i}{w'_1}\lambda'_i, \quad \frac{d\nu'_i}{dv} = \frac{i}{w'_2}\lambda'_i, \quad (i=1,2,3)$$

wo $\frac{1}{w'_1} = \frac{1}{p}\cos\vartheta = \frac{1}{R}\cos\vartheta$, $\frac{1}{w'_2} = \frac{1}{p}\sin\vartheta = \frac{1}{R}\sin\vartheta$.

Lässt man in den auf Seite 136 zusammen gestellten Gleichungen $g = 2$, $h = 5$ sein, so zeigt sich, dass $l_i m_i n_i$ gleichfalls den Bedingungen der Orthogonalität genügen. Das Zeichen der Determinante $\Sigma\pm l_1 m_2 n_3 = \pm 1$

ist identisch mit dem von

$$\frac{m_2 n_3 - n_2 m_3}{l_1} = \pm 1.$$

Nun ist

$$\frac{m_2 n_3 - n_2 m_3}{l_1} = \frac{m_{53} n_{254} - m_{54} n_{253}}{m_{25} m_{21}} = \frac{-m_{13} m_{53} - m_{14} m_{54}}{m_{25} m_{21}} = \frac{m_{12} m_{52}}{m_{21} m_{25}} = +1,$$

also

$$\Sigma \pm l_1 m_2 n_3 = +1.$$

Wendet man für $g = 2$, $h = 5$ die Gleichungen (F^*.) an, in denen nach (37.) $t = 0$ zu setzen ist, so resultirt:

$$(57.) \quad \frac{dl'_i}{du} = \frac{i}{p'} n'_i, \quad \frac{dm'_i}{du} = \frac{1}{q'} n'_i, \quad \frac{dn'_i}{du} = -\frac{i}{p'} l'_i - \frac{1}{q'} m'_i, \qquad (i=1,2,3)$$

wenn man der Kürze wegen $-\frac{s_2}{m_{25}}$ mit $\frac{1}{p'}$ und $+\frac{is_5}{m_{25}}$ mit $\frac{1}{q'}$ bezeichnet.

Die Gleichungen der Fläche lauten in der neuen Bezeichnung:

$$(58.) \quad \begin{cases} X_1 - X_1^0 = iR \dfrac{\Sigma_i l'_i \mu'_i}{\Sigma_i l'_i \lambda'_i}, \\ X_2 - X_2^0 = iR \dfrac{\Sigma_i l'_i \nu'_i}{\Sigma_i l'_i \lambda'_i}, \\ X_3 = \dfrac{R}{\Sigma_i l'_i \lambda'_i}. \end{cases} \qquad (i=1,2,3)$$

Die Richtungscosinus der Krümmungslinien und der Normale in einem Punkte X_i dieser Fläche, welche ich wie im Abschnitt I mit $x'_i y'_i z'_i$ ($i = 1, 2, 3$) bezeichne, finde ich mit Hilfe von (34.), wenn ich beachte, dass

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x'_1 \cos\vartheta + x'_2 \sin\vartheta, & \xi_2 &= -x'_1 \sin\vartheta + x'_2 \cos\vartheta, & \xi_3 &= x'_3, \\ \eta_1 &= y'_1 \cos\vartheta + y'_2 \sin\vartheta, & \eta_2 &= -y'_1 \sin\vartheta + y'_2 \cos\vartheta, & \eta_3 &= y'_3, \\ \zeta_1 &= z'_1 \cos\vartheta + z'_2 \sin\vartheta, & \zeta_2 &= -z'_1 \sin\vartheta + z'_2 \cos\vartheta, & \zeta_3 &= z'_3: \end{aligned}$$

$$(59.) \quad \begin{cases} x'_1 = -\dfrac{\Sigma_i m'_i \nu'_i}{\Sigma_i l'_i \lambda'_i}, & x'_2 = \dfrac{\Sigma_i m'_i \mu'_i}{\Sigma_i l'_i \lambda'_i}, & x'_3 = i\dfrac{\Sigma_i n'_i \lambda'_i}{\Sigma_i l'_i \lambda'_i}, \\ y'_1 = -i\dfrac{\Sigma_i l'_i \mu'_i}{\Sigma_i l'_i \lambda'_i}, & y'_2 = -i\dfrac{\Sigma_i l'_i \nu'_i}{\Sigma_i l'_i \lambda'_i}, & y'_3 = -\dfrac{1}{\Sigma_i l'_i \lambda'_i}, \\ z'_1 = -\dfrac{\Sigma_i n'_i \nu'_i}{\Sigma_i l'_i \lambda'_i}, & z'_2 = \dfrac{\Sigma_i n'_i \mu'_i}{\Sigma_i l'_i \lambda'_i}, & z'_3 = -i\dfrac{\Sigma_i m'_i \lambda'_i}{\Sigma_i l'_i \lambda'_i}. \end{cases} \qquad (i=1,2,3)$$

d) Die Mittelpunktscurve ist eine gerade Linie.

Kehren wir zu den unter *b*) behandelten Flächen zurück und nehmen an, dass die Mittelpunktscurve eine Gerade sei, mit der die Axe der X_1 zusammenfalle.

Dann ist

$$\vartheta = 0, \quad X_2 = 0, \quad \frac{dX_1}{dv} = \cos\vartheta = 1, \quad X_1 = v.$$

Da ferner die Krümmung der Geraden Null ist $\left(\frac{1}{\varrho} = 0\right)$, so sind in (52.) die Gleichungen für s_1 und t_1 identisch mit denjenigen für resp. t und s. Man dürfte demnach t oder τ für s_1, und s oder σ für t_1 setzen; in Rücksicht auf (54.) indessen ist nur die Festsetzung $t_1 = \sigma$, $s_1 = \tau$, $\tau_1 = s$, $\sigma_1 = t$ zulässig.

Durch diese gehen α_4, δ_4, ε_4, β_1, β_2, β_3 in Null über, und β_4 wird $= -(s\tau - t\sigma) = -1$.

Demnach lauten die Ausdrücke für die Coordinaten:

$$X_1 - v = i\frac{R\cos\sigma\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\alpha_i\delta_k + R\sin\sigma\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\alpha_i\varepsilon_k}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k},$$

$$X_2 = -i\frac{R\cos\sigma\Sigma_i m_{4i}\delta_i + R\sin\sigma\Sigma_i m_{4i}\varepsilon_i}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k},$$

$$X_3 = +i\frac{R\cos\sigma\Sigma_i m_{5i}\delta_i + R\sin\sigma\Sigma_i m_{5i}\varepsilon_i}{\Sigma_i\Sigma_k m_{ik}\delta_i\varepsilon_k}. \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

Da

$$\alpha_2\delta_3 - \alpha_3\delta_2 = -\varepsilon_1, \quad \alpha_2\varepsilon_3 - \alpha_3\varepsilon_2 = \delta_1, \quad \delta_2\varepsilon_3 - \varepsilon_2\delta_3 = -\alpha_1, \quad m_{23} = -n_{451} \quad \text{etc.}$$

ist, so lassen sich dieselben auch wie folgt schreiben:

$$X_1 - v = i\frac{R\cos\sigma\Sigma_i n_{45i}\varepsilon_i - R\sin\sigma\Sigma_i n_{45i}\delta_i}{\Sigma_i n_{45i}\alpha_i},$$

$$X_2 = -i\frac{R\cos\sigma\Sigma_i m_{4i}\delta_i + R\sin\sigma\Sigma_i m_{4i}\varepsilon_i}{\Sigma_i n_{45i}\alpha_i},$$

$$X_3 = +i\frac{R\cos\sigma\Sigma_i m_{5i}\delta_i + R\sin\sigma\Sigma_i m_{5i}\varepsilon_i}{\Sigma_i n_{45i}\alpha_i}. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Es sei nun

$$\alpha_h = l_i, \qquad \varepsilon_h = -m_i, \quad \delta_h = n_i,$$

$$\frac{n_{45h}}{m_{45}} = \lambda_i, \quad \frac{i m_{5h}}{m_{45}} = \mu_i, \quad \frac{i m_{4h}}{m_{45}} = \nu_i$$

mit der Bestimmung, dass $h = 2, 1, 3$ und resp. $i = 1, 2, 3$ entsprechende Indices seien, so sind $l_i m_i n_i$ und $\lambda_i \mu_i \nu_i$ zwei Orthogonal-Systeme mit den Determinanten $\Sigma \pm l_1 m_2 n_3 = +1$ und $\Sigma \pm \lambda_1 \mu_2 \nu_3 = +1$, welchen die Differentialgleichungen

$$(60.) \quad \frac{dl_i}{dv} = \frac{i}{p}n_i, \qquad \frac{dm_i}{dv} = \frac{1}{q}n_i, \qquad \frac{dn_i}{dv} = -\frac{i}{p}l_i - \frac{1}{q}m_i,$$

$$(61.) \quad \frac{d\lambda_i}{du} = \frac{i}{w_1}\mu_i + \frac{i}{w_2}\nu_i, \quad \frac{d\mu_i}{du} = -\frac{i}{w_1}\lambda_i, \quad \frac{d\nu_i}{du} = -\frac{i}{w_2}\lambda_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

zugehören, von denen die letzteren aus (F^*.) hervorgehen, wenn darin $g = 4$, $h = 5$, $-\frac{s_5}{m_{45}} = \frac{1}{w_1}$ und $-\frac{s_4}{m_{45}} = \frac{1}{w_2}$ gesetzt wird.

Die Gleichungen der Fläche lauten in der neuen Bezeichnung:

$$(62.)\quad \begin{cases} X_1 - v = -i\dfrac{R\cos\sigma\Sigma_i\lambda_i m_i + R\sin\sigma\Sigma_i\lambda_i n_i}{\Sigma_i\lambda_i l_i}, \\ X_2 = -\dfrac{R\cos\sigma\Sigma_i\nu_i n_i - R\sin\sigma\Sigma_i\nu_i m_i}{\Sigma_i\lambda_i l_i}, \\ X_3 = +\dfrac{R\cos\sigma\Sigma_i\mu_i n_i - R\sin\sigma\Sigma_i\mu_i m_i}{\Sigma_i\lambda_i l_i}. \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Bestimmt man nun auch für diese Fläche mit Hülfe von (34.) die Richtungscosinus der Krümmungslinien und der Normale im Punkte X_i, so findet man

$$(63.)\quad \begin{cases} \xi_1 = x_1 = \dfrac{1}{\Sigma_i l_i\lambda_i}, & \xi_2 = x_2 = i\dfrac{\Sigma_i l_i\mu_i}{\Sigma_i l_i\lambda_i}, & \xi_3 = x_3 = i\dfrac{\Sigma_i l_i\nu_i}{\Sigma_i l_i\lambda_i}, \\ \eta_1 = y_1 = i\dfrac{\Sigma_i n_i\lambda_i}{\Sigma_i l_i\lambda_i}, & \eta_2 = y_2 = -\dfrac{\Sigma_i m_i\nu_i}{\Sigma_i l_i\lambda_i}, & \eta_3 = y_3 = \dfrac{\Sigma_i m_i\mu_i}{\Sigma_i l_i\lambda_i}, \\ \zeta_1 = z_1 = -i\dfrac{\Sigma_i m_i\lambda_i}{\Sigma_i l_i\lambda_i}, & \zeta_2 = z_2 = -\dfrac{\Sigma_i n_i\nu_i}{\Sigma_i l_i\lambda_i}, & \zeta_3 = z_3 = \dfrac{\Sigma_i n_i\mu_i}{\Sigma_i l_i\lambda_i}. \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

Ein Vergleich von (59.) und (63.) lehrt eine wichtige Beziehung zwischen den durch (58.) und (62.) dargestellten Flächenfamilien.

Man betrachte neben einer bestimmten Fläche (62.) eine Fläche der Familie (58.), für welche die Functionen $l'_i m'_i n'_i$ in derselben Weise von u abhängen, wie $l_i m_i n_i$ von v, und die Functionen $\lambda'_i\mu'_i\nu'_i$ in derselben Weise von $(-v)$ wie $\lambda_i\mu_i\nu_i$ von u. Eine Fläche von dieser Eigenschaft wird stets zu finden sein. Man hat nur in den zur Bestimmung der $\lambda'_i\mu'_i\nu'_i$ und $l'_i m'_i n'_i$ dienenden Differentialgleichungen (56.) und (57.) $w'_1 = f_1(-v)$, $w'_2 = f_2(-v)$, $p' = \varphi(u)$ und $q' = \psi(u)$ zu setzen, wenn in (61.) und (60.) $w_1 = f_1(u)$, $w_2 = f_2(u)$, $p = \varphi(v)$ und $q = \psi(v)$ ist.

Bringt man nun die zweite Fläche in eine solche Lage zu der ersten, dass von dem Coordinatensystem, auf welches sich die Gleichungen (58.) beziehen, die X_3-Axe mit der X_1-Axe des Coordinatensystems von (62.), die X_2-Axe mit der X_3-Axe und die X_1-Axe mit der X_2-Axe zusammenfallen, dass also die Linie, auf welcher die Mittelpunkte der Osculationskugeln der ersten Fläche sich befinden, normal auf der Ebene steht, die die Mittelpunktscurve der zweiten enthält, so wird, wie aus den Gleichungen (63.)

und (59.) hervorgeht, die Richtung der sphärischen Krümmungslinie eines Punktes der einen Fläche dieselbe sein wie die der nicht sphärischen Krümmungslinie in dem entsprechenden Punkte der anderen Fläche, und umgekehrt; dabei entspricht dem Punkte $u = u_0$, $v = v_0$ der ersten Fläche der Punkt $u = v_0$, $v = -u_0$ auf der zweiten Fläche.

Beachtet man noch, dass die Fläche (62.), von der wir ausgingen, durch jede andere derselben Gruppe angehörige, also mit ihr ähnlich liegende Fläche ersetzt werden kann, und dass auch von jeder anderen Fläche, welche mit der in Betracht kommenden Fläche (58.) zu derselben Gruppe gehört, dasselbe gilt, was wir eben hinsichtlich der letzteren erfahren haben, so kann man folgendes Theorem aussprechen:

„Jeder Gruppe der Flächen, deren ein System von Krümmungslinien in Kugeln enthalten ist, die ihre Mittelpunkte auf einer Geraden G haben, entspricht eine Gruppe der Flächen, deren ein System von Krümmungslinien in Kugeln enthalten ist, welche die Fläche rechtwinklig schneiden und ihre Centra in einer Ebene E haben, in der Art, dass sich zwei Flächen aus entsprechenden Gruppen stets in eine Lage bringen lassen, in der die sphärischen Krümmungslinien der einen den nicht sphärischen Linien der anderen parallel sind; die Gerade G kommt dabei senkrecht zu der Ebene E zu stehen."

Zwei entsprechende Gruppen haben eine Anzahl von Flächen gemein, welche in beiden Systemen von Krümmungslinien sphärisch sind. Wir finden sie, wenn wir die Bedingung aufsuchen, unter der die Krümmungslinien (v) der Fläche (62.) in Kugeln enthalten sind, welche die Fläche orthogonal schneiden.

Die Gleichung (7.) liefert die Relation, die zwischen f, P und M bestehen muss, wenn das System (u) sphärisch ist. Für ein sphärisches System (v) hat man eine analoge Gleichung zwischen g, Q und N:

$$g = U_1 Q + UN,$$

wo U_1 und U zwei Functionen von u sind, von denen die erstere verschwinden muss, wenn die Osculationskugeln dieses Systems mit der Fläche rechte Winkel bilden. Dieser Fall liegt hier vor. Ersetzt man in $g = NU$ g und N durch ihre Werthe aus (9.):

$$g = \Sigma_i y_i \cos a_i - \cot\sigma \Sigma_i z_i \cos a_i - \frac{dR \sin\sigma}{dv} - \cot\sigma \frac{dR\cos\sigma}{dv} = \eta_1 - \cot\sigma \zeta_1 - \frac{1}{\sin\sigma}\frac{dR}{dv},$$

$$N = \frac{\Sigma_i x_i \cos a_i}{R \sin\sigma} = \frac{1}{R\sin\sigma}\xi_1.$$

so findet man

$$\eta_1 R\sin\sigma - \zeta_1 R\cos\sigma - R\frac{dR}{dv} = U\xi_1.$$

Diese Gleichung liefert nach v differentiirt in Rücksicht auf (18.) und $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} = 0$:

$$R\sin\sigma\cdot\frac{1}{p}(1-\eta_1^2) + \frac{R\sin\sigma}{q}\zeta_1 + \frac{R\cos\sigma}{p}\zeta_1\eta_1 + \frac{R\cos\sigma}{q}\eta_1 + \frac{dR\sin\sigma}{dv}\eta_1 - \frac{dR\cos\sigma}{dv}\zeta_1$$
$$-\frac{d}{dv}\left(R\frac{dR}{dv}\right) = -\frac{U}{p}\eta_1\xi_1,$$

was wegen

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{R\sin\sigma}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dR\cos\sigma}{dv}$$

übergeht in

$$1 - \frac{d}{dv}\left(R\frac{dR}{dv}\right) = 0.$$

Es muss mithin

$$(64.)\quad R^2 = (v-v_0)^2 + c^2$$

sein, wo v_0 und c beliebige Constanten sind, d. h. die Kugeln des Systems (u) haben einen (reellen oder imaginären) Kreis mit dem Radius c gemein. Die gesuchten Flächen erweisen sich also als solche, bei denen die osculirenden Kugeln sämmtlich durch einen Punkt gehen. Flächen dieser Art sind, wie wir wissen, in jeder Gruppe vorhanden. Es gilt nun die Differentialgleichung (53.) für s zu integriren, welcher man, da

$$\frac{1}{\varrho} = 0, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{R\sin\sigma}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dR\cos\sigma}{dv},$$

die Form

$$d\left[\frac{2R\sin\sigma\,ds}{dv - dR\cos\sigma}\right] = \frac{1}{2R\sin\sigma}(dv + dR\cos\sigma).s$$

geben kann.

Zerlegt man die Gleichung (64.) in die beiden folgenden

$$v - v_0 - R\cos\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2},$$
$$v - v_0 + R\cos\sigma = \varepsilon^2(R^2\sin^2\sigma - c^2)$$

und definirt ω durch die Gleichung

$$\frac{1}{R\sin\sigma} = \varepsilon\cdot\frac{d\omega}{d\varepsilon},$$

so geht jene Differentialgleichung über in:

$$-\frac{d}{d\omega}\left(\varepsilon^2 \frac{ds}{d\omega}\right) = \varepsilon\left(\frac{d^2\varepsilon}{d\omega^2} - c^2\varepsilon\right)s,$$

$$\varepsilon\frac{d^2 s}{d\omega^2} + 2\frac{d\varepsilon}{d\omega}\frac{ds}{d\omega} + s\frac{d^2\varepsilon}{d\omega^2} = c^2.\varepsilon s,$$

$$\frac{d^2(s\varepsilon)}{d\omega^2} = c^2.s\varepsilon.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist

$$s = \frac{\text{Const.}\,e^{c\omega} + \text{Const.}\,e^{-c\omega}}{\varepsilon}.$$

Für s und σ sind zwei von einander unabhängige particuläre Integrale zu setzen. Es sei

$$s = \frac{e^{c\omega}}{\sqrt{2c}\,\varepsilon} = \tau_1, \qquad \sigma = \frac{e^{-c\omega}}{\sqrt{2c}\,\varepsilon} = t_1.$$

Nun ist nach (52.)

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{1}{2R\sin\sigma}\,\frac{dv - dR\cos\sigma}{d\omega}\cdot t = -\frac{1}{\varepsilon^2}t,$$

also

$$t = \frac{e^{c\omega}}{\sqrt{2c}}\left(\frac{d\varepsilon}{d\omega} - c\varepsilon\right) = \sigma_1, \qquad \tau = \frac{e^{-c\omega}}{\sqrt{2c}}\left(\frac{d\varepsilon}{d\omega} + c\varepsilon\right) = s_1.$$

Diese Werthe sind in das oben aufgestellte Gleichungssystem für α_i, (β_i), δ_i, ε_i zu substituiren: $\left(\varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{d\omega}\right)$

$$\alpha_1 = \quad l_2 = \frac{1}{4c}\left[e^{2c\omega}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + (\varepsilon' - c\varepsilon)^2\right) + e^{-2c\omega}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + (\varepsilon' + c\varepsilon)^2\right)\right],$$

$$\alpha_2 = \quad l_1 = \frac{i}{4c}\left[e^{2c\omega}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + (\varepsilon' - c\varepsilon)^2\right) - e^{-2c\omega}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + (\varepsilon' + c\varepsilon)^2\right)\right],$$

$$\alpha_3 = \quad l_3 = \frac{i}{2c}\left[\frac{1}{\varepsilon^2} + \varepsilon'^2 - c^2\varepsilon^2\right] = \frac{i}{c}(v - v_0);$$

$$\varepsilon_1 = -m_2 = -\frac{i}{4c}\left[e^{2c\omega}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - (\varepsilon' - c\varepsilon)^2\right) + e^{-2c\omega}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - (\varepsilon' + c\varepsilon)^2\right)\right],$$

$$\varepsilon_2 = -m_1 = \frac{1}{4c}\left[e^{2c\omega}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - (\varepsilon' - c\varepsilon)^2\right) - e^{-2c\omega}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - (\varepsilon' + c\varepsilon)^2\right)\right],$$

$$\varepsilon_3 = -m_3 = \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \varepsilon'^2 + c^2\varepsilon^2\right) = -\frac{1}{c}R\cos\sigma;$$

$$\delta_1 = \quad n_2 = -\frac{i}{2c\varepsilon}\left[e^{2c\omega}(\varepsilon' - c\varepsilon) + e^{-2c\omega}(\varepsilon' + c\varepsilon)\right],$$

$$\delta_2 = \quad n_1 = \frac{1}{2c\varepsilon}\left[e^{2c\omega}(\varepsilon' - c\varepsilon) - e^{-2c\omega}(\varepsilon' + c\varepsilon)\right],$$

$$\delta_3 = \quad n_3 = \frac{1}{c\varepsilon}\varepsilon' = \frac{1}{c}R\sin\sigma.$$

Damit ist alles gefunden, was zur Aufstellung der definitiven Gleichungen (62.) der Fläche nothwendig ist. Um aber leichter verificiren zu können, dass in der That die gefundene Fläche auch in dem System (v) sphärisch ist und den Flächen (58.) zugezählt werden darf, ersetzen wir in (62.) v durch $v_0 - icl_3$, $R\cos\sigma$ durch cm_3 und $R\sin\sigma$ durch cn_3 und finden

$$X_1 - v_0 = -ic\frac{l_3\Sigma\lambda_i l_i + m_3\Sigma\lambda_i m_i + n_3\Sigma\lambda_i n_i}{\Sigma\lambda_i l_i} = -\frac{ic\lambda_3}{\Sigma\lambda_i l_i},$$

$$X_2 = -c\frac{m_3\Sigma\nu_i n_i - n_3\Sigma\nu_i m_i}{\Sigma\lambda_i l_i} = -c\frac{\nu_1 l_2 - \nu_2 l_1}{\Sigma\lambda_i l_i} = c\frac{\lambda_3\Sigma\mu_i l_i - \mu_3\Sigma\lambda_i l_i}{\Sigma\lambda_i l_i},$$

$$X_3 = c\frac{m_3\Sigma\mu_i n_i - n_3\Sigma\mu_i m_i}{\Sigma\lambda_i l_i} = c\frac{\mu_1 l_2 - \mu_2 l_1}{\Sigma\lambda_i l_i} = c\frac{\lambda_3\Sigma\nu_i l_i - \nu_3\Sigma\lambda_i l_i}{\Sigma\lambda_i l_i},$$

$$X_1 - v_0 = c\lambda_3\frac{-i}{\Sigma\lambda_i l_i},$$

$$X_2 + c\mu_3 = c\lambda_3\frac{\Sigma\mu_i l_i}{\Sigma\lambda_i l_i},$$

$$X_3 + c\nu_3 = c\lambda_3\frac{\Sigma\nu_i l_i}{\Sigma\lambda_i l_i},$$

womit der Zweck erreicht ist.

Die Gleichung einer Kugel des Systems (v) ist

$$(X_1 - v_0)^2 + (X_2 + c\mu_3)^2 + (X_3 + c\nu_3)^2 = -c^2\lambda_3^2,$$

die einer Kugel des Systems (u):

$$(X_1 - v)^2 + X_2^2 + X_3^2 = (v - v_0)^2 + c^2;$$

demnach besagt die Gleichung

$$(v - v_0)^2 + (c\mu_3)^2 + (c\nu_3)^2 = -c^2\lambda_3^2 + (v - v_0)^2 + c^2,$$

dass „die Kugeln des einen Systems von den Kugeln des anderen Systems rechtwinklig geschnitten werden".

e) Die osculatorischen Kugelflächen sind concentrisch.

Zum Schluss muss ich noch auf den Fall zurückkommen, der von vornherein von unseren Betrachtungen ausgeschlossen war, nämlich den Fall, dass die osculirenden Kugeln des sphärischen Systems (u) sämmtlich concentrisch sind.

Verlegt man den Coordinatenanfangspunkt in den gemeinsamen Mittelpunkt der Kugeln, so lauten die Gleichungen der Fläche (6.)

$$X_i = z_i R\cos\sigma - y_i R\sin\sigma,$$

aus denen durch Differentiation nach v die Beziehungen (vgl. (8.) und (9.))

$$gy_i = -x_i NR\sin\sigma + \left(QR\cos\sigma - \frac{dR\sin\sigma}{dv}\right)y_i + \left(\frac{dR\cos\sigma}{dv} + QR\sin\sigma\right)z_i,$$

$$R\sin\sigma N = 0,$$

$$R\sin\sigma Q = -\frac{dR\cos\sigma}{dv},$$

$$g = QR\cos\sigma - \frac{dR\sin\sigma}{dv} = -\cot\sigma\frac{dR\cos\sigma}{dv} - \frac{dR\sin\sigma}{dv} = -\frac{1}{\sin\sigma}\frac{dR}{dv}$$

hervorgehen, in Rücksicht auf welche (4^b.) folgende Differentialgleichungen für $x_i y_i z_i$ liefert:

$$\frac{\partial x_i}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y_i}{\partial v} = +z_i\frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dR\cos\sigma}{dv}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial v} = -y_i\frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dR\cos\sigma}{dv}.$$

Demnach ist für

$$\frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dR\cos\sigma}{dv} = \frac{d\varphi}{dv}:$$

$$x_i = a_i, \quad y_i = b_i\cos\varphi + c_i\sin\varphi, \quad z_i = -b_i\sin\varphi + c_i\cos\varphi,$$

wo $a_i b_i c_i$, die von u abhängenden Integrationsconstanten, den Orthogonalitäts-Bedingungen:

$$\Sigma a_i^2 = \Sigma b_i^2 = \Sigma c_i^2 = 1, \quad \Sigma b_i c_i = \Sigma a_i c_i = \Sigma a_i b_i = 0$$

genügen müssen.

Setzt man

$$\frac{da_i}{du} = \omega_1 b_i + \omega_2 c_i, \quad \frac{db_i}{du} = -\omega_1 a_i, \quad \frac{dc_i}{du} = -\omega_2 a_i,$$

so gehen aus (4^a.) für P und M die Werthe hervor:

$$P = \omega_1\sin\varphi - \omega_2\cos\varphi, \quad M = -\omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi.$$

Die Gleichungen der Flächen sind:

$$X_i = b_i(-\cos\varphi R\sin\sigma - \sin\varphi R\cos\sigma) + c_i(\cos\varphi R\cos\sigma - \sin\varphi R\sin\sigma),$$

$$X_i = b_i V + c_i V_1,$$

oder

$$X_1 a_1 + X_2 a_2 + X_3 a_3 = 0,$$
$$X_1 b_1 + X_2 b_2 + X_3 b_3 = V,$$
$$X_1 c_1 + X_2 c_2 + X_3 c_3 = V_1.$$

Aus der ersten von ihnen erhellt, dass die Krümmungslinien (v) plan sind, und dass ihre Ebenen durch den Mittelpunkt der concentrischen Kugelflächen gehen.

Zieht man durch den Nullpunkt eine gerade Linie mit den Richtungscosinus $b_1 b_2 b_3$, so beschreibt sie, wenn u sich ändert, einen Kegel, dessen

Tangentenebene die Gleichung

$$X_1 c_1 + X_2 c_2 + X_3 c_3 = 0$$

hat, während

$$X_1 a_1 + X_2 a_2 + X_3 a_3 = 0$$

die durch die Spitze des Kegels gehende Normalebene darstellt.

Unsere Fläche wird demnach durch eine ebene Curve erzeugt, welche sich so bewegt, dass zwei feste, auf einander senkrecht stehende Axen ihrer Ebene mit ihrem Schnittpunkt stets in der Spitze eines Kegels bleiben, auf dessen Mantel die eine von ihnen gleitet und die andere senkrecht steht. (Vgl. *Monge:* Analyse appliquée § XXIV p. 286 (Éd. V)).

Berlin, August 1882.

Druckfehler.

In den Ausdrücken $R \sin\sigma \frac{d\mathfrak{D}}{dv}$ und $R \sin\sigma \frac{d\mathfrak{E}}{dv}$ des Gleichungssystems (15.) Seite 127 fehlt der Buchstabe σ.

Note on Parallel Surfaces.

(By *Thomas Craig*, Johns Hopkins University, Baltimore U.S.A.).

I wish first to correct an error that I find in my previous paper on the parallel surface to the ellipsoid (this Journal vol. 93, pages 260—261). On page 260 the values of A, B, C should read:

$$A = \frac{b^2c^2}{4} \cdot \frac{\xi(u-v)}{\alpha\beta\gamma.\xi\eta\zeta}, \quad B = \frac{c^2a^2}{4} \cdot \frac{\eta(u-v)}{\alpha\beta\gamma.\xi\eta\zeta}, \quad C = \frac{a^2b^2}{4} \cdot \frac{\zeta(u-v)}{\alpha\beta\gamma.\xi\eta\zeta}.$$

On page 261 read from the top as follows:

$$„E\sqrt{EG} = \frac{i}{16} \frac{u\sqrt{uv}(u-v)^2}{\varDelta_1^3\varDelta_2}, \quad G\sqrt{EG} = \frac{i}{16} \frac{v\sqrt{uv}(u-v)^2}{\varDelta_1\varDelta_2^3}.$$

We also find readily:

$$E' = -\frac{i}{16} \frac{\varDelta(u-v)^2}{\varDelta_1^3\varDelta_2}, \quad G' = -\frac{i}{16} \frac{\varDelta(u-v)^2}{\varDelta_1\varDelta_2^3}.$$

Now denoting by R' and R'' the principal radii of curvature of the ellipsoid at the point (ξ, η, ζ) we have

$$\frac{1}{R'} = \frac{E'}{E\sqrt{EG}}, \quad \frac{1}{R''} = \frac{G'}{G\sqrt{EG}}.$$

Making the necessary substitutions these become

$$\frac{1}{R'} = \frac{-\varDelta}{u\sqrt{uv}}, \quad \frac{1}{R''} = \frac{-\varDelta}{v\sqrt{uv}},$$

and for the measure of curvature of the ellipsoid at this point we have

$$K = \frac{1}{R'R''} = \frac{\varDelta^2}{u^2v^2} = \frac{a^2b^2c^2}{u^2v^2} = \frac{P^4}{a^2b^2c^2}“.$$

In the above P denotes the central perpendicular upon the tangent plane to the ellipsoid at a given point (ξ, η, ζ).

In the preceding the coordinates of the point (ξ, η, ζ) of the ellipsoid have been given in the form

$$\xi = \sqrt{\frac{a^2.a^2+u.a^2+v}{-\beta\gamma}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{b^2.b^2+u.b^2+v}{-\gamma\alpha}}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{c^2.c^2+u.c^2+v}{-\alpha\beta}}$$

where

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma = (b^2-c^2), \quad (c^2-a^2), \quad (a^2-b^2).$$

I gave in my preceding paper the value of the ratio of the element of area of the parallel surface to the corresponding element of area on the ellipsoid. Calling dS the element of area on the parallel surface and $d\Sigma$ the corresponding element upon the ellipsoid we have

$$\frac{dS}{d\Sigma} = 1 - \frac{kP(u+v)}{uv} + \frac{k^2P^2}{uv}.$$

Calling as before R' and R'' the principal radii of curvature of the ellipsoid at any point (ξ, η, ζ) corresponding to (x, y, z) on the parallel surface we have

$$\frac{dS}{d\Sigma} = 1 + k\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) + \frac{k^2}{R'R''}.$$

For a synclastic surface like the ellipsoid we have that

$$\int \frac{d\Sigma}{R'R''} = 4\pi,$$

the integration being understood to extend over the whole surface of the ellipsoid.

We have then for the area of the parallel surface the value

$$S = \Sigma + k\int\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right)d\Sigma + 4\pi k^2,$$

where Σ is the area of the primitive ellipsoid and $4\pi k^2$ the area of the sphere of radius k the envelop of which (the centre of the sphere of course lying on the ellipsoid) is the parallel surface. The middle term of this expression for S I have not been able to integrate while retaining the coordinates u and v. I have however found by a tedious and inelegant process, introducing polar coordinates, that the integral of

$$k\int\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right)d\Sigma$$

expresses the area of the ellipsoid

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 2kabc.$$

I hope however to be able to find the value of the integral in terms of the elliptic coordinates u and v; so I shall not give here the rather labored determination which I have made in terms of polar coordinates.

The value of the ratio $\frac{dS}{d\Sigma}$ is interesting. If we denote by H the sum of the principal curvatures of the ellipsoid at any point and by K

the measure of curvature at the same point we have

$$\frac{dS}{d\Sigma} = 1 + kH + k^2K,$$

i. e. the ratio between the element of area of the parallel and the primitive ellipsoid is equal to unity plus k times the sum of the principal curvatures plus k^2 times the measure of curvature at the corresponding point on the primitive ellipsoid. This theorem is perfectly general as can easily be shown; simply read „primitive surface" instead of „primitive ellipsoid" and the theorem will be given for any surface. To prove this assume as before x, y, z as the coordinates of a point on a parallel surface corresponding to ξ, η, ζ on the primitive, and denote by λ, μ, ν the direction cosines of the normal to the primitive. We have now

$$x = \xi + k\lambda, \quad y = \eta + k\mu, \quad z = \zeta + k\nu$$

and

$$\frac{dS}{d\Sigma} = -\begin{vmatrix} \lambda & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \mu & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \nu & \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ & \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

For brevity write

$$\lambda_\xi = \frac{\partial \lambda}{\partial \xi}, \quad \lambda_\eta = \frac{\partial \lambda}{\partial \eta}, \quad \lambda_\zeta = \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta}, \quad \text{etc., etc.;}$$

then

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + k\lambda_\xi, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = k\lambda_\eta, \quad \frac{\partial x}{\partial \zeta} = k\lambda_\zeta, \quad \text{etc., etc.}$$

Substituting these values in the preceding determinant we have

$$\frac{dS}{d\Sigma} = -\begin{vmatrix} \lambda & 1 + k\lambda_\xi & k\lambda_\eta & k\lambda_\zeta \\ \mu & k\mu_\xi & 1 + k\mu_\eta & k\mu_\zeta \\ \nu & k\nu_\xi & k\nu_\eta & 1 + k\nu_\zeta \\ & \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

Multiply the first row of this determinant by λ, the second by μ, and the third by ν, and subtract the sum of these products from the fourth row; the resulting fourth row is $-1, 0, 0, 0$, so we have

$$\frac{dS}{d\Sigma} = \begin{vmatrix} 1+k\lambda_\xi & k\lambda_\eta & k\lambda_\zeta \\ k\mu_\xi & 1+k\mu_\eta & k\mu_\zeta \\ k\nu_\xi & k\nu_\eta & 1+k\nu_\zeta \end{vmatrix}.$$

Expanding this we have

$$\frac{dS}{d\Sigma} = 1+k(\lambda_\xi+\mu_\eta+\nu_\zeta)$$

$$+k^2\left\{\begin{vmatrix} \mu_\eta & \mu_\zeta \\ \nu_\eta & \nu_\zeta \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \nu_\zeta & \nu_\xi \\ \lambda_\zeta & \lambda_\xi \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda_\xi & \lambda_\eta \\ \mu_\xi & \mu_\eta \end{vmatrix}\right\}+k^3\begin{vmatrix} \lambda_\xi & \lambda_\eta & \lambda_\zeta \\ \mu_\xi & \mu_\eta & \mu_\zeta \\ \nu_\xi & \nu_\eta & \nu_\zeta \end{vmatrix}.$$

Multiplying the first row of the last determinant by λ, the second by μ, and the third by ν, and adding the products to any row, and that row becomes 0, 0, 0, since

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1.$$

The term in k^3 therefore vanishes.

If the primitive surface be given in the form $\zeta = F(\xi, \eta)$ we have

$$\lambda,\quad \mu,\quad \nu = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

where as usual

$$p = \frac{\partial\zeta}{\partial\xi},\quad q = \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}.$$

Since p and q are functions only of ξ and η we must have $\lambda_\zeta = \mu_\zeta = \nu_\zeta = 0$, and consequently the first two determinants in the coefficient of k^2 will vanish; then finally

$$\frac{dS}{d\Sigma} = 1+k(\lambda_\xi+\mu_\eta)+k^2(\lambda_\xi\mu_\eta-\lambda_\eta\mu_\xi);$$

but (vide *Salmon*'s Geometry of three Dimensions page 259)

$$\lambda_\xi+\mu_\eta = H,\quad \lambda_\xi\mu_\eta-\lambda_\eta\mu_\xi = K,$$

therefore

$$\frac{dS}{d\Sigma} = 1+kH+k^2K.$$

In my preceding paper I have given for the expression of element of length on the parallel to the ellipsoid the relation

$$ds^2 = \left(1-\frac{kP}{u}\right)^2\frac{du^2}{4P_1^2}+\left(1-\frac{kP}{v}\right)^2\frac{dv^2}{4P_2^2},$$

but

$$-\frac{P}{u},\quad -\frac{P}{v} = \frac{1}{R'},\quad \frac{1}{R''};$$

and if we write

$$\frac{1}{4P_1^2} = E, \quad \frac{1}{4P_2^2} = G,$$

this is

$$ds^2 = \left(1+\frac{k}{R'}\right)^2 E\,du^2 + \left(1+\frac{k}{R''}\right)^2 G\,dv^2.$$

For the element of length on the ellipsoid we of course have

$$d\sigma^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

If then u and v are the lines of curvature on the ellipsoid, and consequently on the parallel, we have as the values of the coefficients of du^2 and dv^2 on the parallel

$$\mathfrak{E} = \left(1+\frac{k}{R'}\right)^2 E, \quad \mathfrak{G} = \left(1+\frac{k}{R''}\right)^2 G$$

giving as above for the ratio between the corresponding elements of area the value

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}}}{\sqrt{EG}} = \left(1+\frac{k}{R'}\right)\left(1+\frac{k}{R''}\right) = 1 + k\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) + \frac{k^2}{R'R''}$$

where R' and R'' are the radii of curvature of the curves $u = \text{const.}$ and $v = \text{const.}$ respectively.

The expression given here for the ratio $\frac{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}}}{\sqrt{EG}}$ has been shown to hold in general. It may now be shown that the expressions given for $\mathfrak{E}$ and $\mathfrak{G}$ are also perfectly general, *i. e.* that

$$\mathfrak{E} = \left(1+\frac{k}{R'}\right)^2 E, \quad \mathfrak{G} = \left(1+\frac{k}{R''}\right)^2 G$$

hold for any surface and its parallel of modulus k. It is much more convenient to work with the lines of curvature upon the given surface; so I use continuously u and v to denote these lines; then of course

$$F = \Sigma \frac{d\xi}{du}\frac{d\xi}{dv} = 0,$$

and

$$\mathfrak{F} = \Sigma \frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} = 0,$$

also

$$F' = \begin{vmatrix} \frac{d^2\xi}{du\,dv} & \frac{d^2\eta}{du\,dv} & \frac{d^2\zeta}{du\,dv} \\ \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} = 0,$$

and $\mathfrak{F}'$ being similarly expressed gives necessarily $\mathfrak{F}' = 0$. The direct verification of $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}' = 0$ is given in my previous paper.

Denote now by λ, μ, ν the direction cosines of the normal to the primitive surface at (ξ, η, ζ); then λ, μ, ν will equally be the direction cosines of the normal to the parallel at the corresponding point (x, y, z). A, B, C, E, F, G and V having their usual meanings we have

$$\lambda = \frac{A}{V}, \quad \mu = \frac{B}{V}, \quad \nu = \frac{C}{V}.$$

For a point of the parallel we have

$$x = \xi + k\lambda, \quad y = \eta + k\mu, \quad z = \zeta + k\nu.$$

From these form the expressions for

$$\mathfrak{E} = \Sigma\left(\frac{dx}{du}\right)^2, \quad \mathfrak{G} = \Sigma\left(\frac{dx}{dv}\right)^2.$$

We find readily

$$\mathfrak{E} = E + 2k\Sigma\frac{d\xi}{du}\frac{d\lambda}{du} + k^2\Sigma\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2.$$

The quantities $\frac{d\lambda}{du}$, $\frac{d\lambda}{dv}$, $\dots$ $\frac{d\nu}{dv}$ are readily found as follows; since

$$\Sigma A\frac{d^2\xi}{du^2} = E', \quad \Sigma A\frac{d^2\xi}{dv^2} = G', \quad \Sigma A\frac{d^2\xi}{du\,dv} = F' = 0,$$

$$\Sigma A\frac{d\xi}{du} = \Sigma A\frac{d\xi}{dv} = 0, \quad \Sigma A^2 = V^2,$$

we have by differentiation

$$\Sigma A\frac{dA}{du} = \tfrac{1}{2}\frac{dV^2}{du}, \quad \Sigma A\frac{dA}{dv} = \tfrac{1}{2}\frac{dV^2}{dv},$$

$$\Sigma\frac{d\xi}{du}\frac{dA}{du} = -E', \qquad \Sigma\frac{d\xi}{du}\frac{dA}{dv} = -F' = 0,$$

$$\Sigma\frac{d\xi}{dv}\frac{dA}{du} = -F' = 0, \quad \Sigma\frac{d\xi}{dv}\frac{dA}{dv} = -G'.$$

We find quite readily by aid of these and other well known relations

$$\frac{d\lambda}{du} = \frac{d}{du}\cdot\frac{A}{V} = -\frac{1}{V^2}\left\{(E'G-FF')\frac{d\xi}{du} + (EF'-E'F)\frac{d\xi}{dv}\right\},$$

$$\frac{d\lambda}{dv} = \frac{d}{dv}\cdot\frac{A}{V} = -\frac{1}{V^2}\left\{(GF'-G'F)\frac{d\xi}{du} + (EG'-FF')\frac{d\xi}{dv}\right\}.$$

These are perfectly general formulas and hold for any values of u and v. The remaining four quantities $\frac{d\mu}{du}$, $\dots$ $\frac{d\nu}{dv}$ are obtained from

these by advancing ξ into η and ζ successively. For the special case considered, viz. u and v denoting lines of curvature, these become simply

$$\frac{d\lambda}{du} = -\frac{E'G}{V^3}\frac{d\xi}{du}, \quad \frac{d\lambda}{dv} = -\frac{EG'}{V^3}\frac{d\xi}{dv}$$

and consequently

$$\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{du}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{du}\right)^2 = \frac{E'^2G^2}{V^6}E = \frac{GE'^2}{V^4}.$$

This may also be written as $= \frac{E'^2}{EV^2}$ or, the same thing,

$$\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{du}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{du}\right)^2 = \frac{EE'^2}{E^2V^2} = \frac{E}{R'^2},$$

R' as before denoting the radius of curvature of the curve $v = \text{const.}$ on the primitive surface. Similarly we have

$$\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dv}\right)^2 = \frac{G}{R''^2},$$

R'' being the radius of curvature of $u = \text{const.}$ on the primitive surface. The term in $\mathfrak{E}$ multiplied by $2k$ is

$$\Sigma\frac{d\xi}{du}\frac{d\lambda}{du} = \frac{EE'G}{V^3} = \frac{E'}{EV}\cdot E = \frac{1}{R''}E,$$

and similarly for the coefficient $2k$ in $\mathfrak{G}$ we have

$$\Sigma\frac{d\xi}{dv}\cdot\frac{d\lambda}{dv} = \frac{1}{R''}G.$$

Substituting in the expression for $\mathfrak{E}$ and also for $\mathfrak{G}$ we have

$$ds^2 = \left(1+\frac{k}{R'}\right)^2 E\,du^2+\left(1+\frac{k}{R''}\right)^2 G\,dv^2.$$

The corresponding formula for the general case where u and v are not lines of curvature on the primitive surface, can readily be obtained by aid of the above expressions for $\frac{d\lambda}{du}$ etc.; it is however hardly worth while writing them down.

The expression for the measure of curvature on the parallel surface is readily found. Write

$$A,\quad B,\quad C = \frac{\partial(\eta,\zeta)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\partial(\zeta,\xi)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)},$$

$$\mathfrak{A},\quad \mathfrak{B},\quad \mathfrak{C} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

$$\mathfrak{E}',\quad \mathfrak{G}' = \Sigma\mathfrak{A}\frac{d^2x}{du^2},\quad \Sigma\mathfrak{A}\frac{d^2x}{dv^2}.$$

We find for $\mathfrak{A}$ the value

$$A+k\left\{\frac{\partial(\eta,\nu)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial(\zeta,\mu)}{\partial(u,v)}\right\}+k^2\frac{\partial(\mu,\nu)}{\partial(u,v)}.$$

By aid of the values given above for $\frac{\partial\mu}{\partial u}$, $\frac{\partial\mu}{\partial v}$, etc. we find readily

$$\frac{\partial(\mu,\nu)}{\partial(u,v)}=A\frac{1}{R'R''},\quad =AK.$$

The coefficient k is similarly found to be

$$=\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right)A,\quad =HA.$$

We have then

$$\mathfrak{A} = A\left(1+\frac{k}{R'}\right)\left(1+\frac{k}{R''}\right).$$

Write

$$\left(1+\frac{k}{R'}\right)\left(1+\frac{k}{R''}\right) = Q,$$

then finally

$$\mathfrak{A}=AQ,\quad \mathfrak{B}=BQ,\quad \mathfrak{C}=CQ;$$

these give, as they should

$$\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2,\quad =\mathfrak{V}^2,\quad =V^2\left(1+\frac{k}{R'}\right)\left(1+\frac{k}{R''}\right).$$

Since $x=\xi+k\lambda$, etc., we have $\frac{d^2x}{du^2}=\frac{d^2\xi}{du^2}+k\frac{d^2\lambda}{du^2}$; substituting in the above equations defining $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{G}'$ and introducing the previously given values of $\frac{\partial\lambda}{\partial u}$, ... $\frac{\partial\nu}{\partial v}$ we find quite easily

$$\mathfrak{E}'=E'Q\left(1+\frac{k}{R'}\right),\quad \mathfrak{G}'=G'Q\left(1+\frac{k}{R''}\right).$$

Denoting by $\mathfrak{K}$ the measure of curvature on the parallel *i. e.*

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{E}'\mathfrak{G}'}{(\mathfrak{E}\mathfrak{G})^2},$$

we have at once

$$\mathfrak{K}=QK,\quad =\left(1+k\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right)+\frac{k^2}{R'R''}\right)K.$$

Comparing this expression with the one given above for the ratio of corresponding elements of area we have, as we of course should,

$$\frac{\mathfrak{K}}{K} = \frac{dS}{d\Sigma}.$$

Denote by $\mathfrak{R}'$ and $\mathfrak{R}''$ the principal radii of curvature at a point on the parallel surface corresponding to R' and R'' for the primitive surface, and it is easily seen that

$$\mathfrak{R}', \quad \mathfrak{R}'' = R'\sqrt{Q}, \quad R''\sqrt{Q}.$$

The values of $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$, etc. for the general case, where u and v are no longer the lines of curvature, are found without any difficulty by aid of the first given values of $\frac{\partial\lambda}{\partial u}$ etc.; but as there is nothing especially interesting about these quantities I shall not write them down.

In my previous paper I referred to Mr. *S. Roberts* as having done some work on the theory of parallel surfaces: I was not however at that time acquainted with a paper of his, which he has been kind enough recently to send me, in which he treats of the parallel surfaces to quadrics. Mr. *Roberts'* paper is contained in the Proceedings of the London Mathematical Society for 1872, and contains a much fuller account of the projective properties of the surface than I have given. Another paper of Mr. *Roberts'*, contained in vol. IV of the same „Proceedings“, contains a number of theorems concerning parallel surfaces which I had already obtained before carefully reading his paper and had intended incorporating in the present note; since that is however no longer necessary. I content myself with this reference to his paper merely quoting a portion of his final paragraph which contains one or two properties which I had independently found, viz. „an umbilicus on the primitive corresponds to two umbilici on the parallel. To a plane line of curvature corresponds a plane line of curvature; the differential determining the directions in which a given normal is intersected by successive normals, is the same for both systems, and so forth.“

Mr. *Roberts* has also shown in general that the order of the parallel is equal to twice the number of normals which can be drawn from an arbitrary point to the primitive, and that the order of the cuspidal curve of the parallel is twice the order of the surface of centres. In what precedes I have written $x = \xi + k\lambda$ etc. instead of $x = \xi \pm k\lambda$ etc. simply for convenience; it is understood however that one or the other sign is to be used according as we refer to one or the other sheet of the parallel.

Baltimore, January 3rd 1883.

Ueber einige Determinantengleichungen.

(Von Herrn *Eugen Hunyady* in Budapest.)

Die nachfolgenden Zeilen bezwecken die Ableitung einiger Determinantengleichungen, welche mit verschiedenen Abhandlungen von ***Hesse*** und Herrn ***Cayley*** im Zusammenhange stehen, auf welchen besonders die Schlussnummer hinweist.

1. Bezeichnet man eine aus je drei der folgenden Zeilen:

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3; & a'_1, & a'_2, & a'_3, \\ b_1, & b_2, & b_3; & b'_1, & b'_2, & b'_3, \\ c_1, & c_2, & c_3; & c'_1, & c'_2, & c'_3, \end{matrix}$$
$$x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

gebildete Determinante, wie z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \quad \text{etc. etc.}$$

durch (abc), $(aa'x)$ etc. etc., so erhält man, von der Determinante:

$$(1.) \qquad D = \begin{vmatrix} a_2a'_3-a_3a'_2 & a_3a'_1-a_1a'_3 & a_1a'_2-a_2a'_1 \\ b_2b'_3-b_3b'_2 & b_3b'_1-b_1b'_3 & b_1b'_2-b_2b'_1 \\ c_2c'_3-c_3c'_2 & c_3c'_1-c_1c'_3 & c_1c'_2-c_2c'_1 \end{vmatrix}$$

ausgehend, durch successive Multiplication mit den folgenden Factoren:

$$(aa'x), \quad (bb'x), \quad (cc'x)$$

und nachherige Weglassung der gleichen Factoren, die folgenden Darstellungen von D:

$$(2.) \qquad D = \begin{vmatrix} (abb') & (a'bb') \\ (acc') & (a'cc') \end{vmatrix},$$

$$(3.)\qquad D = \begin{vmatrix} (bcc') & (b'cc') \\ (baa') & (b'aa') \end{vmatrix},$$

$$(4.)\qquad D = \begin{vmatrix} (caa') & (c'aa') \\ (cbb') & (c'bb') \end{vmatrix}.$$

Andere Darstellungen für D ergeben sich, indem man die Gleichung (1.) mit den folgenden Determinanten multiplicirt:

(abc), $(a'b'c')$; $(a'bc)$, $(ab'c')$; $(ab'c)$, $(a'bc')$; (abc'), $(a'b'c)$,

was zu den folgenden Identitäten führt:

$$(5.)\qquad D(abc) = \begin{vmatrix} 0 & (aa'b) & (aa'c) \\ (abb') & 0 & (bb'c) \\ (acc') & (bcc') & 0 \end{vmatrix},$$

$$(6.)\qquad D(a'b'c') = \begin{vmatrix} 0 & (aa'b') & (aa'c') \\ (bb'a') & 0 & (bb'c') \\ (cc'a') & (cc'b') & 0 \end{vmatrix},$$

$$(7.)\qquad D(a'bc) = \begin{vmatrix} 0 & (baa') & (caa') \\ (a'bb') & 0 & (cbb') \\ (a'cc') & (bcc') & 0 \end{vmatrix},$$

$$(8.)\qquad D(ab'c') = \begin{vmatrix} 0 & (b'aa') & (c'aa') \\ (abb') & 0 & (c'bb') \\ (acc') & (b'cc') & 0 \end{vmatrix},$$

$$(9.)\qquad D(ab'c) = \begin{vmatrix} 0 & (b'aa') & (caa') \\ (abb') & 0 & (cbb') \\ (acc') & (b'cc') & 0 \end{vmatrix},$$

$$(10.)\qquad D(a'bc') = \begin{vmatrix} 0 & (baa') & (c'aa') \\ (a'bb') & 0 & (c'bb') \\ (a'cc') & (bcc') & 0 \end{vmatrix},$$

$$(11.)\qquad D(abc') = \begin{vmatrix} 0 & (baa') & (c'aa') \\ (abb') & 0 & (c'bb') \\ (acc') & (bcc') & 0 \end{vmatrix},$$

$$(12.)\qquad D(a'b'c) = \begin{vmatrix} 0 & (b'aa') & (caa') \\ (a'bb') & 0 & (cbb') \\ (a'cc') & (b'cc') & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Werden in den Gleichungen (1.)—(12.) für die Grössen a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; ... die folgenden Werthe gesetzt:

$$(13.)\quad \begin{cases} a_1 = \alpha_1\alpha_2, & a_2 = -(\alpha_1+\alpha_2); \quad a_1' = \alpha_1'\alpha_2', \quad a_2' = -(\alpha_1'+\alpha_2'), \\ b_1 = \beta_1\beta_2, & b_2 = -(\beta_1+\beta_2); \quad b_1' = \beta_1'\beta_2', \quad b_2' = -(\beta_1'+\beta_2'), \\ c_1 = \gamma_1\gamma_2, & c_2 = -(\gamma_1+\gamma_2), \quad c_1' = \gamma_1'\gamma_2', \quad c_2' = -(\gamma_1'+\gamma_2'), \\ & a_3 = b_3 = c_3 = a_3' = b_3' = c_3' = 1, \end{cases}$$

so geht die Gleichung (1.) über in:

$$(14.)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2-\alpha_1'\alpha_2' & (\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_1'+\alpha_2') & \alpha_1\alpha_2(\alpha_1'+\alpha_2')-\alpha_1'\alpha_2'(\alpha_1+\alpha_2) \\ \beta_1\beta_2-\beta_1'\beta_2' & (\beta_1+\beta_2)-(\beta_1'+\beta_2') & \beta_1\beta_2(\beta_1'+\beta_2')-\beta_1'\beta_2'(\beta_1+\beta_2) \\ \gamma_1\gamma_2-\gamma_1'\gamma_2' & (\gamma_1+\gamma_2)-(\gamma_1'+\gamma_2') & \gamma_1\gamma_2(\gamma_1'+\gamma_2')-\gamma_1'\gamma_2'(\gamma_1+\gamma_2) \end{vmatrix},$$

und unter Anwendung der folgenden abgekürzten Bezeichnung:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 & -(\alpha_1+\alpha_2) & 1 \\ \beta_1\beta_2 & -(\beta_1+\beta_2) & 1 \\ \gamma_1\gamma_2 & -(\gamma_1+\gamma_2) & 1 \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma) \text{ etc. etc.}$$

gehen die Gleichungen (2.) und (5.) durch die Substitutionen (13.) in die folgenden über:

$$(15.)\quad \Delta = \begin{vmatrix} (\alpha\beta\beta') & (\alpha'\beta\beta') \\ (\alpha\gamma\gamma') & (\alpha'\gamma\gamma') \end{vmatrix},$$

$$(16.)\quad \Delta(\alpha\beta\gamma) = \begin{vmatrix} 0 & (\alpha\alpha'\beta) & (\alpha\alpha'\gamma) \\ (\alpha\beta\beta') & 0 & (\beta\beta'\gamma) \\ (\alpha\gamma\gamma') & (\beta\gamma\gamma') & 0 \end{vmatrix};$$

wobei zu bemerken ist, dass (15.) und (16.) die Repräsentanten von noch zwei bezüglich sieben ihnen ähnlich geformten Gleichungen sind.

3. Werden in den Substitutionen (13.) insbesondere noch die folgenden Annahmen gemacht:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = a, \quad \beta_1 = \beta_2 = b, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = c,$$
$$\alpha_1' = \alpha_2' = a', \quad \beta_1' = \beta_2' = b', \quad \gamma_1' = \gamma_2' = c',$$

wodurch diese in die folgenden übergehen:

$$(17.)\quad \begin{cases} a_1 = a^2, & a_2 = -2a; \quad a_1' = a'^2, \quad a_2' = -2a', \\ b_1 = b^2, & b_2 = -2b; \quad b_1' = b'^2, \quad b_2' = -2b', \\ c_1 = c^2, & c_2 = -2c; \quad c_1' = c'^2, \quad c_2' = -2c', \\ & a_3 = b_3 = c_3 = a_3' = b_3' = c_3', \end{cases}$$

so ergiebt sich unter Einführung der folgenden Bezeichnungen:

$$a-b=-\begin{vmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{vmatrix}=(ab),\quad \nabla=\begin{vmatrix}a.a' & -(a+a') & 1\\ b.b' & -(b+b') & 1\\ c.c' & -(c+c') & 1\end{vmatrix}$$

nach (1.) die folgende Gleichung:

$$(18.)\qquad D = 4(aa')(bb')(cc')\nabla.$$

Ferner hat man für diese Symbole

$$-2\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=(abc)=2(a-b)(b-c)(c-a)=2(ab)(bc)(ca)\quad \text{etc. etc.}$$

Aus den Gleichungen (2.)–(4.) ergeben sich ferner durch Entwickelung der rechts stehenden Symbole die folgenden Gleichungen:

$$(19.)\qquad D = 4(bb')(cc')\{(ab)(ab')(a'c)(a'c')-(ac)(ac')(a'b)(a'b')\},$$

$$(20.)\qquad D = 4(cc')(aa')\{(bc)(bc')(b'a)(b'a')-(ba)(ba')(b'c)(b'c')\},$$

$$(21.)\qquad D = 4(aa')(bb')\{(ca)(ca')(c'b)(c'b')-(cb)(cb')(c'a)(c'a')\},$$

sowie aus (5.)–(8.) die folgenden Gleichungen resultiren:

$$(22.)\qquad D = -4(aa')(bb')(cc')\{(ab')(bc')(ca')+(a'b)(b'c)(c'a)\},$$

$$(23.)\qquad D = -4(aa')(bb')(cc')\{(ab)(b'c)(c'a')+(a'b')(bc')(ca)\},$$

$$(24.)\qquad D = -4(aa')(bb')(cc')\{(ab)(b'c')(ca')+(a'b')(bc)(c'a)\},$$

$$(25.)\qquad D = -4(aa')(bb')(cc')\{(ab')(bc)(c'a')+(a'b)(b'c')(ca)\}.$$

Zu bemerken ist noch, dass die Gleichungen (9.)–(12.) auf dieselben vier Gleichungen führen.

Durch Vergleichung der Gleichungen (18.) — (25.) erhält man schliesslich, indem man mit $4(aa')(bb')(cc')$ dividirt, die folgenden Gleichungen:

$$(26.)\qquad \left\{\begin{aligned}
\nabla &= \frac{1}{(aa')}\{(ab)(ab')(a'c)(a'c')-(a'b)(a'b')(ac)(ac')\},\\
&= \frac{1}{(bb')}\{(bc)(bc')(b'a)(b'a')-(b'c)(b'c')(ba)(ba')\},\\
&= \frac{1}{(cc')}\{(ca)(ca')(c'b)(c'b')-(c'a)(c'a')(cb)(cb')\},\\
&= -\{(ab')(bc')(ca')+(a'b)(b'c)(c'a)\},\\
&= -\{(ab)(b'c)(c'a')+(a'b')(bc')(ca)\},\\
&= -\{(ab)(b'c')(ca')+(a'b')(bc)(c'a)\},\\
&= -\{(ab')(bc)(c'a')+(a'b)(b'c')(ca)\}.
\end{aligned}\right.$$

4. Die Gleichungen (2.)—(4.) führen auf folgende Doppelgleichung:

$$(27.)\quad \begin{cases} (abb')(a'cc')-(acc')(a'bb') = (bcc')(b'aa')-(baa')(b'cc') \\ \qquad = (caa')(c'bb')-(cbb')(c'aa'), \end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dass die Symbole (abc), ... entweder die in der ersten oder dritten Nummer ihnen beigelegte Bedeutung haben können.

Lässt man in der letzten Gleichung a, b, c ungeändert und bildet die mit a', b', c' einen Cyklus bildenden Vertauschungen, so hat man noch:

$$(28.)\quad \begin{cases} (abc')(b'ca')-(b'bc')(aca') = (bca')(c'ab')-(bab')(c'ca') \\ \qquad = (cab')(a'bc')-(cbc')(a'ab'), \end{cases}$$

$$(29.)\quad \begin{cases} (aba')(c'cb')-(c'ba')(acb') = (bcb')(a'ac')-(a'cb')(bac') \\ \qquad = (cac')(b'ba')-(b'ac')(cba'). \end{cases}$$

Vertauscht man ferner in (27.) der Reihe nach b' mit c, c' mit a, a' mit b, so hat man noch die folgenden Doppelgleichungen:

$$(30.)\quad \begin{cases} (abc)(a'b'c')-(ab'c')(a'bc) = (bb'c')(caa')-(baa')(cb'c') \\ \qquad = (b'aa')(c'bc)-(b'bc)(c'aa'), \end{cases}$$

$$(31.)\quad \begin{cases} (c'bb')(a'ca)-(c'ca)(a'bb') = (bca)(b'c'a')-(bc'a')(b'ca) \\ \qquad = (cc'a')(abb')-(cbb')(ac'a'), \end{cases}$$

$$(32.)\quad \begin{cases} (aa'b')(bcc')-(acc')(ba'b') = (a'cc')(b'ab)-(a'ab)(b'cc') \\ \qquad = (cab)(c'a'b')-(ca'b')(c'ab). \end{cases}$$

Setzt man in den Gleichungen (25.)—(32.)

$$(abc)(a'b'c') = A,\quad (aba')(cb'c') = B,\quad (abb')(ca'c') = C,$$
$$(abc')(ca'b') = D,\quad (aca')(bb'c') = E,\quad (acb')(ba'c') = F,$$
$$(acc')(ba'b') = G,\quad (aa'b')(bcc') = H,\quad (aa'c')(bcb') = I,\quad (ab'c')(bca') = J,$$

so gehen dieselben in die folgenden über:

$$(33.)\quad \begin{cases} G-C = H-B = I-E, \\ D+E = J+C = F-H, \\ B-F = -I-D = -G-J, \end{cases}$$

$$(34.)\quad \begin{cases} A-J = -E+B = H-I, \\ -E-G = A-F = -C-I, \\ H-G = -C+B = A-D, \end{cases}$$

auf welche Herr *Cayley* *) mehrfach hingewiesen hat. Nur ist noch zu be-

*) Dieses Journal Bd. 83: Further investigations on the double ϑ-functions pp. 230 u. 231. Quarterly Journal of Math. Vol. XV. Note on a theorem in determinants pp. 55—57.

merken, dass diejenigen Gleichungen des Systemes (34.), welche A nicht enthalten, eine Wiederholung der ersten drei Gleichungen von (33.) sind.

5. Ebenso, wie die Gleichungen (2.)—(4.) zur Ableitung der fünfzehn *Cayley*schen Identitäten dienten, können auch die Gleichungen (5.)—(12.) zur Ableitung nicht minder merkwürdiger Identitäten benutzt werden.

Aus der Vergleichung von je zwei auf einander folgenden Gleichungen des Systemes (5.)—(12.) ergeben sich vier Gleichungen, welche in folgender Weise geschrieben werden können:

$$\tag{35.} \left\{ \begin{array}{l} (aba')(acc')(bcb')(a'b'c')-(abc)(aa'c')(ba'b')(cb'c') \\ =(abb')(aca')(bcc')(a'b'c')-(abc)(aa'b')(bb'c')(ca'c'), \end{array} \right.$$

$$\tag{36.} \left\{ \begin{array}{l} (abb')(aa'c')(bca')(cb'c')-(aba')(ab'c')(bcb')(ca'c') \\ =(acc')(aa'b')(bca')(bb'c')-(aca')(ab'c')(bcc')(ba'b'), \end{array} \right.$$

$$\tag{37.} \left\{ \begin{array}{l} (acc')(aa'b')(bcb')(ba'c')-(acb')(aa'c')(bcc')(ba'b') \\ =(abb')(aca')(ba'c')(cb'c')-(aba')(acb')(bb'c')(ca'c'), \end{array} \right.$$

$$\tag{38.} \left\{ \begin{array}{l} (abc')(aca')(ba'b')(cb'c')-(aba')(acc')(bb'c')(ca'b') \\ =(abc')(aa'b')(bcb')(ca'c')-(abb')(aa'c')(bcc')(ca'b'). \end{array} \right.$$

Nimmt man in (37.) die cyklischen Vertauschungen von $cb'a'c'$ vor, so kommt man nach und nach auf die folgenden Gleichungen:

$$\tag{39.} \left\{ \begin{array}{l} -(acb')(aa'c')(bcc')(ba'b')+(acc')(aa'b')(bcb')(ba'c') \\ =-(aba')(ab'c')(bcc')(ca'b')+(abc')(aa'b')(bca')(cb'c'), \end{array} \right.$$

$$\tag{40.} \left\{ \begin{array}{l} (acc')(aa'b')(bcb')(ba'c')-(acb')(aa'c')(bcc')(ba'b') \\ = (abc')(aca')(bcb')(a'b'c')-(abc)(ab'c')(bb'c')(ca'b'), \end{array} \right.$$

$$\tag{41.} \left\{ \begin{array}{l} -(acb')(aa'c')(bcc')(ba'b')+(acc')(aa'b')(bcb')(ba'c') \\ =-(abc)(ab'c')(ba'b')(ca'c')+(abb')(acc')(bca')(a'b'c'). \end{array} \right.$$

Vertauscht man ferner in (35.)—(38.) c mit c' und gleichzeitig a' mit b', so erhält man die folgenden vier identischen Gleichungen:

$$\tag{42.} \left\{ \begin{array}{l} (acc')(aa'b')(bcb')(ba'c')-(acb')(aa'c')(bcc')(ba'b') \\ =-(aba')(ab'c')(bcb')(ca'c')+(abb')(aa'c')(bca')(cb'c'), \end{array} \right.$$

$$\tag{43.} \left\{ \begin{array}{l} -(acb')(aa'c')(bcc')(ba'b')+(acc')(aa'b')(bcb')(ba'c') \\ = (abb')(aca')(bcc')(a'b'c')-(abc)(aa'b')(bb'c')(ca'c'), \end{array} \right.$$

$$\tag{44.} \left\{ \begin{array}{l} (acc')(aa'b')(bcb')(ba'c')-(acb')(aa'c')(bcc')(ba'b') \\ =-(abc)(ab'c')(ba'c')(ca'b')-(abc')(acb')(bca')(a'b'c'), \end{array} \right.$$

$$\tag{45.} \left\{ \begin{array}{l} -(acb')(aa'c')(bcc')(ba'b')+(acc')(aa'b')(bcb')(ba'c') \\ = (abc')(aca')(aa'b')(cb'c')-(aba')(acc')(bb'c')(ca'b'). \end{array} \right.$$

Vertauscht man schliesslich noch in (44.) nach und nach a' mit b', a' mit c' und b mit c', so hat man noch die folgenden drei identischen Gleichungen:

$$(46.)\quad \begin{cases} (acc')(aa'b')(bca')(bb'c')-(aca')(ab'c')(bcc')(ba'b') \\ = (abc')(aca')(bcb')(a'b'c')-(abc)(aa'c')(bb'c')(ca'b'), \end{cases}$$

$$(47.)\quad \begin{cases} -(aca')(ab'c')(bcc')(ba'b')+(acc')(aa'b')(bca')(bb'c') \\ = (aba')(acb')(bcc')(a'b'c')-(abc)(aa'b')(ba'c')(cb'c'), \end{cases}$$

$$(48.)\quad \begin{cases} -(abc)(aa'b')(ba'c')(cb'c')+(aba')(acb')(bcc')(a'b'c') \\ = (abc')(acb')(ba'b')(ca'c')-(abb')(acc')(ba'c')(ca'b'). \end{cases}$$

Schreibt man in den vierzehn Gleichungen (35.) — (48.) für $abca'b'c'$, 123456, so ist unter (123)... die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdots$$

zu verstehen; es beweisen dann die erwähnten vierzehn Gleichungen die Identität der ersten Glieder der Gleichungen (1.) — (15.) in des Verf. Abhandlung: „Ueber die verschiedenen Formen der Bedingungsgleichungen" etc. etc. (dieses Journal Bd. 83).

6. *a*) Versteht man in der Gleichung (1.) unter a_1, a_2, a_3, etc. etc. die homogenen Coordinaten der Punkte a, etc. etc., so drückt das Verschwinden von D die perspectivische Lage der beiden Dreiecke abc und $a'b'c'$ aus; da sich aber den Gleichungen (2.) — (12.) zufolge für D elf verschiedene Darstellungen ergeben, so vermitteln diese Gleichungen die Darstellung der perspectivischen Lage zweier Dreiecke durch elf der Form nach verschiedene Gleichungen.

b) Werden hingegen in den Gleichungen (14.) — (16.) unter α_1, α_2; etc. etc. die Coordinaten der Punktepaare α, etc. etc. einer und derselben Geraden verstanden, so drückt das Verschwinden der Determinante Δ aus, dass die folgenden Paare von Punktepaaren, deren Coordinaten sind:

$$(49.)\quad \alpha_1,\ \alpha_2;\ \alpha'_1,\ \alpha'_2,$$

$$(50.)\quad \beta_1,\ \beta_2;\ \beta'_1,\ \beta'_2,$$

$$(51.)\quad \gamma_1,\ \gamma_2;\ \gamma'_1,\ \gamma'_2,$$

in solcher speciellen Lage sich befinden, dass ein Punktepaar existirt, welches mit den Paaren von Punktepaaren (49.) — (51.) gleichzeitig eine Involution bildet. Nach den in Nummer 2. gemachten Bemerkungen entstehen auch für diese Bedingung elf Darstellungen.

c) Das Verschwinden von ∇ [S. 174 Nr. 3] bedeutet, je nachdem wir unter *a, b,* etc. die Parameterwerthe von sechs Punkten eines und desselben Kegelschnittes, oder aber die Coordinaten von sechs Punkten einer Geraden verstehen, entweder dass die Dreiecke *abc* und *a'b'c'*, deren Eckpunkte sechs Punkte eines Kegelschnittes sind, sich in perspectivischer Lage befinden, oder aber dass die conjugirten Punktepaare *a, a'; b, b'; c, c'* einer Geraden eine Involution bilden.

Man erhält durch die Gleichungen (26.) sieben Darstellungen für die vorerwähnten geometrischen Suppositionen von sechs Punkten eines Kegelschnittes, oder von sechs Punkten einer Geraden. Die Gleichungen (26.) enthalten die Zusammenhänge, die zwischen den der Form nach verschiedenen Involutionsbedingungen bestehen, wie diese zuerst von *Hesse* *) ermittelt worden sind.

d) Fasst man in den Gleichungen (35.)—(48.) die Grössen a_1, a_2, a_3, etc. als die homogenen Coordinaten der Punkte *a*, ... auf, so drückt das Verschwinden eines Theiles irgend einer dieser Gleichungen die Bedingung aus, dass die sechs Punkte *a*, ... *c'* Punkte eines und desselben Kegelschnittes sind, und eben dieses Verschwinden zieht noch den vorerwähnten Gleichungen zufolge das Verschwinden von vierzehn ähnlich gebauten Ausdrücken nach sich. Reflectirt man noch auf die Schlussbemerkung in Nr. 5, so drücken die Gleichungen (35.)—(48.) die Identität der linken Seiten der Gleichungen (1.)—(15.) in des Verfassers **) bereits citirten Abhandlung aus.

e) Schliesslich sei noch erwähnt, dass das *Hesse*sche Uebertragungsprincip ***) das Band ist, das einerseits die in *a*) und *b*), andererseits die in *c*) erwähnten geometrischen Gebilde unter einander verknüpft.

---

*) Dieses Journal, Bd. 63, pp. 179—185: Zur Involution. Insbesondere Vorl. üb. anal. Geom. des Raumes, 3. Aufl. pp. 107—109 die Gleich. (27.), (28.), (33.), (34.).

**) Dieses Journal, Bd. 83, p. 79.

***) Dieses Journal, Bd. 66, p. 15. Ein Uebertragungsprincip.

Budapest, den 15. April 1882.

Notiz über die isothermische Spiegelung.

(Von Herrn *Holzmüller* in Hagen.)

Ist $Z = f(z)$ eine Function complexen Arguments, durch welche eine Isothermenschaar in die Parallelen zur imaginären Axe verwandelt wird, und bezeichnet man die umgekehrte Function mit $\varphi(Z)$, so repräsentirt, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, der Ausdruck

$$Z = \varphi[2a - f(z)]$$

eine Abbildung, die unter Voraussetzung gewisser Symmetrieverhältnisse als *isothermische Spiegelung* des zu transformirenden Gebildes gegen diejenige Curve betrachtet werden kann, welche bei der Abbildung $Z = f(z)$ in die Linie $z = a$ übergeht. Ebenso entspricht

$$Z = \varphi[2bi - f(z)]$$

der Spiegelung gegen ein Individuum der Orthogonalschaar.

Specialfälle sind Symmetrie und Transformation durch reciproke Radii vectores. Einige andere habe ich in der Zeitschrift für Math. und Phys. gelegentlich der lemniscatischen Verwandtschaft behandelt. So geht z. B. bei der Spiegelung gegen eine *Cassini*sche Linie jede solche Curve desselben Centrums wiederum in eine solche über, z. B. das Radienbüschel durch das Centrum bei der Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel in das Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch die Brennpunkte der spiegelnden Curve, die orthogonale Kreisschaar in das System der confocalen Lemniscaten.

Neu und von einigem Interesse dürfte folgender Satz sein:

Die isothermische Spiegelung gegen die gewöhnliche Lemniscate verwandelt das Kreisbüschel durch ihre Brennpunkte und dessen Orthogonalschaar in die Orthogonalsysteme confocaler Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten.

Hierin liegt vielleicht der kürzeste geometrische Uebergang von dem einen dieser Isothermensysteme zum anderen.

Selbstverständlich geht nun dasselbe Kreisbüschel durch Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel mit denselben Brennpunkten in die Reciproken der Kegelschnitte über.

Durch einfache Ideencombination lassen sich ferner einige Beiträge zur Kenntniss der bekannten Abbildung $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ geben, die, wie man weiss, vom System der Radien und concentrischen Kreise auf confocale Kegelschnitte überführt und das Kreisbüschel durch ± 1 in ein ebensolches mit doppeltem Schnittwinkel verwandelt. Es lässt sich nämlich zeigen, dass dem Kreisbüschel $R = c$ um den Punkt $a + bi$ der Z-Ebene eine Curvenschaar $\frac{p.q}{2r} = c$ entspricht, deren Radii vectores von den drei Punkten $a + bi \pm \sqrt{(a+bi)^2 - 1}$ und Null ausgehen, während das Radienbüschel $\vartheta = \gamma$ durch jenen Punkt mit dem Isothermenbüschel $\varphi + \chi - \vartheta = \gamma$ correspondirt, dessen Variabeln die Richtungswinkel jener Radii vectores sind. Als Specialfälle ergeben sich die eben genannten Beziehungen und ausserdem das gegenseitige Entsprechen der Lemniscate $p.p_1 = 1$ mit den Brennpunkten ± 1 der Z-Ebene und des Kreises um ± 1 der z-Ebene mit dem Radius $\sqrt{2}$, endlich noch das Correspondiren des Lemniscatenbüschels durch die Punkte ± 1 und Null der Z-Ebene und des Lemniscatenbüschels durch ± 1 und $\pm i$ in der anderen Ebene, jedes mit seinem Orthogonalsystem. Es folgt sofort, dass diejenigen Curvensysteme $\frac{p.q}{2r} = c$ und $\varphi + \chi - \vartheta = \gamma$, für welche $a + bi$ der Nullpunkt oder der Punkt ± 1 ist, gegen den Kreis mit dem Radius $\sqrt{2}$ um $\pm i$ resp. ± 1 gespiegelt, das obengenannte Lemniscatenbüschel nebst Orthogonalschaar geben, so dass die Wärmeaufgabe für gewisse Kreissicheln auf elementar-geometrischem Wege leicht gelöst werden kann. Ferner ergiebt sich, dass dem Kreisbüschel durch die Punkte $\pm i$ der z-Ebene die Reciproken der confocalen Hyperbeln mit den Brennpunkten ± 1 entsprechen, der orthogonalen Kreisschaar also die Reciproken der confocalen Ellipsen. Noch zahlreiche andere Fälle lassen sich auf diese Weise erledigen.

Hagen, den 1. December 1880.

Ueber die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von constantem Krümmungsmass.

(Von Herrn *J. Weingarten.*)

Neuere Untersuchungen hervorragender Mathematiker, sowohl im Gebiete der Geometrie, als auch in dem der Functionentheorie, weisen auf einen Zusammenhang hin, welcher zwischen der Theorie der linearen gebrochenen Substitutionen einer unbeschränkt veränderlichen Grösse und der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung einerseits, so wie der Geometrie der aus kürzesten Linien einer Fläche von constantem Krümmungsmass gebildeten Figuren andererseits besteht. Die erste dieser Hinweisungen findet sich bei *Riemann* im Abschnitt 14 der Abhandlung über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung, und knüpft sich daran, dass die Frage nach der conformen Abbildung einer derartigen Fläche auf eine Ebene mit der Frage nach der conformen Abbildung einer Kugel auf eine Ebene identisch ist. Weitere Andeutungen kann man einigen geometrischen Wendungen entnehmen, welche in functionentheoretischen Abhandlungen der Herren *Klein* und *Poincaré* auftreten. Man bemerkt ferner leicht, dass die Transformation einer gegebenen Form des Linienelementes einer Fläche von constanter Krümmung in sich selbst, die nur für solche Flächen auf dreifach unendlich viele Weisen stattfindet, durch lineare gebrochene Substitutionen vermittelt wird.

Unter diesen Umständen liegt die Vermuthung nahe, dass die Lösung der Aufgabe: die geodätischen Linien einer Fläche constanter Krümmung aus einer gegebenen Form des Linienelementes derselben zu ermitteln, in naher Beziehung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung stehe, eine Vermuthung, welche durch die nachstehenden Entwickelungen ihre Bestätigung finden wird.

Die Ermittelung der geodätischen Linien einer Fläche, für welche eine irgendwie gegebene Form ihres Linienelementes vorliegt, scheint nur

in dem einen Falle bisher erledigt worden zu sein, in welchem diese Form den Charakter des Linienelementes einer in sich verschiebbaren Fläche besitzt und nicht von constanter Krümmung ist. Besondere Kriterien dieses Falles und der Satz, dass, wenn dieselben erfüllt sind, die geodätischen Linien solcher Flächen durch Quadraturen bestimmbar sind, rühren von *Edmond Bour* her. (Journal de l'école pol. t. XXII pag. 79.) Aber für den Ausnahmefall der Flächen von constantem Krümmungsmass ergeben die *Bour*schen Untersuchungen keine Resultate.

Die Verfolgung der von *Gauss* in die Wissenschaft eingeführten Eigenschaften der krummen Oberflächen, welche nur durch eine gegebene Form ihres Linienelementes bedingt sind, wird sehr erleichtert durch die Einführung einer Gattung von Functionen des Ortes in einer Fläche, deren Werthe durch die Werthe der Coefficienten des Linienelementes in diesem Orte derartig gegeben sind, dass sie in nämlicher Weise den Coefficienten eines durch Einführung neuer Variabeln transformirten Linienelementes, wie den Coefficienten des ursprünglichen Linienelementes entnommen werden können.

Bezeichnet man solche Functionen des Ortes in einer Fläche mit dem Namen Biegungsinvarianten, so ist offenbar das Krümmungsmass der Fläche selbst eine Biegungsinvariante.

Aus den Differentialquotienten einer gegebenen Biegungsinvariante und den Coefficienten E, F, G des Linienelementes der Fläche kann man unzählige neue Biegungsinvarianten ableiten, von denen jedoch höchstens zwei von einander unabhängig sein können.

Zu diesen Biegungsinvarianten gehören die von Herrn *Beltrami* mit dem Namen der Differentialparameter erster und zweiter Ordnung einer Function bezeichneten Verbindungen, wenn man für diese Function das Krümmungsmass k der Fläche selbst wählt, also die folgenden Grössen:

$$\Delta_1(k) = \frac{E\frac{\partial k^2}{\partial q^2} - 2F\frac{\partial k}{\partial p}\frac{\partial k}{\partial q} + G\frac{\partial k^2}{\partial p^2}}{EG-F^2},$$

$$\Delta_2(k) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\dfrac{G\frac{\partial k}{\partial p} - F\frac{\partial k}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial\dfrac{E\frac{\partial k}{\partial q} - F\frac{\partial k}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial q}\right] \text{*)}.$$

In dem Falle, dass unter diesen Biegungsinvarianten *eine* enthalten ist,

*) Vergl. Astronomische Nachrichten No. 1733. Januar 1869.

welche sich nicht auf eine Function von k allein reducirt, kann man statt der Variabeln p und q die Variable k und die betreffende Biegungsinvariante $\varDelta_i k = h$ als die, die Lage eines Punktes der Fläche bestimmenden Grössen einführen, und so dem Quadrate des Linienelementes eine *Normalform*

$$\mathfrak{E}\,dk^2 + 2\mathfrak{F}\,dk\,dh + \mathfrak{G}\,dh^2$$

ertheilen, deren nothwendige Herbeiführung aus allen in einander transformirbaren Formen ein Kriterium für die Möglichkeit der Transformirbarkeit zweier gegebenen Formen in einander abgiebt.

Sind jedoch beide Biegungsinvarianten $\varDelta_1(k)$ und $\varDelta_2(k)$ Functionen von k allein, oder bestehen die simultanen Bedingungen

$$\frac{\partial \varDelta_1(k)}{\partial p}\frac{\partial k}{\partial q} - \frac{\partial \varDelta_1(k)}{\partial q}\frac{\partial k}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial \varDelta_2(k)}{\partial p}\frac{\partial k}{\partial q} - \frac{\partial \varDelta_2(k)}{\partial q}\frac{\partial k}{\partial p} = 0$$

identisch, so geht durch Einführung der Variabeln k und des Parameters τ einer zu den Curven gleichen Krümmungsmasses senkrechten Curvenschaar das Quadrat des Linienelementes in die Form

$$E\,dk^2 + G\,d\tau^2$$

über, aus welcher sich

$$\varDelta_1(k) = \frac{1}{E}, \quad \varDelta_2(k) = \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{\frac{E}{G}}}{\partial k},$$

$$\frac{\varDelta_2(k)}{\varDelta_1(k)} = \frac{\partial\, ln \sqrt{\frac{G}{E}}}{\partial k}$$

ergeben. Da hiernach E nur von k abhängig erscheint, so folgt aus der letzten der obigen Gleichungen

$$\sqrt{G} = \varphi(k).T,$$

wenn T eine Function von τ allein bezeichnet, die der Allgemeinheit unbeschadet der Einheit gleich gewählt werden darf.

Die transformirte Form des Quadrats des in Rede stehenden Linienelementes stellt sich daher als

$$\psi(k)\,dk^2 + \varphi(k)\,d\tau^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

dar, und gehört einer in sich verschiebbaren Fläche an.

Aus der vorstehenden Gleichung ist, da k als Function von p und q bekannt ist, $d\tau$ und demgemäss τ durch Quadraturen zu ermitteln.

Die geodätischen Linien einer Fläche, deren Linienelement die Form

$$\sqrt{\psi(k)\,dk^2+\varphi(k)\,d\tau^2}$$

besitzt, sind ohne Weiteres durch Quadraturen bestimmbar, und somit ist das *Bour*sche Resultat gewonnen.

Allein dies Verfahren zur Transformation des Quadrats des Linienelementes einer Fläche, für welche die oben angegebenen Bedingungen erfüllt sind, wird unzulässig in dem Falle, dass das Krümmungsmass in jedem Punkte der Fläche den nämlichen Werth besitzt, und daher zur Bestimmung eines Ortes in der Fläche nicht dienen kann.

In diesem Falle liegen die Erleichterungen der Bestimmung der geodätischen Linien in dem Umstande, dass die Transformation des Quadrates des Linienelementes in sich selbst möglich ist, und für gewisse stets herbeizuführende Formen desselben durch lineare gebrochene Substitutionen erzielt wird.

1.

Wenn die in den Differentialen der reellen Variabeln p, q quadratische Form

$$E\,dp^2+2F\,dp\,dq+G\,dq^2$$

das Quadrat des Linienelementes einer Fläche von constantem Krümmungsmass darstellt, das heisst, wenn die im Uebrigen beliebig gewählten Functionen E, F, G der Variabeln p, q nur der einen Bedingung unterworfen sind, dass der aus ihnen selbst und ihren ersten und zweiten Differentialquotienten gebildete Werth des *Gauss*schen Krümmungsmasses in eine Constante k übergeht, so lässt sich diese Form stets, und zwar auf unendlich viele Weisen, durch Einführung zweier conjugirten complexen Functionen ϑ und ϑ^* der Variabeln p, q in die andere

$$\frac{d\vartheta\,d\vartheta^*}{\left(\frac{k}{4}+\vartheta\vartheta^*\right)^2}$$

überführen.

Die Möglichkeit dieser Ueberführung geht aus dem Umstande hervor, dass das Quadrat des Linienelementes einer Fläche constanter Krümmung die Form

$$d\sigma^2+\left[\frac{\sin(\sigma\sqrt{k})}{\sqrt{k}}\right]^2 d\tau^2$$

annimmt, wenn man die Lage eines Punktes P dieser Fläche durch die Länge σ der von diesem Punkte nach einem willkürlichen Punkte P_0 derselben gezogenen geodätischen Linie, und durch den Winkel τ bestimmt, welchen das in P_0 endigende Element dieser geodätischen Linie mit einem bestimmten der durch diesen Punkt gehenden Linienelemente bildet. Durch Einführung der complexen conjugirten Variabeln ϑ, ϑ^*:

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\sqrt{k}\,\mathrm{tg}\Big(\frac{\sigma\sqrt{k}}{2}\Big)\cdot e^{\tau i}, \quad \vartheta^* = \tfrac{1}{2}\sqrt{k}\,\mathrm{tg}\Big(\frac{\sigma\sqrt{k}}{2}\Big)\cdot e^{-\tau i}$$

geht diese Form in die ihr vorangestellte über, welche selbst wiederum durch die linearen gebrochenen Substitutionen

$$\vartheta = \frac{a\theta+b}{\theta+c}, \quad \vartheta^* = \frac{a^*\theta^*+b^*}{\theta^*+c^*},$$

(in denen, wie im Folgenden stets durch Hinzufügung eines Sterns an die Werthbezeichnung einer complexen Grösse, die ihr conjugirte bezeichnet ist) in die nämliche Gestalt

$$\frac{d\theta\, d\theta^*}{\Big(\frac{k}{4}+\theta\theta^*\Big)^2}$$

transformirt wird, nachdem den complexen Constanten a, b, c drei leicht aufzustellende Bedingungen auferlegt worden sind.

Eine bestehende Gleichung von der Form

$$(a.) \qquad \frac{d\vartheta\, d\vartheta^*}{\Big(\frac{k}{4}+\vartheta\vartheta^*\Big)^2} = E dp^2 + 2F dp\, dq + G dq^2$$

hat zur Folge, dass jede der complexen Functionen ϑ und ϑ^* der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$E\frac{\partial\vartheta^2}{\partial q^2} - 2F\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\frac{\partial\vartheta}{\partial q} + G\frac{\partial\vartheta^2}{\partial p^2} = 0$$

Genüge leistet. (*Gauss*, Disquisitiones generales circa superficies curvas art. 21.) Diese lässt sich in die Gestalt:

$$E\Big(\frac{\partial\vartheta}{\partial q} - \varrho\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\Big)\Big(\frac{\partial\vartheta}{\partial q} - \varrho^*\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\Big) = 0$$

setzen, wenn unter ϱ die complexe Grösse:

$$\varrho = \frac{F+i\sqrt{EG-FF}}{E}$$

verstanden wird.

Wir werden in der Folge unter ϑ diejenige der beiden conjugirten Functionen ϑ und ϑ^* verstehen, welche der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\text{(I.)} \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial q} = \varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial p}$$

genügt.

Führt man in die Relation (*a.*) anstatt der Variabeln ϑ^* eine neue complexe Variable ξ durch die Gleichung

$$\xi = -\frac{2\vartheta^*}{\frac{k}{4}+\vartheta\vartheta^*} \quad \text{oder} \quad \vartheta^* = -\frac{k}{4}\frac{\xi}{\vartheta\xi+2}$$

ein, so verwandelt sich dieselbe in die nachstehende

$$-\frac{2}{k}d\xi\, d\vartheta+\frac{\xi^2}{k}d\vartheta^2 = E\,dp^2+2F\,dp\,dq+G\,dq^2,$$

welche wiederum die ferneren Gleichungen (*Gauss* l. c.) zur Folge hat:

$$\frac{E\frac{\partial \vartheta}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial q}-F\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q}+\frac{\partial \vartheta}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)+G\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial p}}{EG-FF} = -k,$$

$$\frac{E\frac{\partial \xi^2}{\partial q^2}-2F\frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q}+G\frac{\partial \xi^2}{\partial p^2}}{EG-FF} = -k\xi^2.$$

Unter Benutzung der Gleichung (I.) und der Identität

$$E\varrho^2-2F\varrho+G = 0$$

ergiebt sich aus denselben:

$$\text{(II.)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial p} = \frac{1}{2}\left\{-Ek\dfrac{1}{\frac{\partial \vartheta}{\partial p}}+\xi^2\dfrac{\partial \vartheta}{\partial p}\right\}, \\[2ex] \dfrac{\partial \xi}{\partial q} = \frac{1}{2}\left\{-Gk\dfrac{1}{\frac{\partial \vartheta}{\partial q}}+\xi^2\dfrac{\partial \vartheta}{\partial q}\right\}. \end{cases}$$

Das gleichzeitige Bestehen dieser Gleichungen erfordert die Erfüllung der Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial\left\{Gk\frac{1}{\frac{\partial \vartheta}{\partial q}}\right\}}{\partial p}-\frac{\partial\left\{Ek\frac{1}{\frac{\partial \vartheta}{\partial p}}\right\}}{\partial q}+2\xi\left(\frac{\partial \xi}{\partial q}\frac{\partial \vartheta}{\partial p}-\frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{\partial \vartheta}{\partial q}\right) = 0,$$

welche sich unter Zuhülfenahme der Gleichungen (I.) und (II.) in die folgende

$$\frac{\partial\left\{Gk\frac{1}{\frac{\partial\vartheta}{\partial q}}\right\}}{\partial p}-\frac{\partial\left\{Ek\frac{1}{\frac{\partial\vartheta}{\partial p}}\right\}}{\partial q}+2ik\xi\sqrt{EG-F^2} = 0$$

verwandelt.

Nach Einführung der von *Gauss* gegebenen Bezeichnungen

$$m = \tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p}, \qquad m' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, \quad m'' = \frac{\partial F}{\partial q}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p},$$

$$n = \frac{\partial F}{\partial p}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, \quad n' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}, \quad n'' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q},$$

$$\varDelta = EG-F^2$$

erhält man aus dieser Gleichung den Werth von ξ in der Form

$$-\xi = \frac{1}{\varrho\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\right)^2}\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial p\,\partial q}-i\frac{n'-m'\varrho}{\sqrt{\varDelta}}\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\right],$$

welcher sich bei Annahme der weiteren Bezeichnungen

$$\alpha = \frac{n-m\varrho}{\sqrt{\varDelta}} = \frac{En-Fm}{E\sqrt{\varDelta}}-\frac{i}{2E}\frac{\partial E}{\partial p},$$

$$\alpha' = \frac{n'-m'\varrho}{\sqrt{\varDelta}} = \frac{En'-Fm'}{E\sqrt{\varDelta}}-\frac{i}{2E}\frac{\partial E}{\partial q},$$

$$\alpha'' = \frac{n''-m''\varrho}{\sqrt{\varDelta}} = \frac{En''-Fm''}{E\sqrt{\varDelta}}-\frac{i}{E}\left(\frac{\partial F}{\partial q}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}\right),$$

als

$$\xi = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial\left\{\frac{1}{\frac{\partial\vartheta}{\partial p}}\right\}}{\partial q}+\alpha' i\cdot\left\{\frac{1}{\frac{\partial\vartheta}{\partial p}}\right\}\right]$$

ergiebt. Dieser Ausdruck selbst, ebenso wie die aus ihm ferner abzuleitenden, vereinfachen sich wesentlich, wenn man anstatt des Differentialquotienten $\frac{\partial\vartheta}{\partial p}$ die Quadratwurzel seines reciproken Werthes durch die Gleichung

$$V^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\right)}$$

in die Rechnung einführt.

Es besteht alsdann die Beziehung

$$\text{(III.)} \qquad d\vartheta = \frac{dp+\varrho\,dq}{V^2},$$

durch welche die Function V der Bedingung

$$\text{(IV.)}\qquad \varrho\frac{\partial V}{\partial p}-\frac{\partial V}{\partial q} = \tfrac{1}{2}V\frac{\partial\varrho}{\partial p}$$

unterworfen wird. Die zur Bestimmung von ξ aufgestellte Gleichung verwandelt sich in

$$\xi = \frac{1}{\varrho}V\Big[2\frac{\partial V}{\partial q}+\alpha' i V\Big],$$

und wird mit Hilfe der vorangehenden:

$$\xi = \frac{1}{\varrho}V\Big[2\varrho\frac{\partial V}{\partial p}+V\Big(\alpha' i-\frac{\partial\varrho}{\partial p}\Big)\Big].$$

Nun ergiebt die durch ϱ erfüllte Gleichung

$$E\varrho^2-2F\varrho+G = 0$$

nach Differentiation in Beziehung auf die Variabeln p und q mit leichter Mühe die Differentialquotienten von ϱ in den Formen

$$\text{(V.)}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\varrho}{\partial p} = i(\alpha'-\varrho\alpha),\\[2mm] \dfrac{\partial\varrho}{\partial q} = i(\alpha''-\varrho\alpha'),\end{cases}$$

und die Einführung des Werthes von $\frac{\partial\varrho}{\partial p}$ in die für die Function ξ zuletzt gegebene Darstellung führt zu der Gleichung:

$$\text{(VI.)}\qquad \xi = V\Big(2\frac{\partial V}{\partial p}+\alpha i V\Big).$$

Wenn man diesen Werth von ξ in die Gleichungen (II.) substituirt, so erhält man für die Differentialquotienten dieser Function

$$\frac{\partial\xi}{\partial p} = \tfrac{1}{2}\Big[-EkV^2+\Big(2\frac{\partial V}{\partial p}+\alpha iV\Big)^2\Big],$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial q} = \tfrac{1}{2}\Big[-\frac{Gk}{\varrho}V^2+\varrho\Big(2\frac{\partial V}{\partial p}+\alpha iV\Big)^2\Big].$$

Da der, aus Gleichung (VI.) hervorgehende Differentialquotient $\frac{\partial\xi}{\partial p}$ der Function ξ, mit dem durch die erste der vorstehenden Gleichungen gegebenen übereinstimmen muss, so ist die Function V an eine gewöhnliche, nur auf die Variable p bezügliche, Differentialgleichung zweiter Ordnung, nämlich die folgende

$$\Big(2\frac{\partial V}{\partial p}+\alpha iV\Big)\frac{\partial V}{\partial p}+V\Big(2\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}+\alpha i\frac{\partial V}{\partial p}+iV\frac{\partial\alpha}{\partial p}\Big) = -\frac{Ek}{2}V^2+\tfrac{1}{2}\Big(2\frac{\partial V}{\partial p}+\alpha iV\Big)^2$$

gebunden, welche nach Weglassung sich aufhebender Theile und Verwerfung des nicht verschwindenden Factors V in die *lineare* Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(VII.)} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + V \cdot \left[\frac{Ek}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{i}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right] = 0$$

übergeht.

Unter Berücksichtigung der Definition der Function V kann daher folgendes Theorem aufgestellt werden:

Eine complexe Function ϑ, welche in Verbindung mit ihrer Conjugirten ϑ^* die Transformation des Quadrates des Linienelementes einer Fläche constanter Krümmung

$$Edp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

in die Form

$$\frac{d\vartheta\, d\vartheta^*}{\left(\frac{k}{4} + \vartheta\vartheta^*\right)^2}$$

herbeiführt, genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\partial \vartheta}{\partial p}}}}{\partial p^2} + \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\partial \vartheta}{\partial p}}}\left[\frac{Ek}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{i}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right] = 0,$$

welche in Beziehung auf $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^{-\frac{1}{2}}$ linear und von der zweiten Ordnung ist.

In entsprechender Weise verhält sich die Function ϑ auch in Beziehung auf das zweite Argument q, wie aus der Vertauschbarkeit der Argumente p und q ohne Weiteres einleuchtet.

Ebenso genügt die Function V gleichfalls einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in Beziehung auf die Variable q, welche sich ergiebt, wenn man aus der Gleichung (VII.) und der Gleichung (IV.) so wie den zwei sich durch Differentiation dieser letzteren Gleichung ergebenden Gleichungen, die drei Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}$ eliminirt.

Da das Quadrat des Linienelementes

$$E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

in die Form

$$E(dp + \varrho\, dq)(dp + \varrho^*\, dq)$$

gesetzt werden kann, und ferner in Folge der Gleichung

$$d\vartheta = \frac{dp+\varrho dq}{V^2}$$

$\frac{1}{V^2}$ einen integrirenden Factor der Differentialgleichung

$$dp+\varrho dq = 0$$

darstellt, so kann der eben ausgesprochene Satz auch dahin aufgestellt werden, dass die Aufgabe der Bestimmung des integrirenden Factors derjenigen Differentialgleichung, welche durch Annullirung eines der complexen Factoren des Linienelementes einer Fläche von constantem Krümmungsmasse entsteht, von der Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung abhängig ist, deren Coefficienten durch die gegebenen Coefficienten des Linienelementes bestimmt sind.

2.

Die Function $V = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^{-\frac{1}{2}}$ genügte nach den vorangehenden Entwickelungen den Gleichungen

$$\text{(VII.)} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + V\left(\frac{Ek}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{i}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right) = 0,$$

$$\text{(IV.)} \qquad \varrho\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial V}{\partial q} - \tfrac{1}{2}V\frac{\partial \varrho}{\partial p} = 0.$$

Wir wollen nunmehr unter V überhaupt eine Function der Variabeln p, q verstehen, welche den vorstehenden Gleichungen Genüge leistet, und bemerken, dass unter dieser Festsetzung die zweite dieser Gleichungen den Umfang der Integrale der ersten auf denjenigen Bereich einschränkt, welche mit der Bestimmung des Werthes $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)^{-\frac{1}{2}}$ einer der in Rede stehenden Functionen ϑ in Verbindung steht.

Man übersieht leicht, dass, wenn V eine den oben aufgestellten Gleichungen genügende Function der Variabeln p, q ist, auch die Function

$$W = \frac{1}{\sqrt{E}}\left[\frac{\partial V^*}{\partial p} - \frac{\alpha^* i}{2}V^*\right]$$

den nämlichen Bedingungen Genüge leistet.

Zwei diesen Bedingungen genügende Functionen V und W erfüllen stets die Gleichung

$$V\frac{\partial W}{\partial p} - W\frac{\partial V}{\partial p} = c,$$

in welcher c eine von den Variabeln p und q unabhängige Constante ist, welche Gleichung eine Folge dieser Bedingungen ist.

Die Substitution des Werthes von W verwandelt diese Gleichung in die nachstehende

$$c = -\sqrt{E}\left[\frac{\frac{\partial V}{\partial p}+\frac{\alpha i}{2}V}{\sqrt{E}}\cdot\frac{\frac{\partial V^*}{\partial p}-\frac{\alpha^* i}{2}V^*}{\sqrt{E}}+\frac{k}{4}VV^*\right],$$

das heisst in

$$c = -\sqrt{E}\left[WW^*+\frac{k}{4}VV^*\right],$$

aus welcher Gleichung hervorgeht, dass die Constante c reell ist, und zwar stets negativ für positive Werthe von k. Unbeschadet der Allgemeinheit kann man den absoluten Werth dieser Constanten gleich Eins wählen, und in der Folge die Gleichung

$$\text{(VIII.)} \qquad \varepsilon = \sqrt{E}\left\{WW^*+\frac{k}{4}VV^*\right\}$$

als erfüllt voraussetzen, unter ε eine Quadratwurzel der Einheit verstanden. Das Eintreten des, für negative k möglichen, Falles eines Verschwindens der Constanten c lässt sich stets umgehen.

Die conjugirten complexen Functionen

$$\theta = \frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\frac{\partial V^*}{\partial p}-\frac{\alpha^* i}{2}V^*}{V},$$

$$\theta^* = \frac{W^*}{V^*} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\frac{\partial V}{\partial p}+\frac{\alpha i}{2}V}{V^*},$$

erfüllen in Folge der angedeuteten Beziehungen die Gleichungen

$$\varepsilon . d\theta = \frac{dp+\varrho\, dq}{V^2},$$

$$\varepsilon . d\theta^* = \frac{dp+\varrho^* dq}{V^{*2}},$$

aus denen

$$E(VV^*)^2 d\theta\, d\theta^* = E\,dp^2+2F\,dp\,dq+G\,dq^2$$

und durch Division mit dem der Einheit gleichen Quadrate des Werthes der rechten Seite der Gleichung (VIII.) die Gleichung

$$\frac{d\theta\, d\theta^*}{\left(\frac{k}{4}+\theta\theta^*\right)^2} = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

hervorgeht.

Es reicht daher ein einzelnes particuläres Integral der Differentialgleichung (VII.), wenn es auch der Bedingung (IV.) genügt, hin, um ohne weitere Quadratur zwei Functionen θ und θ^* anzugeben, welche die Ueberführung des Quadrates des Linienelementes einer Fläche constanter Krümmung bei gegebenen Coefficienten E, F, G in die vorstehend gegebene Form bewirken.

Da ferner die Function

$$\mathfrak{V} = aV + bW,$$

in welcher a und b willkürliche complexe Constanten vorstellen, ebenfalls den Gleichungen (VII.) und (IV.) Genüge leistet, und die ihr zugeordnete Function

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{\sqrt{E}}\left[\frac{\partial \mathfrak{V}^*}{\partial p} - \frac{a^* i}{2}\mathfrak{V}^*\right]$$

sich durch eine einfache Rechnung in der Gestalt

$$\mathfrak{W} = -b^*\frac{k}{4}V + a^* W$$

ergiebt, so sind auch die Functionen

$$\vartheta = \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{V}} = \frac{a^*\theta - b^*\frac{k}{4}}{b\theta + a},$$

$$\vartheta^* = \frac{\mathfrak{W}^*}{\mathfrak{V}^*} = \frac{a\theta^* - b\frac{k}{4}}{b^*\theta^* + a^*},$$

welche lineare gebrochene Functionen der Grössen θ und θ^* sind, wiederum geeignet, die Transformation des Quadrates des Linienelementes in die zum Ausgangspunkte gewählte Form

$$\frac{d\vartheta\, d\vartheta^*}{\left(\frac{k}{4}+\vartheta\vartheta^*\right)^2}$$

zu bewirken, was durch eine leichte Rechnung bestätigt wird.

3.

Die complexe Function

$$\xi = V\Big(2\frac{\partial V}{\partial p}+\alpha i V\Big),$$

in welcher V irgend eine den Bedingungen (IV.) und (VII.) genügende Function bezeichnet, hat eine Reihe von Eigenschaften, deren weitere Verfolgung der Mühe lohnt. Sie theilt dieselben mit allen Functionen von der Form

$$\xi = A\Big(\frac{\partial V}{\partial p}\Big)^2+2B\frac{\partial V}{\partial p}V+CV^2,$$

wenn durch V eine gemeinsame Lösung der Differentialgleichungen

$$\text{(IX.)} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} = \delta V,$$

$$\text{(X.)} \quad \frac{\partial V}{\partial q} = \beta\frac{\partial V}{\partial p}+\gamma V$$

bezeichnet wird, und unter A, B, C beliebig gegebene Functionen der unabhängigen Variabeln p, q, dagegen unter δ, β, γ derart gegebene verstanden werden, dass eine gemeinsame Lösung dieser Differentialgleichungen existirt.

Bildet man die ersten Differentialquotienten von ξ, und bemerkt, dass in Folge der für V bestehenden Differentialgleichungen die Werthe von $\frac{\partial V}{\partial q}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial p\partial q}$ durch V und $\frac{\partial V}{\partial p}$ linear ausdrückbar sind, so erhält man

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = A_1\Big(\frac{\partial V}{\partial p}\Big)^2+2B_1\frac{\partial V}{\partial p}V+C_1V^2,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial q} = A_2\Big(\frac{\partial V}{\partial p}\Big)^2+2B_2\frac{\partial V}{\partial p}V+C_2V^2,$$

in welchen Gleichungen die Coefficienten A_1, A_2, ... etc. aus gegebenen Functionen und ihren ersten Differentialquotienten zusammengesetzt sind. In gleicher Weise erscheinen hiernach auch die höheren Differentialquotienten der Function ξ als lineare Functionen der Grössen $\Big(\frac{\partial V}{\partial p}\Big)^2$, $\frac{\partial V}{\partial p}V$, V^2 mit aus gegebenen Functionen und ihren Differentialquotienten zusammengesetzten Coefficienten.

Man hat daher für die Function ξ, wenn man sich auf die Bildung

der ersten und zweiten Differentialquotienten *) beschränkt, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\xi &= A\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2+2B\,\frac{\partial V}{\partial p}V+C\,V^2,\\
\frac{\partial \xi}{\partial p} &= A_1\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2+2B_1\,\frac{\partial V}{\partial p}V+C_1\,V^2,\\
\frac{\partial \xi}{\partial q} &= A_2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2+2B_2\,\frac{\partial V}{\partial p}V+C_2\,V^2,\\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial p^2} &= A_{11}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2+2B_{11}\frac{\partial V}{\partial p}V+C_{11}V^2,\\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial p\,\partial q} &= A_{12}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2+2B_{12}\frac{\partial V}{\partial p}V+C_{12}V^2,\\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial q^2} &= A_{22}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2+2B_{22}\frac{\partial V}{\partial p}V+C_{22}V^2.
\end{aligned}$$

Bestimmt man aus den drei ersten dieser Gleichungen die Grössen $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2$, $\frac{\partial V}{\partial p}V$, V^2, zwischen denen die Relation

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 V^2-\left(\frac{\partial V}{\partial p}V\right)^2 = 0$$

besteht, so erkennt man, dass die Function ξ und ihre Differentialquotienten $\frac{\partial \xi}{\partial p}$, $\frac{\partial \xi}{\partial q}$ im Allgemeinen eine Gleichung von der Form

$$F\left(\xi,\ \frac{\partial \xi}{\partial p},\ \frac{\partial \xi}{\partial q}\right) = 0$$

erfüllen, in welcher die Function F eine ganze homogene Function zweiten Grades ihrer Argumente, mit gegebenen von p, q abhängigen Coefficienten, darstellt. Führt man ferner die eben bestimmten Grössen in die drei letzten der obigen Gleichungen ein, so ergeben sich drei partielle Differentialgleichungen von der Form

$$(\text{XI.})\quad \begin{cases}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial p^2}+M\,\frac{\partial \xi}{\partial p}+N\,\frac{\partial \xi}{\partial q}+P\xi = 0,\\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial p\,\partial q}+M'\,\frac{\partial \xi}{\partial p}+N'\,\frac{\partial \xi}{\partial q}+P'\xi = 0,\\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial q^2}+M''\frac{\partial \xi}{\partial p}+N''\frac{\partial \xi}{\partial q}+P''\xi = 0,
\end{cases}$$

*) Man bemerkt sofort, dass zwischen je vier irgendwelchen Differentialquotienten der Function ξ eine homogene lineare Relation besteht, und so unter anderen zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen dritter Ordnung durch dieselbe erfüllt werden; eine Eigenschaft, die auch aus den Gleichungen (XI.) folgt.

denen die Function ξ gleichzeitig Genüge leistet, deren Integrabilitätsbedingungen daher identisch erfüllt sind.

Da diesem System partieller Differentialgleichungen durch jede Function

$$\xi = A\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 + 2B\frac{\partial V}{\partial p}V + CV^2$$

Genüge geleistet wird, für welche V den gegebenen linearen Differentialgleichungen (IX.) und (X.) unterworfen ist, so genügt auch die Function

$$\xi' = A\left(\frac{\partial V}{\partial p} + m\frac{\partial W}{\partial p}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial V}{\partial p} + m\frac{\partial W}{\partial p}\right)(V+mW) + C(V+mW)^2,$$

wenn W ein zweites Integral dieser Differentialgleichungen und m eine willkürliche Constante, den nämlichen drei simultanen partiellen Differentialgleichungen.

Das in Rede stehende System partieller linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung (XI.) wird daher befriedigt durch die Functionen

$$\begin{aligned}
\xi &= A\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 + 2B\frac{\partial V}{\partial p}V + CV^2,\\
\mathfrak{z} &= A\frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial W}{\partial p} + B\left(W\frac{\partial V}{\partial p} + V\frac{\partial W}{\partial p}\right) + CVW,\\
\eta &= A\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)^2 + 2B\frac{\partial W}{\partial p}W + CW^2,
\end{aligned}$$

welche *drei* linear unabhängige Integrale desselben darstellen, eine Anzahl die für das System offenbar die nothwendige und hinreichende ist. Zwischen diesen Integralen besteht die Beziehung

$$\xi\eta - \mathfrak{z}^2 = (AC-B^2)\left(V\frac{\partial W}{\partial p} - W\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2$$

oder in Folge der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (IX.), von welcher V und W Integrale sind, die folgende:

$$\xi\eta - \mathfrak{z}^2 = (AC-B^2)f(q)^2.$$

In dem uns vorliegenden Falle, in welchem

$$\begin{aligned}
\delta &= -\left\{\frac{kE}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{i}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right\},\\
\beta &= \varrho,\\
\gamma &= -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \varrho}{\partial p},\\
A &= 0,\quad B = 1,\quad C = \alpha i
\end{aligned}$$

vorausgesetzt sind, wählen wir für W das dem Integrale V zugeordnete

$$W = \frac{1}{\sqrt{E}}\left\{\frac{\partial V^*}{\partial p} - \frac{\alpha^* i}{2} V^*\right\}$$

und erhalten für die drei linear unabhängigen Integrale des diesem Falle entsprechenden Systems linearer partieller Differentialgleichungen (welches im nächsten Abschnitte in definitiver Form angegeben wird) die nachstehenden Werthe:

$$\begin{aligned}
\xi &= V\left(2\frac{\partial V}{\partial p} + \alpha i V\right), \\
\eta &= W\left(2\frac{\partial W}{\partial p} + \alpha i W\right), \\
z &= V\frac{\partial W}{\partial p} + W\frac{\partial V}{\partial p} + \alpha i V W,
\end{aligned}$$

welche sich nach einer einfachen Rechnung in den Formen

$$\begin{aligned}
\xi &= 2VW^*\sqrt{E}, \\
\eta &= -\frac{k}{2}V^*W\sqrt{E}, \\
z &= \left(WW^* - \frac{k}{4}VV^*\right)\sqrt{E}
\end{aligned}$$

darstellen lassen. Zwischen ihnen besteht die Relation

$$z^2 - \xi\eta = 1.$$

4.

Die Ausführung der auf die Function

$$\xi = 2V\frac{\partial V}{\partial p} + \alpha i V^2$$

zur Herstellung der Gleichungen (XI.) bezüglichen Entwickelungen führt schliesslich zu dem nachstehenden System linearer partieller Differentialgleichungen:

$$(\text{XII.})\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\xi}{\partial p^2} - \frac{Gm - Fn}{\Delta}\frac{\partial\xi}{\partial p} - \frac{En - Fm}{\Delta}\frac{\partial\xi}{\partial q} + kE\xi = 0, \\
&\frac{\partial^2\xi}{\partial p\partial q} - \frac{Gm' - Fn'}{\Delta}\frac{\partial\xi}{\partial p} - \frac{En' - Fm'}{\Delta}\frac{\partial\xi}{\partial q} + kF\xi = 0, \\
&\frac{\partial^2\xi}{\partial q^2} - \frac{Gm'' - Fn''}{\Delta}\frac{\partial\xi}{\partial p} - \frac{En'' - Fm''}{\Delta}\frac{\partial\xi}{\partial q} + kG\xi = 0,
\end{aligned}\right.$$

in welchem $m, n \ldots \Delta$ die ihnen von *Gauss* gegebene Bedeutung haben. Wählt man die für allgemeinere Untersuchungen entsprechendere Bezeich-

nungsweise *Christoffels*, und setzt $E = \omega_{11}$, $F = \omega_{12}$, $G = \omega_{22}$, $p = p_1$, $q = p_2$, so können diese Gleichungen durch die eine:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial p_i \partial p_j} - \sum_\lambda \left\{ \begin{matrix} i\,j \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial \xi}{\partial p_\lambda} + k\,\omega_{ij}.\xi = 0, \quad \left. \begin{matrix} i \\ j \\ \lambda \end{matrix} \right\} = 1,\ 2$$

repräsentirt werden.

Dieses Gleichungssystem, dessen leicht zu bildende Verallgemeinerung in der Theorie der Mannigfaltigkeiten von überall constanter Krümmung in der nämlichen Bedeutung*) auftritt, legt den an dasselbe gebundenen Functionen eine Reihe von Eigenschaften auf, von denen die nachstehenden die hervorragendsten sind.

Eine Function z, welche diesem Systeme genügt, ist vollständig bestimmt, wenn der Werth von z und die Werthe der Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial p}$ und $\frac{\partial z}{\partial q}$ für ein willkürliches Werthenpaar $p = p_0$, $q = q_0$ gegeben sind.

Die Differenz zweier Functionen z, welche für $p = p_0$, $q = q_0$, ebenso wie ihre ersten Differentialquotienten, gleichwerthig werden, würde den Gleichungen (XII.) genügen, und daher eine Function darstellen, welche für $p = p_0$, $q = q_0$ selbst, nebst ihren sämmtlichen Ableitungen verschwände, und hiernach mit Null identisch sein.

Jede Function z, welche diesem Systeme genügt, ist durch drei beliebige linear unabhängige Functionen ξ, η, ζ, welche ihm genügen, als homogene lineare Function derselben darstellbar.

Drei linear unabhängige Integrale ξ, η, ζ des Systems sind stets durch eine Gleichung

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 1$$

mit einander verbunden, in der unter $f(\xi, \eta, \zeta)$ eine ganze homogene Function zweiten Grades der Grössen ξ, η, ζ verstanden werden soll.

---

*) Die entsprechenden Eigenschaften des Systems (XII.) kommen auch dem für n Dimensionen aufzustellenden Systeme zu, wenn das Linienelement

$$\Sigma \omega_{ik} dp_i dp_k$$

in die Form

$$\frac{\Sigma dx_i^2}{\left(\frac{k}{4} + \Sigma x_i^2\right)^2}$$

transformirbar ist.

Ist z irgend eines der Integrale des Systems, so besteht die Gleichung

$$\frac{E\frac{\partial z^2}{\partial q^2}-2F\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}+G\frac{\partial z^2}{\partial p^2}}{EG-F^2} = a-kz^2,$$

in der a eine dieser Function zugehörige Constante bezeichnet. Unter derselben Voraussetzung über z stellt die Gleichung

$$z = 0$$

ein Integral der Differentialgleichung der geodätischen Linien derjenigen Flächen dar, von denen

$$Edp^2+2Fdp\,dq+G\,dq^2$$

das Quadrat des Linienelementes ist.

Der Beweis der drei zuletzt aufgestellten Sätze, der auch leicht *direct* gegeben werden kann, wird durch die Bemerkung erhalten, dass den Differentialgleichungen des Systems (XII.) der Charakter der Invarianz innewohnt, das heisst, dass eine Function z, welche denselben Genüge leistet, durch die Einführung neuer Variabeln p', q' anstatt p, q in eine Function dieser Variabeln übergeht, welche demjenigen Gleichungssysteme genügt, dessen Coefficienten in gleicher Weise aus den Coefficienten des transformirten Linienelementes gebildet sind, wie die des Gleichungssystems (XII.) aus denen des ursprünglichen.

Bezeichnet man die linken Seiten der Gleichungen (XII.) unter Voraussetzung einer beliebig gewählten Function ξ, der Reihe nach durch $\xi(p,p)$, $\xi(p,q)$, $\xi(q,q)$, so ist diese Invarianz eine Folge der leicht nachzuweisenden Identität

$$\xi(p,p)\,dp^2+2\xi(p,q)\,dp\,dq+\xi(q,q)\,dq^2 = \xi'(p',p')\,dp'^2+2\xi'(p',q')\,dp'dq'+\xi'(q',q')\,dq'^2.$$

Da durch Einführung der im ersten Abschnitt definirten Variabeln σ, τ sich das Quadrat des Linienelementes der Flächen constanter Krümmung stets in die Form

$$d\sigma^2+\left[\frac{\sin(\sigma\sqrt{k})}{\sqrt{k}}\right]^2 d\tau^2$$

setzen lässt, so genügt eine dem Systeme (XII.) genügende Function z auch dem Systeme

$$
\text{(XII'.)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} + kz = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 z}{\partial \sigma \partial \tau} - \sqrt{k}\,\mathrm{ctg}(\sigma\sqrt{k})\dfrac{\partial z}{\partial \tau} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + \dfrac{\sin(\sigma\sqrt{k})\cos(\sigma\sqrt{k})}{\sqrt{k}}\dfrac{\partial z}{\partial \sigma} + \sin^2(\sigma\sqrt{k}).z = 0, \end{cases}
$$

welches ersichtlich durch die Functionen

$$\xi_1 = \sin(\sigma\sqrt{k})e^{\tau i}, \quad \eta_1 = -\sin(\sigma\sqrt{k})e^{-\tau i}, \quad \zeta_1 = \cos(\sigma\sqrt{k})$$

befriedigt wird. Zwischen diesen drei particulären Integralen auch des ursprünglichen Systems besteht die Beziehung

$$\zeta_1^2 - \xi_1\eta_1 = 1,$$

welche durch Benutzung anderer particulärer Integrale, die stets homogene lineare Functionen dieser besonderen sind, in die Form

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 1$$

übergeht, wie oben behauptet wurde.

In gleicher Weise ergiebt sich der Beweis des vierten der aufgestellten Sätze aus dem allgemeinen Integral

$$z = A\cos(\sigma\sqrt{k}) + (B\cos\tau + C\sin\tau)\sin(\sigma\sqrt{k}),$$

welches sofort die Gleichung

$$\frac{E\dfrac{\partial z^2}{\partial q^2} - 2F\dfrac{\partial z}{\partial p}\dfrac{\partial z}{\partial q} + G\dfrac{\partial z^2}{\partial p^2}}{EG - F^2} = \frac{\dfrac{\partial z^2}{\partial \tau^2} + \left[\dfrac{\sin(\sigma\sqrt{k})}{\sqrt{k}}\right]^2\dfrac{\partial z^2}{\partial \sigma^2}}{\left[\dfrac{\sin(\sigma\sqrt{k})}{\sqrt{k}}\right]^2} = a - kz^2$$

als erfüllt erweist.

Was schliesslich den zuletzt aufgeführten Satz betrifft, so ist er eine Folge der Form des vorstehenden allgemeinen Integrals des mit (XII.) identischen Gleichungssystems (XII'.), oder aber auch eine einfache Folge der Differentialgleichung der geodätischen Linien einer krummen Oberfläche, wenn dieselbe in der von Herrn *Christoffel* gegebenen Form geschrieben wird. (*Christoffel,* Abhandlungen der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1869. pag. 126).

5.

Nach dem Vorhergehenden hat es keine Schwierigkeit mit Hilfe irgend eines particulären Integrals der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}+V\left(\frac{Ek}{4}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{i}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right) = 0,$$

welches gleichzeitig der Bedingung

$$\varrho\frac{\partial V}{\partial p}-\frac{\partial V}{\partial q} = \tfrac{1}{2}V\frac{\partial \varrho}{\partial p}$$

genügt, die Gleichung der geodätischen Linien der Flächen constanter Krümmung anzugeben.

Benutzt man die am Schlusse des dritten Abschnitts gegebenen drei particulären Lösungen ξ, η, z des Systems (XII.) zur Herstellung eines allgemeinen Integrals, und identificirt dieses, gemäss den im vorhergehenden Abschnitte gemachten Ausführungen, mit Null, so erhält man die endliche Gleichung der geodätischen Linien der Flächen constanter Krümmung in der folgenden, offenbar reellen Form:

$$aVW^*+a^*V^*W+WW^*-\frac{k}{4}VV^* = 0,$$

wenn unter a und a^* zwei conjugirte complexe Constante verstanden werden.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Bestimmung der Bogenlänge σ einer geodätischen Linie, welche die Punkte (p, q), (p_0, q_0) einer Fläche constanter Krümmung verbindet, ebenfalls durch die Kenntniss einer solchen Function V, ohne weitere Integration, erhalten wird.

Es ist nämlich die Function

$$\cos(\sigma\sqrt{k}),$$

wie bemerkt worden, eine den Differentialgleichungen (XII.) genügende Function, und zwar diejenige, welche für $p=p_0$, $q=q_0$ der Eins gleich wird, und deren nach p und q genommene Differentialquotienten

$$-\sqrt{k}\sin(\sigma\sqrt{k})\frac{\partial \sigma}{\partial p},\quad -\sqrt{k}\sin(\sigma\sqrt{k})\frac{\partial \sigma}{\partial q}$$

für die nämlichen Werthe in Null übergehen.

Bezeichnen ξ, η, z wiederum die am Schlusse des dritten Abschnitts gegebenen Functionen, und ξ_0, η_0, z_0 diejenigen Werthe, welche aus ihnen hervorgehen, wenn man $p=p_0$, $q=q_0$ setzt, so hat die homogene lineare Function der Grössen ξ, η, z

$$zz_0-\tfrac{1}{2}(\xi\eta_0+\eta\xi_0)$$

offenbar die Eigenschaft, den Differentialgleichungen (XII.) zu genügen und für $p=p_0$, $q=q_0$ in Folge der Beziehung

$$z^2-\xi\eta = 1$$

den Werth Eins anzunehmen, während sich ihre Differentialquotienten für $p = p_0$, $q = q_0$ als Null ergeben. Sie ist daher mit $\cos(\sigma\sqrt{k})$ identisch, und es besteht die Gleichung:

$$\cos(\sigma\sqrt{k}) = zz_0 - \tfrac{1}{2}(\xi\eta_0 + \eta\xi_0),$$

aus welcher sich sofort die fernere

$$\text{(XIII.)} \quad 4\sin^2\left(\frac{\sigma\sqrt{k}}{2}\right) = (z_0 - z)^2 - (\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta) = 2 - 2\cos(\sigma\sqrt{k})$$

ergiebt. Es ist daher σ nach einer einfachen Rechnung durch die Gleichung

$$4\sin^2\left(\frac{\sigma\sqrt{k}}{2}\right) = k\frac{\left(\frac{W_0}{V_0} - \frac{W}{V}\right)\left(\frac{W_0^*}{V_0^*} - \frac{W^*}{V^*}\right)}{\left(\frac{k}{4} + \frac{W_0}{V_0}\frac{W_0^*}{V_0^*}\right)\left(\frac{k}{4} + \frac{W}{V}\frac{W^*}{V^*}\right)}$$
$$= k\frac{(\theta_0 - \theta)(\theta_0^* - \theta^*)}{\left(\frac{k}{4} + \theta_0\theta_0^*\right)\left(\frac{k}{4} + \theta\theta^*\right)}$$

bestimmt.

Aus der Gleichung (XIII.) schliesst man unter der Voraussetzung, dass $p_0 = p + dp$, $q_0 = q + dq$ gewählt seien, unter welcher Voraussetzung σ in das die Punkte (p, q), $(p + dp, q + dq)$ verbindende Linienelement übergeht, die folgende Gleichung, welche stets durch die Functionen ξ, η, z erfüllt wird:

$$\text{(XIV.)} \quad dz^2 - d\xi\, d\eta = k(E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2).$$

Nun sind die Functionen ξ und η ihrer Zusammensetzung nach von den Formen

$$\xi = 2(x + yi),$$
$$\eta = -\frac{k}{2}(x - yi),$$

in denen x und y *reelle*, durch ξ, η linear ausdrückbare Functionen der Variabeln p, q sind, welche gleichfalls dem Systeme der Gleichungen (XII.) genügen. Führt man diese Functionen in die vorstehende Relation (XIV.) ein, so erhält man die Gleichungen:

$$dx^2 + dy^2 + \frac{1}{k}dz^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2,$$
$$x^2 + y^2 + \frac{1}{k}z^2 = \frac{1}{k},$$

welche stets bestehen, wenn das vorgelegte Linienelement dasjenige einer Fläche constanter Krümmung ist.

Unter der besonderen Voraussetzung $k = 1$ verwandeln sich diese Gleichungen in die folgenden

$$dx^2+dy^2+dz^2 = E\,dp^2+2F\,dp\,dq+G\,dq^2,$$
$$x^2+y^2+z^2 = 1,$$

welche, da x, y, z reelle, durch ein gegebenes Integral V darstellbare Functionen der Variabeln p, q sind, zeigen, dass die Aufgabe:

Aus dem gegebenen Quadrate des Linienelementes einer Kugel

$$E\,dp^2+2F\,dp\,dq+G\,dq^2$$

die Coordinaten x, y, z eines Punktes derselben in einem orthogonalen Axensystem als Functionen von p und q zu bestimmen,

mit der Ermittelung irgend einer Function V, welche der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}+V\left(\frac{E}{4}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{i}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial p}\right) = 0$$

und der Bedingung:

$$\varrho\frac{\partial V}{\partial p}-\frac{\partial V}{\partial q} = \tfrac{1}{2}V\frac{\partial\varrho}{\partial p}$$

genügt, ihre Lösung findet.

Die Lösung dieser Aufgabe hängt wiederum auf das Innigste zusammen mit der Erledigung der Frage nach der definitiven Darstellung dreier Functionen x, y, z von drei Variabeln $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$, welche die in den Differentialen $d\varrho, d\varrho_1, d\varrho_2$ quadratische positive Form

$$\omega_{00}\,d\varrho^2+\omega_{11}\,d\varrho_1^2+\omega_{22}\,d\varrho_2^2+2\omega_{12}\,d\varrho_1\,d\varrho_2+2\omega_{20}\,d\varrho_2\,d\varrho+2\omega_{01}\,d\varrho\,d\varrho_1,$$

für deren Coefficienten ω_{ik} die durch *Riemann, Christoffel, Lipschitz* gegebenen Bedingungen der Ueberführung in eine Form mit constanten Coefficienten bestehen, in die Summe

$$dx^2+dy^2+dz^2$$

überführen.

Die Beschäftigung mit dieser Frage ist die Veranlassung zu den vorstehenden Untersuchungen gewesen.

Berlin 1882.

Studien über die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen.

(Von Herrn *J. Worpitzky*.)

Diejenigen Notizen über die Vorgeschichte des hier zu behandelnden Gegenstandes, welche ich voranschicke, beanspruchen keineswegs das Prädicat der Vollständigkeit. Sie dürften jedoch manchem Leser aus dem Grunde erwünscht sein, weil es bei der Zerstreutheit der einschlägigen Arbeiten viel Zeit und Mühe erfordert, das Material zusammenzutragen, ohne einige Sicherheit, Wesentliches nicht übersehen zu haben.

Es war *Jacob Bernoulli* in seiner „Ars conjectandi, Basileae. 1713" bei der Summation gleich hoher Potenzen der natürlichen Zahlen auf gewisse Zahlen aufmerksam geworden, für welche zuerst *Moivre* in seinen „Miscellanea analytica. 1730" eine Form des Recursionsgesetzes fand, und deren allgemeinere Bedeutsamkeit *Euler* in seinen „Institutiones calculi differentialis. 1755" dadurch ins Licht stellte, dass er einfache Beziehungen zu ihnen in anderen analytischen Gebilden klarlegte, z. B. in den Ausdrücken für $\underset{z=0}{D^{2r-1}}\operatorname{tng} z$. — Die Werthe des letztgenannten Differentialquotienten für die verschiedenen r hat man sich in neuerer Zeit gewöhnt „*Euler*sche Zahlen" zu nennen, während man nach dem Vorgange von *Euler* die Benennung „*Bernoulli*sche Zahlen" für die von *J. Bernoulli* entdeckten beibehält. Ich werde mir erlauben, im Anschluss an die Bezeichnung in meinem Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, ausser den $\underset{z=0}{D^{2r-1}}\operatorname{tng} z = u_{2r}$ auch die $\underset{z=0}{D^{2r}}\sec z = u_{2r+1}$ als *Euler*sche Zahlen zu benennen, weil sie einerseits ebenfalls bei *Euler* vorkommen und andererseits mit jenen in enger Beziehung stehen, so wie sehr ähnlichen Relationen genügen, wie jene.

Die Werthe der 31 ersten *Bernoulli*schen Zahlen hat *Ohm* im 20. Bande dieses Journals, S. 11, aus den Rechnungen *Eulers* und *Rothes* zusammengestellt, diejenigen der 62 ersten *Bernoulli*schen Zahlen theilt *Adams* Bd. 85, p. 269 ff. mit. Die Anzahl der Recursionsformeln zu deren Berechnung ist allmählich stark angewachsen, da die meisten Relationen, in denen *Bernoulli*sche Zahlen auftreten, Anlass zur Vermehrung derselben bieten; neuerdings noch liegen Publicationen dieser Art von *Seidel, Radicke* und *Lucas* vor. — Meine Absicht ist nicht auf dasselbe Ziel gerichtet, sondern auf die Ableitung von independenten Ausdrücken für die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen, indem ich darunter solche Ausdrücke verstehe, welche jene Zahlen vermittelst der Operationen der gemeinen Rechnungsarten völlig darstellen, ohne hinterher noch die Auflösung von Gleichungen oder Determinanten zu verlangen. Es werden sich dabei nebenher auch Recursionsformeln ergeben; sollten neue unter ihnen vorkommen, so lege ich darauf kein Gewicht, sondern nur auf ihren Zusammenhang mit anderen Relationen, aus denen sie gerade entspringen. Wo mir ihr erster Entdecker bekannt ist, werde ich ihn angeben.

Die erste in obigem Sinne independente Formel scheint von *Laplace* gefunden zu sein (vergl. *Lacroix:* Traité des différences, Paris. 1800, p. 106), nämlich die Formel (75.) dieser Abhandlung. *Lacroix* leitet sie aus der Theorie der Differenzen ab; *Grunert* (Mathematische Abhandlungen, Altona. 1822, S. 69—93) reproducirt sie mit veränderter Ableitung, desgleichen der vierte Band des *Klügel*schen Wörterbuchs (S. 608), wo aber der Beweis vermittelst divergenter Reihen geführt wird. Dann bringt *Scherk* sie wieder in Erinnerung in seiner Abhandlung „Über einen allgemeinen, die *Bernoulli*schen Zahlen und die Coefficienten der Secantenreihe zugleich darstellenden Ausdruck" vom Jahre 1829 (dieses Journal, Bd. 4, S. 299—304) und leitet die hier unter (88.) und (83.) für u_{2r} und u_{2r+1} aufgeführten Formeln ab, nachdem er bereits vier Jahre früher (Mathematische Abhandlungen. Berlin. 1825) die Secantencoefficienten u_{2r+1} independent dargestellt hatte. Einen anderen Beweis für die *Scherk*schen Formeln giebt 1846 *Schlömilch,* dieses Journ., Bd. 32, S. 360. Ferner sind mir noch bekannt geworden einige sehr complicirte independente Formeln für die *Bernoulli*schen Zahlen, welche *Eisenlohr* auf dem Wege der Induction gefunden hat (dieses Journ., 1844, Bd. 28, S. 193—212: Entwickelung der Functionsweise der *Bernoulli*schen Zahlen.) Sie gehören zur Gattung derjenigen Ausdrücke, welche sich aus

den nachfolgenden beiden Formen (10.) und (16.) der *Bernoulli*schen Functionen in unbeschränkter Anzahl bilden lassen.

Von dieser Zeit an tritt ein neuer Gesichtspunkt für die Behandlung unseres Gegenstandes auf, indem *Raabe* diejenige einfachste algebraische Function, welche bei den ganzzahligen Werthen der Variabeln in die *Bernoulli*sche Summenformel übergeht, einer eingehenden Untersuchung unterwirft (Die *Jacob-Bernoulli*sche Function. Zürich. 1848.) und die gewonnenen Resultate in einer zweiten Abhandlung (Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die *Jacob-Bernoulli*sche Function. 1851. Dieses Journal, Bd. 42, S. 348—376.) wesentlich ergänzt. Hierauf stellte *Schlömilch* (im 1. Bande der Zeitschrift für Math. und Physik. 1856. S. 193) die *Bernoulli*schen Functionen als Specialwerthe von Differentialquotienten dar — bei uns die Formeln (27.) und (28.) — und leitete die wichtigsten Resultate der Untersuchungen *Raabe*s mit höchster Eleganz aus diesen Ausdrücken ab. Auf die Ausdrücke für u_{2r} und u_{2r+1} von *Laplace* und *Scherk* kommt er aber dabei nicht zurück.

Seitdem hat die Literatur über die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen, abgesehen von neuen Recursionsformeln und von Beziehungen zahlentheoretischen Charakters, meines Wissens keine wesentliche Bereicherung erfahren.

Wenn ich nun einen so vielfach behandelten Stoff wieder in die Hand nehme, so brauche ich mich wohl nicht zu entschuldigen, dass ich manches nicht Neue von neuem vorführe, dagegen anderes unerwähnt lasse, was nicht übergangen werden dürfte, wenn es sich um eine Generalbearbeitung unseres Gegenstandes handelte. Das Erstere wird jeder Leser, dem das Thema von vorneherein weniger nahe liegt, verlangen, um im Zusammenhange erhalten zu bleiben; auch ist es häufig grade der Zusammenhang zwischen den Einzelresultaten, auf den ich das Gewicht lege. Auf manches hier Uebergangene gedenke ich a. a. O. zurückzukommen.

1. Der Gedanke, von welchem sich *Raabe* bei der Creirung der *Bernoulli*schen Functionen leiten liess, ist — wie gesagt — dieser: die einfachste algebraische Function zu discutiren, welche für die ganzen positiven Argumente in eine Summe gleich hoher Potenzen der ganzen Zahlen nach ihrer natürlichen Folge übergeht.

Als Vorarbeit hierfür fand er vor die Erweiterung der *Bernoulli*schen Summationsformel auf die Summe der m^{ten} Potenzen der Glieder einer arith-

metischen Reihe mit der beliebigen Differenz h, welche auf Seite 70 des Traité des différences von *Lacroix* — unter Kürzung der Schreibweise — so lautet:

$$\Sigma x^m =$$

$$\frac{1}{(m+1)h}\left\{x^{m+1}-\tfrac{1}{2}(m+1)h.x^m+\binom{m+1}{2}\cdot B_1.h^2.x^{m-1}-\binom{m+1}{4}\cdot B_2.h^4.x^{m-3}+\cdots\right\}+\text{const.}$$

Es lag ihm somit ob, diese Formel unter der Substitution von $h=1$ so zu behandeln, wie man vom unbestimmten Integral zum bestimmten übergeht, und dabei die untere Grenze zweckmässig auszuwählen.

Er that dies so, dass die Function*)

$$(1.)\qquad \mathfrak{B}(x,n) = x^n-\tfrac{1}{2}n.x^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot B_1.x^{n-2}-\binom{n}{4}\cdot B_2.x^{n-4}+\binom{n}{6}\cdot B_3.x^{n-6}-\cdots$$

für $x=0$ verschwindet, indem er die Bestimmung traf, dass das letzte Glied dieses Ausdrucks dasjenige sein soll, welches entweder x^1 oder x^2 enthält.

Die *Bernoulli*schen Zahlen B_1, B_2, B_3, ... bezeichnet *Raabe* ebenso, wie es in (1.) geschehen ist, schreibt aber $B'(x)$ oder $B''(x)$ für unser $\mathfrak{B}(x, n):n$, je nachdem n einen graden oder ungraden Werth hat**). *Schlömilch* schreibt***) $\varphi(x,n)$ für unser $\mathfrak{B}(x,n)$, worin ich hier nicht folge, um φ als allgemeines Functionszeichen frei zu behalten, und zugleich, um durch das Zeichen $\mathfrak{B}$ an die Bedeutung der Function zu erinnern.

Die Form (1.) der Function $\mathfrak{B}(x,n)$ soll die *Raabesche Form* der *Bernoulli*schen Functionen heissen, trotz der aus praktischen Gründen (zuerst von *Schlömilch*) vorgenommenen Abänderung.

Sie setzt voraus, dass man ausserdem ein Mittel kenne, die *Bernoulli*schen Zahlen B_r zu berechnen, etwa die Recursionsformel:

$$(2.)\qquad \binom{2r+1}{1}\cdot B_r-\binom{2r+1}{3}\cdot B_{r-1}+\binom{2r+1}{5}\cdot B_{r-2}-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r+1}{2r-1}\cdot B_1+(-1)^r\cdot\frac{2r-1}{2} = 0,$$

durch welche das Bildungsgesetz der B_r von *Moivre*†) zuerst fixirt worden ist.

*) Zwei Jahre früher (1846) hat *Arndt* (Bd. 31 dieses Journals, S. 249: Entwickelung der Summe der n^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen nach den Potenzen des Index vermittelst des *Taylor*schen Satzes.) diese Function ebenfalls dargestellt aber nicht discutirt.

**) Vergl.: *Raabe*, „Die *Jacob-Bernoulli*sche Function. Zürich. 1848". und die Abhandlung vom Jahre 1851, dieses Journal Bd. 42, S. 348—367.

***) Zeitschrift für Math. und Phys. 1856. Bd. I, S. 193, und in seinem Compendium der höheren Analysis.

†) *Moivre*. Miscellanea analytica. 1730.

Die oben citirte *Lacroix*sche Formel für Σx^m lässt sich nun als eine bestimmte Summenformel so schreiben:

$$(3.)\qquad \sum_{z=x}^{z=x+r-1} z^{n-1} = \frac{1}{n}\cdot\{\mathfrak{B}(x+r,n)-\mathfrak{B}(x,n)\}$$

und ergiebt für $x=0$:

$$(4.)\qquad 0^{n-1}+1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+\cdots+(r-1)^{n-1} = \frac{1}{n}\cdot\mathfrak{B}(r,n)$$

in Uebereinstimmung mit der *Bernoulli*schen Summationsformel*).

Den ursprünglichen Weg der Ableitung obiger Formeln vermittelst der Summation von Differenzenreihen wollen wir hier nicht nachgehen, da er wenig Anlass zu neuen Bemerkungen bietet.

Die mit jenen Hülfsmitteln gewonnenen Resultate werden im Folgenden nirgendwo als Grundlage der Deduction dienen. Die Aufzählung der Formeln (1.) bis (4.) konnte aber nicht umgangen werden, um den Gegenstand der folgenden Untersuchungen und ihrer Resultate mit den früheren gehörig zu identificiren.

2. Die *Raabe*sche Form der *Bernoulli*schen Functionen $\mathfrak{B}(x,n)$ verdankt ihre Entstehung im Grunde der Entwickelung von Σx^m in eine Potenzreihe unter Anwendung des binomischen Satzes.

Man kann auf einem ebenfalls ganz elementaren Wege noch andere Formen dadurch gewinnen, dass man x^n durch solche algebraische Functionen ausdrückt, welche sich leicht summiren lassen, sobald x die Reihe $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3,\ \ldots$ durchläuft; z. B. durch Tieffunctionen, welche im oberen Index den Summanden x haben.

Wir wollen einige Ausdrücke dieser Art näher betrachten.

Zunächst is es klar, dass die n Constanten $\overset{n}{\alpha}_1,\ \overset{n}{\alpha}_2,\ \overset{n}{\alpha}_3,\ \ldots,\ \overset{n}{\alpha}_n$ in geeigneter Weise bestimmt werden können, damit die Gleichung

$$(5.)\qquad x^n = \overset{n}{\alpha}_1\cdot\binom{x}{n}+\overset{n}{\alpha}_2\cdot\binom{x+1}{n}+\overset{n}{\alpha}_3\cdot\binom{x+2}{n}+\cdots+\overset{n}{\alpha}_n\cdot\binom{x+n-1}{n}$$

für jedes x gelte. Denn da beide Seiten dieser Gleichung durch x ohne Rest dividirt werden können, so enthält die Gleichung (5.), nach Potenzen von x geordnet, n Coefficienten, welche sämmtlich $=0$ sein müssen. Diese Bedingung ergiebt für die Bestimmung der n Zahlen $\overset{n}{\alpha}_r$ genau eben so viele simultane, einander nicht widersprechende und von einander unabhängige Gleichungen.

*) *Jacob Bernoulli.* Ars conjectandi. Basileae. 1713.

Da die letzteren linear sind, so folgt ferner, dass die Transformation (5.) nur auf *eine* Weise bewirkt werden kann. Und diese Erkenntniss führt zu dem Schluss, dass

$$(6.)\qquad \overset{n}{\alpha}_r = \overset{n}{\alpha}_{n+1-r}$$

sein muss, weil die Formel (5.) ihre ursprüngliche Gestalt mit blosser Vertauschung der hier als gleich bezeichneten Coefficienten wieder annimmt, wenn man in ihr x durch $(-x)$ ersetzt und sie dann durch $(-1)^n$ dividirt.

Giebt man dem x die Werthe $1, 2, 3, \ldots, n$ oder die Werthe $-1, -2, -3, \ldots, -n$ und berechnet aus dem resultirenden Gleichungssystem die Constanten $\overset{n}{\alpha}_r$, so folgt ohne welche Schwierigkeit*):

$$(7.)\qquad \overset{n}{\alpha}_r = r^n - \binom{n+1}{1}\cdot(r-1)^n + \binom{n+1}{2}\cdot(r-2)^n - \cdots + (-1)^{r-1}\cdot\binom{n+1}{r-1}\cdot 1^n;$$

denn wenn man die rechte Seite dieser Gleichung aus (5.) darstellt, so erhält in dem gewonnenen Ausdruck $\overset{n}{\alpha}_{r-k}$ den Coefficienten

$$\binom{n+k}{n} - \binom{n+k-1}{n}\cdot\binom{n+1}{1} + \binom{n+k-2}{n}\cdot\binom{n+1}{2} - \cdots + (-1)^k\cdot\binom{n}{n}\cdot\binom{n+1}{k}$$

$$= (-1)^k\cdot\left\{\binom{-n-1}{k} + \binom{-n-1}{k-1}\cdot\binom{n+1}{1} + \binom{-n-1}{k-2}\cdot\binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{-n-1}{0}\cdot\binom{n+1}{k}\right\}$$

$$= (-1)^k\cdot\binom{0}{k},$$

welcher für $k = 0$ den Werth $+1$ hat, sonst aber verschwindet.

Zum Zwecke einer anderweitigen Verification der Gleichung (6.) mag noch erwähnt werden, dass aus (7.) die Differenz $[\overset{n}{\alpha}_r - \overset{n}{\alpha}_{n+1-r}]$ als das

*) Die in (7.) dargestellten Zahlen $\overset{n}{\alpha}_r$ kommen bereits bei *Euler* (Instit. calc. diff. II. 1755.), *Laplace* und *Lacroix* (Traité des différences.) in Verbindung mit den *Bernoulli*schen Zahlen vor, dsgl. später bei *Grunert* (Mathem. Abhandlungen. Altona. 1822, Supplemente zu *Klügels* Wörterbuch. 1833.), ferner bei *Scherk* (Ueber einen allgemeinen, die *Bernoulli*schen Zahlen und die Coefficienten der Secantenreihe zugleich darstellenden Ausdruck. 1829. Dieses Journ. Bd. 4, S. 299.). Jedoch ist der Zusammenhang von dem obigen völlig verschieden, da jene Autoren die Gleichung (5.) nicht haben, welche bisher überhaupt noch nicht beachtet zu sein scheint. Daher weicht denn bei ihnen der Beweis der wichtigen Gleichung (6.) von dem obigen ab, da er entweder aus dem Ausdruck (7.) durch Umformung abgezogen wird oder aus der Entwickelung von $\frac{p-1}{p-e^u}$ nach u. — U. a. widmet *Scherk* dem Beweise der Gleichung (6.) auf letztgedachter Grundlage eine umfangreiche Anmerkung auf S. 302 im 4. Bande dieses Journals.

bekanntlich verschwindende allgemeine Glied der $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzenreihe der arithmetischen Reihe n^{ter} Ordnung ..., $(-2)^n$, $(-1)^n$, 0^n, 1^n, 2^n, ... erkannt wird.

Die Formel (7.) weist $\overset{n}{\alpha}_r$ als eine ganze Zahl aus. Dass deren Werth ein positiver sei, ergiebt sich am augenfälligsten aus der Recursionsformel

$$(8.)\qquad \overset{n}{\alpha}_r = r.\overset{n-1}{\alpha}_r + (n+1-r).\overset{n-1}{\alpha}_{r-1}.$$

Dieselbe entspringt aus (5.), wenn man diese Gleichung nach der Erniedrigung von n um 1 links mit x, rechts aber gliederweise bezüglich mit

$(x-n+1)+(n-1)$, $(x-n+2)+(n-2)$, $(x-n+3)+(n-3)$, ..., $(x-1)+1$

multiplicirt und dann das Resultat so zusammenzieht, dass die Form (5.) von neuem hervorgeht.

Bildet man endlich aus (5.) den Ausdruck für Σx^n unter Berücksichtigung der Formel

$$\binom{x}{n}+\binom{x+1}{n}+\binom{x+2}{n}+\cdots+\binom{x+r-1}{n} = \binom{x+r}{n+1}-\binom{x}{n+1},$$

so erhält man:

$$(9.)\qquad x^n+(x+1)^n+(x+2)^n+\cdots+(x+r-1)^n = \frac{1}{n+1}\cdot\{\mathfrak{B}(x+r,n+1)-\mathfrak{B}(x,n+1)\},$$

wobei

$$(10.)\qquad \mathfrak{B}(x,n) = n\cdot\left\{\overset{n-1}{\alpha}_1\cdot\binom{x}{n}+\overset{n-1}{\alpha}_2\cdot\binom{x+1}{n}+\overset{n-1}{\alpha}_3\cdot\binom{x+2}{n}+\cdots+\overset{n-1}{\alpha}_{n-1}\cdot\binom{x+n-2}{n}\right\}$$

gesetzt ist.

Dies ist eine *zweite Form der Bernoullischen Functionen.*

Denn die in (10.) aufgestellte Function verschwindet für $x=0$, wie die *Raabe*sche (1.), hat den n^{ten} Grad, wie jene, und besitzt mit ihr mehr gleiche Werthe, als der Grad n anzeigt, da sie nach (9.) auch die Relation (4.) für *jeden* ganzen positiven Werth von r erfüllt.

3. Ein zweiter Ausdruck für x^n von der anfangs des vorigen Abschnitts charakterisirten Art ist der folgende*):

$$(11.)\qquad x^n = \overset{n}{a}_1\cdot\binom{x}{1}+\overset{n}{a}_2\cdot\binom{x}{2}+\overset{n}{a}_3\cdot\binom{x}{3}+\cdots+\overset{n}{a}_n\cdot\binom{x}{n}.$$

Dass die Constanten a dieser Relation gemäss bestimmt werden können,

*) Er findet sich bereits bei *Cauchy*, Résumés analytiques. Turin. 1833. pag. 35, der ihn auch benutzt, um Σr^n durch die Zahlen $\overset{n}{a}_r$ darzustellen.



lässt sich vermittelst derselben Erwägung, wie dort bezüglich der α, a priori feststellen. Man kann aber auch die dortige Gleichung (5.) zur Herleitung von (11.) benutzen, indem man aus der Formel

$$\binom{x+r}{n} = \binom{x}{n}+\binom{x}{n-1}\cdot\binom{r}{1}+\binom{x}{n-2}\cdot\binom{r}{2}+\cdots+\binom{x}{n-r}\cdot\binom{r}{r}$$

substituirt.

Setzt man in (11.) für x der Reihe nach die Werthe $1, 2, 3, \ldots, n$ und berechnet die Zahlen $\overset{n}{a}_r$ aus dem resultirenden Gleichungssystem, so findet man durch ein Verfahren, welches dem im vorigen Abschnitt an der entsprechenden Stelle ausführlich besprochenen ganz analog ist:

$$(12.)\qquad \overset{n}{a}_r = r^n-\binom{r}{1}\cdot(r-1)^n+\binom{r}{2}\cdot(r-2)^n-\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{r}{r-1}\cdot 1^n,$$

und*):

$$(13.)\qquad \overset{n}{a}_r = r.(\overset{n-1}{a}_r+\overset{n-1}{a}_{r-1}).$$

Aus (12.) wird $\overset{n}{a}_r$ als das erste Glied der r^{ten} Differenzenreihe der arithmetischen Reihe n^{ter} Ordnung $0^n, 1^n, 2^n, 3^n, \ldots$ erkannt; auch zeigen die Formeln (12.) und (13.), dass die $\overset{n}{a}_r$ sämmtlich ganze positive Zahlen sind.

Die oben erwähnte Ableitung von (11.) aus (5.) setzt die Zahlen α und a ohne eine nennenswerthe Rechnung in die folgenden Beziehungen zu einander:

$$(14.)\qquad \overset{n}{a}_r = \binom{n-1}{r-1}\cdot\overset{n}{\alpha}_1+\binom{n-2}{r-2}\cdot\overset{n}{\alpha}_2+\binom{n-3}{r-3}\cdot\overset{n}{\alpha}_3+\cdots+\binom{n-r}{0}\cdot\overset{n}{\alpha}_r,$$

$$(15.)\qquad \overset{n}{\alpha}_r = \overset{n}{a}_r-\binom{n-r+1}{1}\cdot\overset{n}{a}_{r-1}+\binom{n-r+2}{2}\cdot\overset{n}{a}_{r-2}-\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{n-1}{r-1}\cdot\overset{n}{a}_1.$$

Bildet man aus (11.) den Ausdruck für Σx^n, so ergiebt sich die Formel (9.), falls man

$$(16.)\qquad \mathfrak{B}(x,n) = n\cdot\left\{\overset{n-1}{a}_1\cdot\binom{x}{2}+\overset{n-1}{a}_2\cdot\binom{x}{3}+\overset{n-1}{a}_3\cdot\binom{x}{4}+\cdots+\overset{n-1}{a}_{n-1}\cdot\binom{x}{n}\right\}$$

setzt.

Dies ist eine *dritte Form der Bernoullischen Functionen.*

Um keinen Zweifel über die Richtigkeit dieser Behauptung bestehen zu lassen, braucht man die Erörterungen über (10.) nur wörtlich zu wiederholen.

---

*) Die Formel (13.) findet sich auch bei *Grunert:* Mathem. Abhandlungen. Ebendaselbst ist eine Tafel der $\overset{n}{a}_r$ berechnet.

Man kann ferner die Formeln dieses Abschnittes noch vereinfachen, wenn man die Bezeichnungen einführt:

$$(17.)\qquad r!\binom{x}{r} = x(x-1)(x-2)\dots(x+1-r) = x_r,$$

$$(18.)\qquad \overset{n}{a}_r = r!\,\overset{n}{\mathfrak{a}}_r,$$

wobei auch die Zahlen $\overset{n}{a}_r$, der aus (13.) folgenden Recursionsformel

$$(19.)\qquad \overset{n}{a}_r = r.\overset{n-1}{a}_r + \overset{n-1}{a}_{r-1}$$

gemäss, ganz und positiv sind.

Vermittelst derselben stellen sich (11.) und (16.) so dar:

$$(20.)\qquad x^n = \overset{n}{a}_1.x_1 + \overset{n}{a}_2.x_2 + \overset{n}{a}_3.x_3 + \dots + \overset{n}{a}_n.x_n,$$

$$(21.)\qquad \mathfrak{B}(x, n) = n\cdot\left\{\tfrac{1}{2}\overset{n-1}{a}_1.x_2 + \tfrac{1}{3}\overset{n-1}{a}_2.x_3 + \tfrac{1}{4}\overset{n-1}{a}_3.x_4 + \dots + \frac{1}{n}\overset{n-1}{a}_{n-1}.x_n\right\}.$$

Während die Formel (5.) durch die Substitution von $(-x)$ für x mit nachfolgender Division durch $(-1)^n$ zu keiner neuen Darstellung von x^n führt (dabei aber die Relation (6.) zwischen den Coefficienten liefert), entsteht auf diese Weise aus (11.) oder (20.):

$$(22.)\qquad x^n$$
$$= \overset{n}{a}_n.(x+n-1)_n - \overset{n}{a}_{n-1}.(x+n-2)_{n-1} + \overset{n}{a}_{n-2}.(x+n-3)_{n-2} - \dots + (-1)^{n-1}.\overset{n}{a}_1.x_1;$$

woraus als *vierte Form der Bernoullischen Functionen* erhalten wird:

$$(23.)\qquad \mathfrak{B}(x, n)$$
$$= n\cdot\left\{\frac{1}{n}\overset{n-1}{a}_{n-1}.(x+n-2)_n - \frac{1}{n-1}\overset{n-1}{a}_{n-2}.(x+n-3)_{n-1} + \dots + (-1)^n\cdot\tfrac{1}{2}\overset{n-1}{a}_1.x_2\right\}.$$

Es bedarf keiner besonderen Erörterung, dass die Anzahl von Ausdrücken für x^n und $\mathfrak{B}(x, n)$ auf dem anfangs des vorigen Abschnitts beschriebenen Wege sich ganz nach Belieben vermehren lässt, u. a. schon dadurch, dass man den Reichthum der Relationen zwischen den Tieffunctionen zur Substitution in den bereits gewonnenen Formeln ausnutzt. Dabei werden die verschiedenen Formen von x^n mehr oder minder wichtige Relationen zwischen den (vorher in entwickelter Gestalt bekannten) Coefficienten ergeben, wenn man in ihnen besondere Werthe von x substituirt; während diejenigen für $\mathfrak{B}(x, n)$ zu neuen Darstellungen der *Bernoulli*schen

und *Euler*schen Zahlen führen, da die letzteren bekanntlich durch gewisse Specialwerthe von $\mathfrak{B}(x,n)$ und $\mathfrak{B}'(x,n)$ ausgedrückt werden können *).

Wir wollen hier nur noch zwei Formeln aufführen, deren Coefficienten sich sehr einfach durch die $\overset{n}{a}_r$ ausdrücken, und deren Ableitung aus den obigen auf der Hand liegt, nämlich:

$$(24.)\quad \left\{\begin{aligned} x^n &= \overset{n+1}{a}_1\cdot\binom{x-1}{0}+\tfrac{1}{2}\overset{n+1}{a}_2\cdot\binom{x-1}{1}+\tfrac{1}{3}\overset{n+1}{a}_3\cdot\binom{x-1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\overset{n+1}{a}_{n+1}\cdot\binom{x-1}{n} \\ &= \overset{n+1}{\mathfrak{a}}_1\cdot(x-1)_0+\overset{n+1}{\mathfrak{a}}_2\cdot(x-1)_1+\overset{n+1}{\mathfrak{a}}_3\cdot(x-1)_2+\cdots+\overset{n+1}{\mathfrak{a}}_{n+1}\cdot(x-1)_n \end{aligned}\right.$$

und

$$(25.)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{B}(x,n) &= n\cdot\left\{\overset{n}{a}_1\cdot\binom{x-1}{1}+\tfrac{1}{2}\overset{n}{a}_2\cdot\binom{x-1}{2}+\tfrac{1}{3}\overset{n}{a}_3\cdot\binom{x-1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\overset{n}{a}_n\cdot\binom{x-1}{n}\right\} \\ &= n\cdot\left\{\overset{n}{\mathfrak{a}}_1\cdot(x-1)_1+\tfrac{1}{2}\overset{n}{\mathfrak{a}}_2\cdot(x-1)_2+\tfrac{1}{3}\overset{n}{\mathfrak{a}}_3\cdot(x-1)_3+\cdots+\frac{1}{n}\overset{n}{\mathfrak{a}}_n\cdot(x-1)_n\right\}. \end{aligned}\right.$$

4. Die ausgiebigsten Hülfsmittel für die Untersuchung der *Bernoulli*schen Functionen entspringen aus der Darstellung von x^n in der Form:

$$x^n = \underset{z=0}{D^n}\, e^{xz}.$$

Aus ihr ergiebt sich:

$$(26.)\quad \sum_{z=x}^{z=x+r-1} z^{n-1} = \underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{e^{(x+r)z}-e^{xz}}{e^z-1} = \frac{1}{n}\cdot\{\mathfrak{B}(x+r,\ n)-\mathfrak{B}(x,\ n)\},$$

wenn man mit *Schlömilch*

$$(27.)\quad \mathfrak{B}(x,\ n) = n.\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{e^{xz}-1}{e^z-1}$$

setzt.

Die Identität dieser Function $\mathfrak{B}(x,n)$ mit der *Bernoulli*schen erhellt auf der Stelle, wenn man in Erwägung zieht, dass sie nach (27.) für $x=0$ ebenfalls verschwindet. daher nach (26.) die Relation (4.) für jedes ganze positive r erfüllt und, wie wir sogleich erkennen werden, eine ganze algebraische Function n^{ten} Grades ist. Denn führt man auf der rechten Seite von (27.) für e^{xz} die bekannte Potenzreihe ein, so kommt im Coefficienten von x^r der Factor $\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{z^r}{e^z-1}$ vor, welcher für $r>n$ verschwindet, weil $z=0$ eine $(r-1)$-fache Wurzel der differentiirten Function ist.

*) *Eisenlohr* gelangt in seiner Abhandlung „Entwickelung der Functionsweise der *Bernoulli*schen Zahlen" (1844. Dieses Journal Bd. 28, S. 193—212) vermittelst Induction zu recht verwickelten Ausdrücken dieser Art.

Die Form (27.) der *Bernoulli*schen Function nebst der unmittelbar aus ihr folgenden

$$(28.)\qquad \mathfrak{B}(x,\,n) = \underset{z=0}{D^n} z\frac{e^{xz}-1}{e^z-1}$$

wollen wir die *Schlömilch*schen *) nennen.

Man kann aus ihnen die früher aufgezählten Formen und deren Coefficienten ohne grosse Umstände ableiten, am bequemsten die Form (16.) und die *Raabe*sche (1.). Und da die dabei vorzunehmenden Entwickelungen im engsten Zusammenhange mit der Darstellung der *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen stehen, so will ich die fraglichen Transformationen hier vorführen.

5. Substituirt man in (27.)

$$e^{xz} = [1+(e^z-1)]^x = 1+\binom{x}{1}\cdot(e^z-1)^1+\binom{x}{2}\cdot(e^z-1)^2+\binom{x}{3}\cdot(e^z-1)^3+\cdots,$$

was nach dem binomischen Satze für hinreichend kleine Werthe von z geschehen kann, so folgt zunächst:

$$\mathfrak{B}(x,\,n) = n\cdot\sum_{r=1}^{r=x}\binom{x}{r+1}\cdot\underset{z=0}{D^{n-1}}(e^z-1)^r;$$

und wenn man beachtet, dass $z=0$ eine r-fache Wurzel der Function $(e^z-1)^r$ ist, so erkennt man auch sofort, dass $\underset{z=0}{D^{n-1}}(e^z-1)^r$ für alle Werthe von r verschwindet, welche $>(n-1)$ sind, dass die gewonnene Reihe also mit demjenigen Gliede abbricht, welches $\binom{x}{n}$ enthält.

Entwickelt man endlich $(e^z-1)^r$ nach dem binomischen Satze und differentiirt hierauf nach z, so zeigt die Vergleichung des Resultats mit (12.) direct die Identität an:

$$(29.)\qquad \underset{z=0}{D^n}(e^z-1)^r = \overset{n}{a}_r.$$

Damit ist die Form* (16.) *der Bernoullischen Functionen* bis in alle Einzelheiten *aus der Schlömilchschen* (27.) *abgeleitet.

*) Sie sind 1856 von Herrn *Schlömilch* im ersten Bande der Zeitschr. f. Math. u. Phys., S. 193, zuerst aufgestellt und der Untersuchung der *Bernoulli*schen Functionen zu Grunde gelegt. Er benutzt sie aber nicht zur Ableitung anderer Formen und setzt die Bekanntschaft mit der *Raabe*schen Form, so wie mit der Potenzreihenentwickelung von $\frac{z}{e^z-1}$, voraus. — Man vergleiche auch sein Compendium der höheren Analysis, Bd. II, S. 207.

Auch die Recursionsformel (13.) ergiebt sich sehr leicht. Denn da

$$D^1_z(e^z-1)^r = r(e^z-1)^{r-1}e^z = r\cdot\{(e^z-1)^r+(e^z-1)^{r-1}\}$$

ist, so folgt:

$$\underset{z=0}{D^n}(e^z-1)^r = r\cdot\{\underset{z=0}{D^{n-1}}(e^z-1)^r+\underset{z=0}{D^{n-1}}(e^z-1)^{r-1}\}.$$

Wegen der wichtigen Rolle, welche die Function $\frac{e^z-1}{z}$ und namentlich ihr reciproker Werth bei dem vorliegenden Thema spielt, wollen wir hier noch anmerken, dass aus (29.) vermittelst der Transformation

$$(e^z-1)^r = z^r\cdot\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^r$$

auch die Formel fliesst:

$$(30.)\quad\begin{cases} \overset{n}{a}_r = r!\binom{n}{r}\cdot\underset{z=0}{D^{n-r}}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^r, \\ \overset{n}{\mathfrak{a}}_r = \binom{n}{r}\cdot\underset{z=0}{D^{n-r}}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^r. \end{cases}$$

6. Zur *Raabe*schen Form gelangt man von der *Schlömilch*schen (28.), wenn man e^{xz} durch die bekannte Potenzreihe ersetzt.

Dies giebt zunächst:

$$\mathfrak{B}(x,\ n) = \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{x^r}{r!}\cdot\underset{z=0}{D^n}\frac{z^{r+1}}{e^z-1},$$

oder, weil die Function $\frac{z^{r+1}}{e^z-1}$ offenbar die r-fache Wurzel $z=0$ besitzt:

$$\mathfrak{B}(x,\ n) = \sum_{r=1}^{r=n}\frac{x^r}{r!}\cdot\underset{z=0}{D^n}\frac{z^{r+1}}{e^z-1}.$$

Dies kann man, weil

$$\underset{z=0}{D^n}\frac{z^{r+1}}{e^z-1} = \underset{z=0}{D^n}z^r\cdot\frac{z}{e^z-1} = \binom{n}{r}\cdot r!\underset{z=0}{D^{n-r}}\frac{z}{e^z-1}$$

ist, auch so schreiben:

$$(31.)\quad \mathfrak{B}(x,\ n) = \sum_{r=1}^{r=n}\binom{n}{r}\cdot x^r.A_{n-r} = \sum_{r=0}^{r=n-1}\binom{n}{r}\cdot A_r.x^{n-r},$$

wobei der Abkürzung wegen die Bezeichnung

$$(32.)\quad A_r = \underset{z=0}{D^r}\frac{z}{e^z-1}$$

eingeführt ist, und offenbar $A_0 = +1$ wird.

Aus der identischen Gleichung

$$\frac{z}{e^z-1} = -z+\frac{-z}{e^{-z}-1}$$

folgt durch einmalige Differentiation unter Rücksicht auf (32.):

$$A_1 = -1-A_1$$

oder

$$A_1 = -\tfrac{1}{2};$$

durch mehrmalige Differentiation aber:

$$A_m = (-1)^m . A_m \qquad (m > 1).$$

Führt man den hieraus fliessenden Werth

$$(33.)\qquad A_{2r+1} = 0 \qquad (r > 0)$$

nebst $A_0 = +1$ und $A_1 = -\frac{1}{2}$ in (31.) ein und ersetzt ausserdem A_{2r} durch $(-1)^{r-1}.B_r$, ***so ist die Raabesche Form*** (1.) ***aus der Schlömilchschen abgeleitet,*** die Coefficienten

$$(34.)\qquad B_r = (-1)^{r-1}.A_{2r} = (-1)^{r-1}.\underset{z=0}{D^{2r}}\frac{z}{e^z-1}$$

miteinbegriffen *).

Die hier in der Form eines Differentialquotienten erhaltene Grösse A_r kann man, weil bei jedem hinreichend kleinen z

$$\frac{z}{e^z-1} = \frac{l[1+(e^z-1)]}{e^z-1} = 1-\tfrac{1}{2}\cdot(e^z-1)^1+\tfrac{1}{3}\cdot(e^z-1)^2-\tfrac{1}{4}\cdot(e^z-1)^3+\cdots$$

ist, wegen (32.) und (29.) so darstellen:

$$(35.)\qquad A_r = -\tfrac{1}{2}\cdot\overset{r}{a}_1+\tfrac{1}{3}\cdot\overset{r}{a}_2-\tfrac{1}{4}\cdot\overset{r}{a}_3+\cdots+(-1)^r\cdot\frac{1}{r+1}\cdot\overset{r}{a}_r.$$

Daher erhält man ***für die Bernoullischen Zahlen einen*** vermittelst der Zeichen der gemeinen Rechnungsarten ***völlig ausgeschriebenen Ausdruck:***

$$(36.)\qquad B_r = (-1)^r\cdot\left\{\tfrac{1}{2}\cdot\overset{2r}{a}_1-\tfrac{1}{3}\cdot\overset{2r}{a}_2+\tfrac{1}{4}\cdot\overset{2r}{a}_3-\tfrac{1}{5}\cdot\overset{2r}{a}_4+\cdots-\frac{1}{2r+1}\cdot\overset{2r}{a}_{2r}\right\},$$

wenn man noch für die a ihre aus (12.) bekannten Werthe setzt.

Wendet man auf den Ausdruck (36.) die Recursionsformel (13.) in Verbindung mit (35.) und (33.) an, so ist dies ein Weg zu neuen Ausdrücken für B_r. — Z. B. ergiebt sich auf diese Weise:

$$(37.)\qquad B_{r+1} = (-1)^r\cdot 2\cdot\left\{\frac{1}{3.4}\cdot\overset{2r}{a}_1-\frac{1}{4.5}\cdot\overset{2r}{a}_2+\frac{1}{5.6}\cdot\overset{2r}{a}_3-\cdots-\frac{1}{(2r+2)(2r+3)}\cdot\overset{2r}{a}_{2r}\right\}.$$

7. Selbstverständlich kann man den Ausdruck (32.) auch zur Ableitung von Recursionsformeln zwischen den A benutzen.

*) Die Formel (34.) für die *Bernoulli*schen Zahlen findet sich schon bei *Euler* in den Instit. calc. diff.

Differentiirt man beispielsweise die identische Gleichung

$$\frac{z}{e^z-1}\cdot(e^z-1) = z$$

$(n+1)$-mal unter Anwendung des *Leibniz*schen Satzes, so folgt ohne weiteres:

$$\binom{n+1}{1}\cdot A_n+\binom{n+1}{2}\cdot A_{n-1}+\binom{n+1}{3}\cdot A_{n-2}+\cdots+\binom{n+1}{n}\cdot A_1+\binom{n+1}{n+1}\cdot A_0 = 0,$$

oder, wenn man noch die Werthe $A_0 = 1$, $A_1 = -\frac{1}{2}$ einsetzt:

$$\binom{n+1}{1}\cdot A_n+\binom{n+1}{2}\cdot A_{n-1}+\binom{n+1}{3}\cdot A_{n-2}+\cdots+\binom{n+1}{n-1}\cdot A_2-\frac{n-1}{2} = 0.$$

Für $n = 2r$ ist dies offenbar die *Moivre*sche Recursionsformel (2.), während für $n = 2r+1$ erhalten wird:

$$(38.)\quad \begin{cases} \binom{2r+2}{2}\cdot B_r-\binom{2r+2}{4}\cdot B_{r-1}+\binom{2r+2}{6}\cdot B_{r-2}-\cdots \\ \qquad\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r+2}{2r}\cdot B_1+(-1)^r.r = 0. \end{cases}$$

Subtrahirt man jene von der letzteren, so folgt noch:

$$(39.)\quad \begin{cases} \binom{2r+1}{2}\cdot B_r-\binom{2r+1}{4}\cdot B_{r-1}+\binom{2r+1}{6}\cdot B_{r-2}-\cdots \\ \qquad\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r+1}{2r}\cdot B_1+(-1)^r\cdot\frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Differentiirt man ferner die identische Gleichung

$$\frac{(2z)}{e^{(2z)}-1}\cdot(e^z+1)-2\cdot\frac{z}{e^z-1} = 0,$$

n-mal und substituirt auch sofort die Werthe von A_0 und A_1, so findet man ohne eine weitere Transformation:

$$2.(2^n-1).A_n+\binom{n}{1}\cdot 2^{n-1}.A_{n-1}+\binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}.A_{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-2}\cdot 2^2.A_2-(n-1) = 0.$$

Dies giebt für $n = 2r$:

$$(40.)\quad \begin{cases} 2.(2^{2r}-1).B_r-\binom{2r}{2}\cdot 2^{2r-2}.B_{r-1}+\binom{2r}{4}\cdot 2^{2r-4}.B_{r-2}-\cdots \\ \qquad\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r}{2r-2}\cdot 2^2.B_1+(-1)^r.(2r-1) = 0, \end{cases}$$

für $n = 2r+1$ aber*):

*) Die Formel (41.) ist in *Klügels* Wörterbuch, Suppl. I, S. 60—63, auf dem Wege der Induction bewiesen.

$$(41.)\quad \begin{cases} \binom{2r+1}{1}\cdot 2^{2r-1}.B_r-\binom{2r+1}{3}\cdot 2^{2r-3}.B_{r-1}+\binom{2r+1}{5}\cdot 2^{2r-5}.B_{r-2}-\cdots \\ \qquad\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r+1}{2r-1}\cdot 2^1.B_1+(-1)^r.r = 0. \end{cases}$$

Wie man durch die Combination dieser Formeln ähnliche in beliebiger Anzahl ableiten kann, braucht nicht näher beschrieben zu werden.

Wir wollen uns hier mit den Recursionsformeln zwischen den *Bernoulli*schen Zahlen nicht eingehender beschäftigen. Es mag aber die Anmerkung am Platze sein, dass die zuletzt benutzte Ableitungsmethode leicht verallgemeinert werden kann, indem man von der identischen Gleichung ausgeht:

$$\frac{kz}{e^{kz}-1}\cdot\{e^{(k-1)z}+e^{(k-2)z}+\cdots+1\}-k\cdot\frac{z}{e^z-1} = 0,$$

oder, was dasselbe ist, von der Gleichung:

$$\frac{kz}{e^{kz}-1}\cdot\frac{e^{kz}-1}{e^z-1}-k\cdot\frac{z}{e^z-1} = 0.$$

Daraus folgt nach (32.) und (27.):

$$(42.)\quad \begin{cases} k.(k^n-1).A_n+\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(k,2)\cdot\binom{n}{1}k^{n-1}A_{n-1}+\tfrac{1}{3}\mathfrak{B}(k,3)\cdot\binom{n}{2}k^{n-2}A_{n-2}+\cdots \\ \cdots+\frac{1}{n-1}\mathfrak{B}(k,n-1)\cdot\binom{n}{n-2}k^2A_2-\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(k,n).k+\frac{1}{n+1}\mathfrak{B}(k,n+1) = 0; \end{cases}$$

und diese Gleichung giebt bei jedem besondern k wieder zwei verschieden gestaltete Recursionsformeln zwischen den *Bernoulli*schen Zahlen, je nachdem man $2r$ oder $(2r+1)$ für n setzt. Drückt man dann ausserdem noch die hier vorkommenden Specialwerthe der *Bernoulli*schen Functionen in der *Raabe*schen Form aus, so entstehen Relationen, in denen die *Bernoulli*schen Zahlen productweise auftreten.

8. In andrer Weise als in den beiden letzten Abschnitten gelangt man zu independenten und zu Recursionsformeln für die *Bernoulli*schen Zahlen von gewissen Specialwerthen der *Bernoulli*schen Functionen und ihrer Derivirten aus.

Wir wollen diese Specialwerthe zunächst zusammenstellen, um in dem bei unserm Gegenstand nun einmal bunten Gemisch von Formeln, die theilweise aus sehr verschiedenen Quellen gleich leicht entspringen, die Uebersicht zu fördern.

I. Differentiirt man den *Schlömilch*schen Ausdruck (27.) nach x, so erhält man wegen des Differentiationsresultates

$$D_x \cdot \frac{e^{xz}-1}{e^z-1} = z \cdot \frac{e^{xz}-1}{e^z-1} + \frac{z}{e^z-1}$$

unter Rücksicht auf (27.), (28.) und (32.) die folgende Gleichung:

$$\mathfrak{B}'(x, n) = n.\{\mathfrak{B}(x, n-1) + A_{n-1}\}.$$

Dieselbe lautet wegen der Ausdrücke (33.) und (34.) für A_n etwas verschieden, je nachdem n einen graden oder ungraden Werth hat, nämlich*):

$$(43.) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}'(x, 2r) = 2r.\mathfrak{B}(x, 2r-1). \\ \mathfrak{B}'(x, 2r+1) = (2r+1)\{\mathfrak{B}(x, 2r) + (-1)^{r-1}.B_r\} \end{cases}$$

und ergiebt im besondern:

$$(44.) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}'(0, 2r) = 0, \\ \mathfrak{B}'(0, 2r+1) = (-1)^{r-1}.(2r+1).B_r. \end{cases}$$

II. Die zweite Grundlage für unsere weiteren Entwickelungen beruht auf dem Werthe von $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, n)$.

Herr *Schlömilch* deducirt im wesentlichen so: Da

$$z \frac{e^{\frac{1}{2}z}-1}{e^z-1} = z \frac{(e^{\frac{1}{2}z}+1)-2}{e^z-1} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}-1} - 2 \cdot \frac{z}{e^z-1}$$

ist, so folgt nach (28.) und (32.):

$$\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, n) = \left[\frac{1}{2^{n-1}} - 2\right] \cdot A_n = -\frac{2^n-1}{2^{n-1}} \cdot A_n,$$

mithin wegen (33.) und (34.):

$$(45.) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r+1) = 0 & (r > 0), \\ \mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r) = (-1)^r \cdot \frac{2^{2r}-1}{2^{2r-1}} \cdot B_r. \end{cases}$$

Es verdient hierbei angemerkt zu werden, dass die einfachsten Formen für $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, n)$, welche sich aus der *Schlömilch*schen Darstellung der *Bernoulli*schen Functionen ergeben, diese sind:

$$\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, n) = n \cdot \underset{z=0}{D^{n-1}} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}z}+1} = \underset{z=0}{D^n} \frac{z}{e^{\frac{1}{2}z}+1},$$

oder, wenn man hier z für $\frac{1}{2}z$ setzt:

$$(46.) \quad \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, n) = \frac{n}{2^{n-1}} \cdot \underset{z=0}{D^{n-1}} \frac{1}{e^z+1} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \underset{z=0}{D^n} \frac{z}{e^z+1}.$$

*) Dies ist die *Schlömilch*sche Ableitung in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. — Dasselbe Resultat ergiebt übrigens auch die Differentiation der *Raabe*schen Form sofort, während die Herleitung aus den andern elementaren Formen von $\mathfrak{B}(x, n)$ einige Rechnung erfordert.

Der Werth von $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, n)$ ist bekanntlich auch aus dem Grunde wichtig, weil die Relation besteht:

$$(47.)\qquad \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}+x, n) = (-1)^n.\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}-x, n),$$

welche anzeigt, dass $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}+x, n)$ eine grade oder ungrade Function von x ist, je nachdem n einen graden oder ungraden Werth hat; so dass auch hieraus $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r+1) = 0$, $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r)$ aber als ein Maximal- oder Minimalwerth erkannt wird. — Man leitet die Formel (47.) entweder in der *Schlömilch*schen Weise ab, oder dadurch, dass man in (10.) gliedweise

$$\binom{z}{n} = (-1)^n.\binom{n-1-z}{n},\qquad \overset{n-1}{\alpha_r} = \overset{n-1}{\alpha_{n-r}}$$

substituirt — was zunächst

$$\mathfrak{B}(x, n) = (-1)^n.\mathfrak{B}(1-x, n)$$

ergiebt*) — und dann $(\frac{1}{2}+x)$ für x setzt.

III. Ausser den Ausdrücken (32.) für A_n und (46.) für $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, n)$ wird noch ein Ausdruck wichtig, den wir jetzt entwickeln wollen. Es ist

$$\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = \frac{e^{\frac{3}{2}z}-e^{\frac{1}{2}z}}{e^{2z}-1} = \frac{e^{\frac{3}{2}z}-1}{e^{2z}-1} - \frac{e^{\frac{1}{2}z}-1}{e^{2z}-1} = \frac{e^{\frac{3}{4}w}-1}{e^w-1} - \frac{e^{\frac{1}{4}w}-1}{e^w-1},$$

wo zuletzt $w = 2z$ gesetzt wurde. Hieraus folgt nach (27.):

$$\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = \frac{2^{n-1}}{n}\cdot\{\mathfrak{B}(\tfrac{3}{4}, n)-\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, n)\},$$

d. i. nach (47.):

$$(48.)\qquad \underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = \{(-1)^n-1\}\cdot\frac{2^{n-1}}{n}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, n),$$

also:

$$(49.)\qquad \begin{cases} \underset{z=0}{D^{2r-1}}\dfrac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = 0, \\[2ex] \underset{z=0}{D^{2r}}\dfrac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = -\dfrac{2^{2r+1}}{2r+1}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, 2r+1). \end{cases}$$

Da ferner

$$\frac{e^{\frac{1}{2}z}-1}{e^z-1} = \frac{1}{(e^{\frac{1}{2}z}+1)(e^{\frac{1}{4}z}+1)} = \tfrac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{e^{\frac{1}{4}z}+1} + \frac{1}{e^{\frac{1}{2}z}+1} - \frac{e^{\frac{1}{4}z}}{e^{\frac{1}{2}z}+1}\right\}$$

---

*) Zuerst gefunden ist diese Formel von *Raabe* (dies. Journ. Bd. 42.). *Schlömilch* gewinnt sie sehr einfach durch die Differentiation der identischen Gleichung

$$\frac{e^{(1-x)z}-1}{e^z-1} = 1 - \frac{e^{-xz}-1}{e^{-z}-1}.$$

Die Herleitung aus (10.) ist wohl nicht umständlicher. — Auch zeigen die Formen (10.) und (16.) ohne weiteres die Theilbarkeit von $\mathfrak{B}(x, n)$ durch $x(x-1)$ für $n > 1$.

ist, so folgt vermittelst $(n-1)$-maliger Differentiation nach z wegen (27.), (46.) und (48.):

$$\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4},n) = \frac{2^{n-1}+1}{2^n}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2},n)-\{(-1)^n-1\}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4},n);$$

und hieraus für $n=2r$:

$$(50.)\qquad \mathfrak{B}(\tfrac{1}{4},2r) = \frac{2^{2r-1}+1}{2^{2r}}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2},2r).$$

IV. Alle diese Grössen stehen in enger Beziehung zu den Kreisfunctionen.

Man hat nämlich:

$$z\cot z = iz\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = iz\frac{e^{i2z}+1}{e^{i2z}-1} = iz+\frac{i2z}{e^{i2z}-1},$$

$$\operatorname{tng} z = \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = \frac{1}{i}\frac{e^{i2z}-1}{e^{i2z}+1} = \frac{1}{i}-\frac{2}{i}\cdot\frac{1}{e^{i2z}+1},$$

$$\sec z = \frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}} = 2\cdot\frac{e^{iz}}{e^{i2z}+1}.$$

Daraus ergiebt sich nach (32.), (46.) und (48):

$$\underset{z=0}{D^n} z\cot z = i.\underset{z=0}{D^n} z+i^n.2^n.\underset{z=0}{D^n}\frac{z}{e^z-1} = i.\underset{z=0}{D^n} z+i^n.2^n.A_n,$$

$$\underset{z=0}{D^{n-1}}\operatorname{tng} z = i^n\ .2^n.\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{1}{e^z+1} = i^n\ \cdot\frac{2^{2n-1}}{n}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2},n),$$

$$\underset{z=0}{D^{n-1}}\sec z = i^{n-1}.2^n.\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = i^{n-1}\cdot\{(-1)^n-1)\}\cdot\frac{2^{2n-1}}{n}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4},n).$$

Da die linken Seiten dieser Gleichungen und auch A_n, $\mathfrak{B}(\frac{1}{2},n)$, $\mathfrak{B}(\frac{1}{4},n)$ reell sind, so folgt aus diesen Ausdrücken einerseits:

$$(51.)\qquad \begin{cases} \underset{z=0}{D^{2r-1}} z\cot z = 0, \\ \underset{z=0}{D^{2r-1}}\operatorname{tng} z \ = i^{2r+1}.2^{2r+1}.\underset{z=0}{D^{2r}}\dfrac{1}{e^z+1} = 0, \\ \underset{z=0}{D^{2r-1}}\sec z \ = 0; \end{cases}$$

und andrerseits:

$$(52.)\qquad \begin{cases} \underset{z=0}{D^{2r}}\ z\cot z = (-1)^r.2^{2r}.A_{2r} = -2^{2r}.B_r, \\ \underset{z=0}{D^{2r-1}}\operatorname{tng} z \ = (-1)^r.2^{2r}.\underset{z=0}{D^{2r-1}}\dfrac{1}{e^z+1} = (-1)^r\cdot\dfrac{2^{4r-2}}{r}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2},2r) \\ \qquad\qquad = +\dfrac{1}{r}\cdot 2^{2r+1}.(2^{2r}-1).B_r = u_{2r}, \\ \underset{z=0}{D^{2r}}\ \sec z \ = (-1)^r.2^{2r-1}.\underset{z=0}{D^{2r}}\dfrac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} \\ \qquad\qquad = (-1)^{r+1}\cdot\dfrac{2^{4r+2}}{2r+1}\cdot\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4},2r+1) = u_{2r+1}; \end{cases}$$

wo die letzten Gleichungen ausserdem zur Definition der ***Eulerschen Zahlen*** u_{2r} und u_{2r+1} von grader und ungrader Ordnung dienen sollen.

Der Vollständigkeit wegen mögen hier noch die bekannten Formeln

$$(53.)\qquad \underset{z=0}{D^n}\operatorname{tng}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right) = u_{n+1}$$

und

$$(54.)\qquad \begin{cases} \underset{z=0}{D^{2r}} z\operatorname{cosec} z &= 2.(2^{2r-1}-1)B_r, \\ \underset{z=0}{D^{2r-1}} z\operatorname{cosec} z &= 0 \end{cases}$$

Platz finden, welche sich aus den obigen leicht ableiten lassen; und endlich noch der aus (52.) und (50.) folgende neue Ausdruck:

$$(55.)\qquad u_{2r} = (-1)^r.\frac{2^{6r-2}}{r(2^{2r-1}+1)}.\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, 2r).$$

Uebrigens lassen sich nicht nur die Constanten B_n und u_n als Derivirte von Kreisfunctionen darstellen, sondern es finden sich ähnliche Ausdrücke für die *Bernoulli*schen Functionen $\mathfrak{B}(x, n)$ selbst, wenn man das z in (27.) durch $2iz = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ersetzt. Es zeigt dann eine leichte Rechnung, dass

$$(56.)\qquad \mathfrak{B}(x, n) = \frac{n}{2^{n-1}}.\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{\sin xz.\cos\left[(x-1)z-(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{\sin z}$$

ist, während

$$\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{\sin xz.\sin\left[(x-1)z-(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{\sin z} = 0$$

wird.

Der Ausdruck (56.) lässt noch mancherlei Transformationen zu, von denen hier nur die allernächst liegenden angeführt werden sollen:

$$(57.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{B}(x, 2r) = (-1)^{r+1}.\frac{r}{2^{2r-2}}.\underset{z=0}{D^{2r-1}}\frac{\sin xz.\sin(x-1)z}{\sin z} \\ \qquad\qquad = (-1)^r.\frac{r}{2^{2r-1}}.\underset{z=0}{D^{2r-1}}\left\{\frac{\cos(2x-1)z}{\sin z}-\cot z\right\}, \\ \mathfrak{B}(x, 2r+1) = (-1)^r.\frac{2r+1}{2^{2r}}.\underset{z=0}{D^{2r}}\frac{\sin xz.\cos(x-1)z}{\sin z} \\ \qquad\qquad = (-1)^r.\frac{2r+1}{2^{2r-1}}.\underset{z=0}{D^{2r}}\frac{\sin(2x-1)z}{\sin z}. \end{cases}$$

— Im letzten Ausdruck für $\mathfrak{B}(x, 2r+1)$ muss $r > 0$ sein.

9. Wir wollen jetzt die Verwendung der im vorigen Abschnitt abgeleiteten Formeln zur Gewinnung von Ausdrücken für die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen durch einige Beispiele erläutern.

Um die Formel (44.) mit (10.) zu combiniren, berechne man aus der letzteren $\mathfrak{B}'(0, n) = \lim\limits_{x=0} \frac{\mathfrak{B}(x, n)}{x}$ und substituire in (44.). Dies giebt:

$$B_r = \frac{(-1)^{r-1}}{(2r+1)!} \cdot \{(2r)!\overset{2r}{\alpha}_1 - (2r-1)!1!\overset{2r}{\alpha}_2 + (2r-2)!2!\overset{2r}{\alpha}_3 - \cdots$$
$$\cdots + 2!(2r-2)!\overset{2r}{\alpha}_{2r-1} - 1!(2r-1)!\overset{2r}{\alpha}_{2r}\},$$

oder unter Anwendung von (6.):

$$(58.)\quad B_r = \frac{1}{2r.(2r+1)} \cdot \left\{ \frac{1.\overset{2r}{\alpha}_r}{\binom{2r-1}{r}} - \frac{3.\overset{2r}{\alpha}_{r-1}}{\binom{2r-1}{r+1}} + \frac{5.\overset{2r}{\alpha}_{r-2}}{\binom{2r-1}{r+2}} - \cdots + (-1)^{r-1} \cdot \frac{(2r-1)\overset{2r}{\alpha}_1}{\binom{2r-1}{2r-1}} \right\}.$$

Diese Formel lässt sich noch vielfach umgestalten, wenn man die Recursionsformel (8.) für die α und die Relation $\mathfrak{B}'(0, 2r) = 0$ aus (44.) mit ihr verbindet; — z. B.:

$$(59.)\quad B_r = \frac{1}{r(2r+1)} \cdot \left\{ \frac{1.\overset{2r-2}{\alpha}_{r-1}}{\binom{2r-1}{r-1}} - \frac{3.\overset{2r-2}{\alpha}_{r-2}}{\binom{2r-1}{r-2}} + \frac{5.\overset{2r-2}{\alpha}_{r-3}}{\binom{2r-1}{r-3}} - \cdots + (-1)^r \cdot \frac{(2r-3).\overset{2r-1}{\alpha}_1}{\binom{2r-1}{1}} \right\}.$$

Substituirt man in (44.) für $\mathfrak{B}'(0, n)$ aus (16.), so folgen die Ausdrücke wieder, welche wir mit anderer Ableitung bereits in (36.) und (37.) aufgeführt haben.

Die Formeln (23.) und (25.) ergeben in Verbindung mit (44.):

$$(60.)\quad B_r = (-1)^{r-1} \cdot \left\{ \frac{1}{1.2} \cdot \overset{2r}{\alpha}_1 - \frac{1}{2.3} \cdot \overset{2r}{\alpha}_2 + \frac{1}{3.4} \cdot \overset{2r}{\alpha}_3 - \cdots - \frac{1}{2r.(2r+1)} \cdot \overset{2r}{\alpha}_{2r} \right\}$$

und:

$$(61.)\quad B_r = (-1)^{r-1} \cdot \left\{ \frac{1}{1^2} \cdot \overset{2r+1}{\alpha}_1 - \frac{1}{2^2} \cdot \overset{2r+1}{\alpha}_2 + \frac{1}{3^2} \cdot \overset{2r+1}{\alpha}_3 - \cdots + \frac{1}{(2r+1)^2} \cdot \overset{2r+1}{\alpha}_{2r+1} \right\},$$

wenn man bei der Ableitung aus (25.) noch die Gleichung

$$\mathfrak{B}'(x, n) = (-1)^{n+1}.\mathfrak{B}'(1-x, n)$$

hinzunimmt.

Uebrigens kann man die erwähnten Ausdrücke mit den α leicht in einander überführen, wenn man die Formel (13.) und diejenigen berück-

sichtigt, welche aus (23.) und (25.) für das verschwindende $\mathfrak{B}'(0, 2r)$ erhalten werden.

Unter den obigen Ausdrücken sind vielleicht diejenigen die complicirteren, in denen die Zahlen α vorkommen, obgleich sie nur halb so viel Glieder enthalten, als die andern. In gleichem Grade trifft dies zu, wenn man B_r vermittelst der Gleichung (45.) durch $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r)$ ausdrückt. Wir werden, indem wir von ihnen Gebrauch machen, mehrfach der etwas bequemeren Schreibweise wegen lieber die *Euler*sche Zahl u_{2r} darstellen, für welche nach (52.) die Relation gilt:

$$u_{2r} = (-1)^r \cdot \frac{2^{4r-2}}{r} \cdot \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, 2r),$$

uns aber auf wenige Ausdrücke beschränken.

Benutzt man hierbei die Gleichung (10.) unter Rücksicht auf (6.), so folgt:

$$(62.)\quad u_{2r} = (-1)^r . 2^{4r-1} \cdot \left\{ \binom{r-\frac{1}{2}}{2r} \cdot \overset{2r-1}{\alpha}_r + 2 \cdot \binom{r-\frac{3}{2}}{2r} \cdot \overset{2r-1}{\alpha}_{r-1} + 2 \cdot \binom{r-\frac{5}{2}}{2r} \cdot \overset{2r-1}{\alpha}_{r-2} + \cdots + 2 \cdot \binom{\frac{1}{2}}{2r} \cdot \overset{2r-1}{\alpha}_1 \right\},$$

was sich auf mehrfache Weise noch vereinfachen lässt.

Benutzt man ferner die Gleichung (21.), so findet man für eine später näher zu betrachtende Zahl v_r das wichtigere Resultat:

$$(63.)\quad \begin{cases} v_r = 2.(2^{2r}-1).B_r = \dfrac{r . u_{2r}}{2^{2r-2}} \\ = (-1)^{r-1} . \; r \cdot \left\{ \dfrac{2^{2r-1}.1}{2} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_1 - \dfrac{2^{2r-2}.1.3}{3} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_2 + \cdots + \dfrac{2^1.1.3.5\ldots(4r-3)}{2r} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_{2r-1} \right\} \\ = (-1)^{r-1} . 3r \cdot \left\{ \dfrac{2^{2r-2}.1}{3} \cdot \overset{2r-2}{\mathfrak{a}}_1 - \dfrac{2^{2r-3}.1.3}{4} \cdot \overset{2r-2}{\mathfrak{a}}_2 + \cdots - \dfrac{2^1.1.3.5\ldots(4r-5)}{2r} \cdot \overset{2r-2}{\mathfrak{a}}_{2r-2} \right\}, \end{cases}$$

dessen zweite Form aus der ersten durch die Verwendung von (19.) und von $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}, 2r-1) = 0$ hervorgeht.

Bei denjenigen Formeln des vorigen Abschnittes, welche auf $\mathfrak{B}(\frac{1}{4}, n)$ zurückgreifen, wollen wir hier diese Grösse nur aus (21.) darstellen, also nur den Ausdruck anführen:

$$\mathfrak{B}(\tfrac{1}{4}, n) = \frac{n}{4^n} \cdot \left\{ -\frac{4^{n-2}.3}{2} \cdot \overset{n-1}{\mathfrak{a}}_1 + \frac{4^{n-3}.3.7}{3} \cdot \overset{n-1}{\mathfrak{a}}_2 - \cdots + (-1)^{n-1} . \frac{4^0.3.7.11\ldots(4n-5)}{n} \cdot \overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-1} \right\} .$$

Er ergiebt mit (55.) zusammen:

$$(64.)\quad v_r = 2.(2^{2r}-1).B_r = \frac{r.u_{2r}}{2^{2r-2}}$$

$$= (-1)^{r-1} . \frac{2r}{2^{2r-1}+1} \cdot \left\{ \frac{4^{2r-2}.3}{2} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_1 - \frac{4^{2r-3}.3.7}{3} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_2 + \cdots + \frac{4^0.3.7.11\ldots(8r-5)}{2r} \cdot \overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_{2r-1} \right\},$$

in Vereinigung mit der letzten Gleichung in (52.) aber:

$$(65.)\quad \begin{cases} u_{2r+1} = (-1)^r \cdot\left\{\frac{4^{2r-1}.3}{2}\cdot\overset{2r}{\mathfrak{a}}_1 - \frac{4^{2r-2}.3.7}{3}\cdot\overset{2r}{\mathfrak{a}}_2 + \cdots - \frac{4^0.3.7.11\ldots(8r-1)}{2r+1}\cdot\overset{2r}{\mathfrak{a}}_{2r}\right\} \\ \quad = (-1)^{r-1}\cdot\left\{4^{2r-2}.\overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_1 - 7.4^{2r-4}.\overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_2 \right. \\ \qquad \left. + \sum_{k=4}^{k=2r-1}(-1)^k\cdot\frac{4^{2r-k-1}.3.7\ldots4(k-1).(k-3)}{(k+1)(k+2)}\cdot\overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_k\right\}. \end{cases}$$

— Der letzte Ausdruck für u_{2r+1} entsteht aus dem vorletzten durch blosse Anwendung von (19.) auf ihn; und es verschwindet dabei der Coefficient von $\overset{2r-1}{\mathfrak{a}}_3$.

Die Schlussfolgerungen aus der *Raabe*schen Form von $\mathfrak{B}(\frac{1}{4}, 2r)$ übergehe ich, weil es mir auf die aus ihr entspringenden Recursionsformeln für die B_r und u_{2r} weniger ankommt. Für die u_{2r+1} ergiebt sich:

$$(66.)\quad \begin{cases} (-1)^r.(2r+1).u_{2r+1} \\ = (4r-1) - \binom{2r+1}{2}\cdot 4^2.B_1 + \binom{2r+1}{4}\cdot 4^4.B_2 - \cdots + (-1)^r\cdot\binom{2r+1}{2r}\cdot 4^{2r}.B_r. \end{cases}$$

10. Die Formeln (52.) des 8. Abschnitts gestatten auch auf eine andere Weise, als es bisher geschehen ist, für die *Euler*schen Zahlen Ausdrücke abzuleiten, welche in den Zeichen der gemeinen Rechnungsarten völlig ausgeschrieben sind.

Was zunächst die Formel

$$u_{2r} = (-1)^r.2^{2r}.\underset{z=0}{D^{2r-1}}\frac{1}{e^z+1}$$

betrifft, so ist bei hinreichend kleinem z

$$\frac{1}{e^z+1} = \frac{1}{2+(e^z-1)} = \tfrac{1}{2}\cdot\left\{1 - \tfrac{1}{2}\cdot(e^z-1) + \frac{1}{2^2}\cdot(e^z-1)^2 - \frac{1}{2^3}\cdot(e^z-1)^3 + \cdots\right\},$$

mithin wegen (29.):

$$(67.)\quad \begin{cases} u_{2r} = (-1)^r.\underset{z=0}{D^{2r-1}}.\{2^{2r-1} - 2^{2r-2}.(e^z-1)^1 + 2^{2r-3}.(e^z-1)^2 - \cdots - 2^0.(e^z-1)^{2r-1}\} \\ \quad = (-1)^{r-1}.\{2^{2r-2}.\overset{2r-1}{a}_1 - 2^{2r-3}.\overset{2r-1}{a}_2 + 2^{2r-4}.\overset{2r-1}{a}_3 - \cdots + 2^0.\overset{2r-1}{a}_{2r-1}\}. \end{cases}$$

Hieraus folgt u. a., *dass u_{2r} eine ganze Zahl ist.*

Lässt man die Ordnung der Differentiation unentschieden, so entspringt nach (46.) die Gleichung:

$$(68.)\quad \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, n)$$

$$= \frac{n}{2^{2n-1}}\cdot\underset{z=0}{D^{n-1}}.\{2^{n-1} - 2^{n-2}.(e^z-1)^1 + 2^{n-3}.(e^z-1)^2 - \cdots + (-1)^{n-1}.2^0.(e^z-1)^{n-1}\}$$

$$= \frac{n}{2^{2n-1}}\cdot\{-2^{n-2}.\overset{n-1}{a}_1 + 2^{n-3}.\overset{n-1}{a}_2 - 2^{n-4}.\overset{n-1}{a}_3 + \cdots + (-1)^{n-1}.2^0.\overset{n-1}{a}_{n-1}\},$$

welche wegen (45.) zwischen den Zahlen a noch die Relation ergiebt:

$$(69.)\quad 0 = -2^{2r-1}.\overset{2r}{a}_1+2^{2r-2}.\overset{2r}{a}_2-2^{2r-3}.\overset{2r}{a}_3+\cdots+2^0.\overset{2r}{a}_{2r}.$$

Diese Ausdrücke lassen eine bemerkenswerthe Transformation zu. Es ist nämlich:

$$(x-1)^n+(x-1)^{n-1}.(e^z-1)^1+(x-1)^{n-2}.(e^z-1)^2+\cdots+(x-1)^0.(e^z-1)^n$$
$$= \frac{(x-1)^{n+1}-(e^z-1)^{n+1}}{x-e^z}$$
$$= \frac{x^{n+1}-e^{(n+1)z}}{x-e^z}-\binom{n+1}{1}\cdot\frac{x^n-e^{nz}}{x-e^z}+\binom{n+1}{2}\cdot\frac{x^{n-1}-e^{(n-1)z}}{x-e^z}-\cdots+(-1)^n\cdot\binom{n+1}{n}\cdot\frac{x-e^z}{x-e^z}$$
$$= x^n+x^{n-1}\cdot\left[e^z-\binom{n+1}{1}\right]+x^{n-2}\cdot\left[e^{2z}-\binom{n+1}{1}\cdot e^z+\binom{n+1}{2}\right]+\cdots$$
$$\cdots+x^0\cdot\left[e^{nz}-\binom{n+1}{1}\cdot e^{(n-1)z}+\binom{n+1}{2}\cdot e^{(n-2)z}-\cdots+(-1)^n\cdot\binom{n+1}{n}\cdot e^{0.z}\right].$$

Durch die n-malige Differentiation nach z erhält man hieraus, weil nach (7.) offenbar

$$(70.)\quad \overset{n}{\alpha}_r = \underset{z=0}{D^n}\cdot\left\{e^{rz}-\binom{n+1}{1}\cdot e^{(r-1)z}+\binom{n+1}{2}\cdot e^{(r-2)z}-\cdots+(-1)^r\cdot\binom{n+1}{r}\cdot e^{0.z}\right\}$$

geschrieben werden kann, die Gleichung *):

$$(71.)\quad \begin{cases} \underset{z=0}{D^n}\dfrac{(x-1)^{n+1}-(e^z-1)^{n+1}}{x-e^z} \\ = \overset{n}{a}_1.(x-1)^{n-1}+\overset{n}{a}_2.(x-1)^{n-2}+\overset{n}{a}_3.(x-1)^{n-3}+\cdots+\overset{n}{a}_n.(x-1)^0 \\ = \overset{n}{\alpha}_1.x^{n-1}\quad+\overset{n}{\alpha}_2.x^{n-2}\quad+\overset{n}{\alpha}_3.x^{n-3}\quad+\cdots+\overset{n}{\alpha}_n.x^0. \end{cases}$$

Für $x=1$ entsteht hieraus, weil $\underset{z=0}{D^n}(e^z-1)^n = n!$ ist:

$$(72.)\quad \overset{n}{\alpha}_1+\overset{n}{\alpha}_2+\overset{n}{\alpha}_3+\overset{n}{\alpha}_4+\cdots+\overset{n}{\alpha}_n = \overset{n}{a}_n = n!,$$

was sich übrigens auch ohne weiteres aus (5.) und (11.) für $x=\infty$ ergiebt.

Weicht x von $+1$ ab, so ist **)

$$(73.)\quad \underset{z=0}{D^n}\frac{(x-1)^{n+1}-(e^z-1)^{n+1}}{x-e^z} = (x-1)^{n+1}.\underset{z=0}{D^n}\frac{1}{x-e^z},$$

---

*) So weit in dieser Gleichung die Ausdrücke mit den a und den α verglichen werden, kann man sie auch aus (14.) oder (15.) herleiten.

**) *Scherk* beruft sich im 4. Bande dieses Journals, S. 300, darauf, dass *Euler* in den Instit. calc. diff. T. II, Cap. VII, § 173 ff. gefunden, *Laplace* aber direct bewiesen habe, es sei — was bei uns aus (73.) und (71.) hervorgeht —:

$$\underset{z=0}{D^n}\frac{x-1}{x-e^z} = \frac{1}{(x-1)^n}\cdot\{\overset{n}{\alpha}_1.x^{n-1}+\overset{n}{\alpha}_2.x^{n-2}+\overset{n}{\alpha}_3.x^{n-3}+\cdots+\overset{n}{\alpha}_n.x^0\},$$

weil dann $z=0$ eine $(n+1)$-fache Wurzel der Function $\frac{(e^z-1)^{n+1}}{x-e^z}$ ist, deren n^{te} Derivirte also bei $z=0$ verschwindet.

Bei den Anwendungen auf (46.) und (52.) ist $x=-1$ zu setzen, und daher gehen (68.) und (67.) über in:

$$(74.)\qquad \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2},n) = -\frac{n}{2^{2n-1}}\cdot\{\overset{n-1}{\alpha}_1-\overset{n-1}{\alpha}_2+\overset{n-1}{\alpha}_3-\overset{n-1}{\alpha}_4+\cdots+(-1)^n.\overset{n-1}{\alpha}_{n-1}\}$$

und

$$(75.)\qquad u_{2r} = (-1)^{r-1}\cdot\{\overset{2r-1}{\alpha}_1-\overset{2r-1}{\alpha}_2+\overset{2r-1}{\alpha}_3-\overset{2r-1}{\alpha}_4+\overset{2r-1}{\alpha}_5-\cdots+\overset{2r-1}{\alpha}_{2r-1}\}\cdot$$

Wenn es nicht sonst schon bekannt wäre, dass $\mathfrak{B}(\frac{1}{2},2r+1)$ verschwindet, so würde man es aus (74.) wegen der Relation (6.) schliessen. Die Anwendung von (6.) auf (75.) ergiebt:

$$(76.)\qquad u_{2r} = \overset{2r-1}{\alpha}_r-2.\overset{2r-1}{\alpha}_{r-1}+2.\overset{2r-1}{\alpha}_{r-2}-\cdots+(-1)^{r-1}.2.\overset{2r-1}{\alpha}_1,$$

was genau der in der voranstehenden Anmerkung erwähnte, von *Scherk* reproducirte *Laplace*sche Ausdruck ist.

Combinirt man mit (76.) die aus (72.) und (6.) hervorgehende Gleichung

$$(2r-1)! = \overset{2r-1}{\alpha}_r+2.\overset{2r-1}{\alpha}_{r-1}+2.\overset{2r-1}{\alpha}_{r-2}+\cdots+2.\overset{2r-1}{\alpha}_1,$$

so erhält man durch Subtraction die Ausdrücke:

$$(77.)\qquad \begin{cases} u_{4r} = (4r-1)!-4\cdot\{\overset{4r-1}{\alpha}_1+\overset{4r-1}{\alpha}_3+\overset{4r-1}{\alpha}_5+\cdots+\overset{4r-1}{\alpha}_{2r-1}\}, \\ u_{4r+2} = (4r+1)!-4\cdot\{\overset{4r+1}{\alpha}_2+\overset{4r+1}{\alpha}_4+\overset{4r+1}{\alpha}_6+\cdots+\overset{4r+1}{\alpha}_{2r}\}, \end{cases}$$

welche zur Berechnung von u_{4r} und u_{4r+2} nur die Kenntniss von r Zahlen α verlangen; und durch Addition:

$$u_{2r} = -(2r-1)!+2\,\overset{2r-1}{\alpha}_r+4\cdot\{\overset{2r-1}{\alpha}_{r-2}+\overset{2r-1}{\alpha}_{r-4}+\overset{2r-1}{\alpha}_{r-6}+\cdots\},$$

was nicht viel complicirter ist*).

---

und stützt darauf seine Deductionen. Dass diese Gleichung ihre Gültigkeit für $x=+1$ verliert, merkt er nicht an und notirt daher auch nicht die Relation (72.); desgl. thut dies auch nicht *Lacroix,* welcher sie im Traité des diff. p. 107 auf einem ganz anderen Wege ableitet, als es oben geschehen ist. Der andere Ausdruck in (71.) mit den Zahlen a kommt, wie es scheint, früher nicht vor, daher auch nicht der Ausdruck (67.) für u_{2r}; dagegen ist (75.) bereits von *Laplace* aufgefunden und von *Lacroix* im Traité des diff. p. 114, entwickelt, wenngleich mit weniger einfachen Mitteln als oben.

*) Der Ausdruck (77.) ist ungefähr ebenso compendiös, wie der *Scherk*sche (88.).

11. Andere Ausdrücke für u_{2r} und u_{2r+1} greifen nach Abschnitt 8. auf die Derivirten der Function $\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1}$ zurück. Die letzteren lassen sich nach der im vorigen Abschnitt angewandten Methode auf mehrfache Weise entwickeln.

Wir wollen zunächst von der Zerlegung ausgehen:

$$\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = -i\cdot\frac{1}{e^z+1}-\frac{1}{i-e^{\frac{1}{2}z}},$$

aus welcher folgt:

$$(78.)\qquad \underset{z=0}{D^n}\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = -i.\underset{z=0}{D^n}\frac{1}{e^z+1}-\frac{1}{2^n}\cdot\underset{z=0}{D^n}\frac{1}{i-e^z}.$$

Die Entwickelung des ersten Summanden der rechten Seite ist in dem vorigen Abschnitt völlig ausgeführt.

Für den zweiten Summanden ergiebt sich aus (73.) und (71.):

$$\underset{z=0}{D^n}\frac{1}{i-e^z} = \frac{\overset{n}{a}_1}{(i-1)^2}+\frac{\overset{n}{a}_2}{(i-1)^3}+\frac{\overset{n}{a}_3}{(i-1)^4}+\cdots+\frac{\overset{n}{a}_n}{(i-1)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(i-1)^{n+1}}\cdot\left\{\overset{n}{\alpha}_1.i^{n-1}+\overset{n}{\alpha}_2.i^{n-2}+\overset{n}{\alpha}_3.i^{n-3}+\cdots+\overset{n}{\alpha}_n.i^0\right\}.$$

Substituirt man hierin

$$\frac{1}{i-1} = \frac{-1-i}{2} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}},\quad i = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

so erhält man:

$$(79.)\quad \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}.\underset{z=0}{D^n}\frac{1}{i-e^z} \\ = \sqrt{2}^{n-1}.\overset{n}{a}_1.e^{-i2.\frac{3\pi}{4}}+\sqrt{2}^{n-2}.\overset{n}{a}_2.e^{-i3.\frac{3\pi}{4}}+\cdots+\sqrt{2}^0.\overset{n}{a}_n.e^{-i(n+1)\frac{3\pi}{4}} \\ = \overset{n}{\alpha}_1.e^{-i(n+5)\frac{\pi}{4}}+\overset{n}{\alpha}_2.e^{-i(n+7)\frac{\pi}{4}}+\cdots+\overset{n}{\alpha}_n.e^{-i(3n+3)\frac{\pi}{4}}. \end{cases}$$

Da nach (52.)

$$u_{2r+1} = (-1)^r.2^{2r+1}.\underset{z=0}{D^{2r}}\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1}$$

ist, so folgert man demnach unter Rücksicht auf (51.) zunächst:

$$(80.)\qquad u_{2r+1} = (-1)^{r+1}.2.\underset{z=0}{D^{2r}}\frac{1}{i-e^z}.$$

Und hieraus ergiebt sich nach dem Obigen einerseits:

$$(81.)\quad \begin{cases} (-1)^{r+1}.u_{2r+1} = \frac{1}{2}\cdot(\overset{2r}{a}_2-\overset{2r}{a}_3)+\frac{1}{4}\cdot\overset{2r}{a}_4-\frac{1}{8}\cdot(\overset{2r}{a}_6-\overset{2r}{a}_7)-\frac{1}{16}\cdot\overset{2r}{a}_8+\frac{1}{32}\cdot(\overset{2r}{a}_{10}-\overset{2r}{a}_{11}) \\ \qquad +\frac{1}{64}\cdot\overset{2r}{a}_{12}-\frac{1}{128}\cdot(\overset{2r}{a}_{14}-\overset{2r}{a}_{15})-\frac{1}{256}\cdot\overset{2r}{a}_{16}+\cdots \end{cases}$$

nebst:

$$(82.)\quad 0 = \overset{2r}{a}_1 - \tfrac{1}{2}\cdot\overset{2r}{a}_2 + \tfrac{1}{4}\cdot(\overset{2r}{a}_4 - \overset{2r}{a}_5) + \tfrac{1}{8}\cdot\overset{2r}{a}_6 - \tfrac{1}{16}\cdot(\overset{2r}{a}_8 - \overset{2r}{a}_9) - \tfrac{1}{32}\cdot\overset{2r}{a}_{10} + \cdots;$$

andrerseits*):

$$(83.)\quad 2^{r-1}.u_{2r+1} = \overset{2r}{\alpha}_r - \overset{2r}{\alpha}_{r-1} - \overset{2r}{\alpha}_{r-2} + \overset{2r}{\alpha}_{r-3} + \overset{2r}{\alpha}_{r-4} - \overset{2r}{\alpha}_{r-5} - \overset{2r}{\alpha}_{r-6} + \cdots \pm \overset{2r}{\alpha}_1.$$

Formeln für u_{2r+1}, welche aus der Vereinigung von (81.) mit (82.) entstehen, will ich übergehen, in Bezug auf (83.) aber noch anmerken, dass sie mit der aus (72.) und (6.) folgenden Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\cdot(2r)! = \overset{2r}{\alpha}_r + \overset{2r}{\alpha}_{r-1} + \overset{2r}{\alpha}_{r-2} + \cdots + \overset{2r}{\alpha}_1$$

zusammen die noch einfacheren Ausdrücke liefert:

$$(84.)\quad \begin{cases} u_{2r+1} = +\dfrac{(2r)!}{2^r} - \dfrac{1}{2^{r-2}}\cdot\{(\overset{2r}{\alpha}_{r-1} + \overset{2r}{\alpha}_{r-2}) + (\overset{2r}{\alpha}_{r-5} + \overset{2r}{\alpha}_{r-6}) + (\overset{2r}{\alpha}_{r-9} + \overset{2r}{\alpha}_{r-10}) + \cdots\} \\ \qquad = -\dfrac{(2r)!}{2^r} + \dfrac{1}{2^{r-2}}\cdot\{\overset{2r}{\alpha}_r + (\overset{2r}{\alpha}_{r-3} + \overset{2r}{\alpha}_{r-4}) + (\overset{2r}{\alpha}_{r-7} + \overset{2r}{\alpha}_{r-8}) + \cdots\}. \end{cases}$$

Setzt man ferner in (78.) für n die ungrade Zahl $(2r-1)$, so verschwindet ihre linke Seite nach (49.), und es folgt mit Rücksicht auf (52.):

$$(85.)\quad u_{2r} = (-1)^r.2i.\underset{z=0}{D^{2r-1}}\frac{1}{i-e^z}.$$

Dies giebt nach (78.) einerseits:

$$(86.)\quad (-1)^{r+1}.u_{2r} = \overset{2r-1}{a}_1 - \tfrac{1}{2}\cdot\overset{2r-1}{a}_2 + \tfrac{1}{4}\cdot(\overset{2r-1}{a}_4 - \overset{2r-1}{a}_5) + \tfrac{1}{8}\cdot\overset{2r-1}{a}_6 - \tfrac{1}{16}\cdot(\overset{2r-1}{a}_8 - \overset{2r-1}{a}_9) - \tfrac{1}{32}\cdot\overset{2r-1}{a}_{10} + \cdots$$

nebst:

$$(87.)\quad 0 = (\overset{2r-1}{a}_2 - \overset{2r-1}{a}_3) + \tfrac{1}{2}\cdot\overset{2r-1}{a}_4 - \tfrac{1}{4}\cdot(\overset{2r-1}{a}_6 - \overset{2r-1}{a}_7) - \tfrac{1}{8}\cdot\overset{2r-1}{a}_8 + \tfrac{1}{16}\cdot(\overset{2r-1}{a}_{10} - \overset{2r-1}{a}_{11}) + \tfrac{1}{32}\cdot\overset{2r-1}{a}_{12} + \cdots;$$

und andererseits**):

$$(88.)\quad u_{2r} = \frac{1}{2^{r-1}}\cdot\{\overset{2r-1}{\alpha}_r - 2.\overset{2r-1}{\alpha}_{r-2} + 2.\overset{2r-1}{\alpha}_{r-4} - 2.\overset{2r-1}{\alpha}_{r-6} + \cdots\}.$$

Dass nicht bloss die u_{2r} ganze Zahlen sind — wie im Abschnitt 10. aus Anlass der Formel (67.) angemerkt wurde — sondern auch die u_{2r+1}, ersieht man, ausser aus (81.) nach der Substitution $\overset{2r}{a}_n = n!\overset{2r}{\mathfrak{a}}_n$, auch ohne weiteres aus der Entwickelung von

$$u_{2r+1} = (-1)^r.2^{2r+1}.\underset{z=0}{D^{2r}}\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1},$$

wenn man den Ausdruck

---

*) Dies ist der nur weiter entwickelte *Scherk*sche Ausdruck für die Secantencoefficienten. (Dieses Journal Bd. 4. S. 304.)

**) Der Ausdruck (88.) ist der *Scherk*sche. (Dieses Journal Bd. 4, S. 304.)

$$\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1} = e^{\frac{1}{2}z}\cdot\frac{1}{e^z+1}$$

nach dem *Leibniz*schen Satz mit Rücksicht auf diejenigen Werthe differentiirt, welche die Derivirten von $\frac{1}{e^z+1}$ für $z=0$ erlangen. Es kommt nämlich heraus:

$$(89.)\quad u_{2r+1}^{\prime} = \binom{2r}{1}\cdot u_{2r}-\binom{2r}{3}\cdot u_{2r-2}+\binom{2r}{5}\cdot u_{2r-4}-\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r}{2r-1}\cdot u_2+(-1)^r;$$

wo u_{2r+1} offenbar aus ganzen Zahlen durch Addition und Subtraction zusammengesetzt ist; *so dass,* wie gesagt, u_{2r+1} *selbst eine ganze Zahl sein muss.* — Umgekehrt erhält man durch die analoge Behandlung von

$$\frac{1}{e^z+1} = e^{-\frac{1}{2}z}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{e^z+1}$$

die Relation*):

$$(90.)\quad u_{2r} = \binom{2r-1}{1}\cdot u_{2r-1}-\binom{2r-1}{3}\cdot u_{2r-3}+\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\binom{2r-1}{2r-1}\cdot u_1.$$

12. Im 8. Abschnitt II haben wir den bekannten Satz reproducirt, dass $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}+x, n)$ eine grade oder ungrade Function von x ist, je nachdem n einen graden oder ungraden Werth hat.

Wir wollen diese Function in entwickelter Form darstellen.

Zu dem Zweck entnehmen wir aus (27.):

$$\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}+x, n) = n.\underset{z=0}{D^{n-1}}\frac{e^{\frac{1}{2}z+xz}-1}{e^z-1} = n.\underset{z=0}{D^{n-1}}\left\{\frac{e^{xz}-1}{e^z-1}+e^{xz}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}z}-1}{e^z-1}\right\}$$

$$= \mathfrak{B}(x, n)+n\cdot\left\{\tfrac{1}{2}x^{n-1}+\binom{n-1}{1}\cdot x^{n-2}\cdot\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, 2)+\binom{n-1}{2}\cdot x^{n-3}\cdot\tfrac{1}{3}\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, 3)+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\binom{n-1}{n-1}\cdot x^0\cdot\frac{1}{n}\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}, n)\right\},$$

oder wegen (45.):

$$\mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}+x, n) = \mathfrak{B}(x, n)+\tfrac{1}{2}nx^{n-1}-\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot\frac{2^2-1}{2^1}\cdot B_1+\binom{n}{4}\cdot x^{n-4}\cdot\frac{2^4-1}{2^3}\cdot B_2$$

$$-\binom{n}{6}\cdot x^{n-6}\cdot\frac{2^6-1}{2^5}\cdot B_3+\cdots.$$

Substituirt man hier $\mathfrak{B}(x, n)$ in der *Raabe*schen Form (1.), so folgt**):

*) Die Relationen (89.) und (90.) finden sich, in anderer Weise abgeleitet, bei *Raabe* im 42. Bande dieses Journals.

Man kann sie so zusammenfassen:

$$u_{n+1} = \sin\frac{(n+1)\pi}{2}+\binom{n}{1}\cdot u_n-\binom{n}{3}\cdot u_{n-2}+\binom{n}{5}\cdot u_{n-4}-\cdots.$$

**) Vergl. die *Raabe*schen Formeln im 42. Bande dieses Journals.

$$(91.)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}+x,n) = x^n-\binom{n}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2^1}\right)\cdot B_1.x^{n-2}+\binom{n}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdot B_2.x^{n-4} \\ \qquad -\binom{n}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{2^5}\right)\cdot B_3.x^{n-6}+\binom{n}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{2^7}\right)\cdot B_4.x^{n-8}-\cdots, \end{cases}$$

wo aber, wenn $n = 2r$ eine *grade* Zahl ist, das letzte Glied dem hier angegebenen Bildungsgesetz nicht folgt, weil in (1.) das Glied $(-1)^{r-1}B_r.x^0$ fehlt; so dass $\mathfrak{B}(\frac{1}{2}+x, 2r)$ mit dem Gliede

$$(-1)^r\cdot\binom{2r}{2r}\cdot\left(2-\frac{1}{2^{2r-1}}\right)\cdot B_r$$

schliesst, wie es ja auch die Formel (45.) verlangt.

Für $x = -\frac{1}{4}$ ergeben sich hieraus in Verbindung mit (55.) und (52.) Relationen für u_{2r} oder B_r und für u_{2r+1}, welche aber kein grosses Interesse in Anspruch nehmen dürften, weil sie sich auch aus früher schon entwickelten Relationen leicht ableiten lassen und im Vergleich mit jenen weniger einfach sind.

13. Wir wollen uns noch mit den Zahlen $\overset{n}{\mathfrak{a}}_r$ etwas näher beschäftigen, um aus den Formeln des 9. Abschnitts ein nicht unwichtiges Resultat abzuleiten.

Es ist bereits in (72.) constatirt worden, dass $\overset{n}{a}_n = n!$ sei, weshalb nach (18.)

$$(92.)\qquad \overset{n}{\mathfrak{a}}_n = 1$$

sein muss. Daher folgt aus (19.):

$$\overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-1} = (n-1).\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-1}+\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-2} = (n-1)+\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-2};$$

und durch Summation des Gleichungssystems, welches hieraus entsteht, wenn man n der Reihe nach durch 1, 2, 3, ..., n ersetzt:

$$(93.)\qquad \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-1} = \binom{n}{2}.$$

Verfährt man in analoger Weise mit der aus (19.) folgenden Gleichung

$$\overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-2} = (n-2).\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-2}+\overset{n-1}{\mathfrak{a}}_{n-3},$$

so ergiebt sich:

$$(94.)\qquad \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-2} = 3\cdot\binom{n}{4}+\binom{n}{3}.$$

In ähnlicher Weise folgert man:

$$(95.)\quad \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-3} = 15\cdot\binom{n}{6}+10\cdot\binom{n}{5}+\binom{n}{4},$$

$$(96.)\quad \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-4} = 105\cdot\binom{n}{8}+105\cdot\binom{n}{7}+25\cdot\binom{n}{6}+\binom{n}{5},$$

u. s. w.

oder bei einer etwas veränderten Zusammenfassung:

$$(97.)\quad \begin{cases} \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-2} = 2\cdot\binom{n}{4}+\binom{n+1}{4}, \\ \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-3} = 6\cdot\binom{n}{6}+8\cdot\binom{n+1}{6}+\binom{n+2}{6}, \\ \overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-4} = 24\cdot\binom{n}{8}+58\cdot\binom{n+1}{8}+22\cdot\binom{n+2}{8}+\binom{n+3}{8}, \end{cases}$$

u. s. w.

Die Aufstellung des allgemeinen Gesetzes für die Bildungsweise von $\overset{n}{\mathfrak{a}}_{n-r}$ in dieser Form ist leicht. Wir sehen hier von ihr ab, weil sie uns keinen Nutzen bietet.

Betrachtet man nun den ersten Ausdruck (63.) für v_r, so erkennt man ohne weiteres, dass — nachdem mit r ausmultiplicirt ist — alle Summanden ganze Zahlen werden, so lange $r \leqq 8$ ist, weil sich dann der Nenner jedes Coefficienten der $\mathfrak{a}$ gegen einen Factor des Zählers hebt.

Macht man $r=9$, so gilt dasselbe von allen einzelnen Summanden ausser dem drittletzten

$$\frac{9.2^3.1.3.5\ldots29}{16}\cdot\overset{17}{\mathfrak{a}}_{15},$$

welcher nur dann eine ganze Zahl ist, wenn 2 in

$$\overset{17}{\mathfrak{a}}_{15} = 3\cdot\binom{17}{4}+\binom{17}{3} = 4.17.15.7+8.17.5$$

aufgeht. Da dies zutrifft, so ist auch v_9 eine ganze Zahl.

Dass v_{10} bis v_{16} incl. ganze Zahlen sind, erhellt aus (63.) wieder unmittelbar, weil die Nenner der Coefficienten der $\mathfrak{a}$ sich gegen einen Factor des Zählers heben.

Damit v_{17} eine ganze Zahl sei, muss 2^2 in $\overset{33}{\mathfrak{a}}_{31}$ aufgehen; was der Fall ist, weil aus (94.) folgt:

$$\overset{33}{\mathfrak{a}}_{31} = 3\cdot\binom{33}{4}+\binom{33}{3} = 8.33.31.15+16.11.31.$$

Für v_{18} bis v_{32} incl. bleibt dann wieder kein Bedenken.

Man erkennt, wenn man auf dem eingeschlagenen Wege weitergeht, dass es überhaupt nur darauf ankommt, ob $\overset{2r+1}{\mathfrak{a}}_{2r-1}$ für $r=2^n$ durch 2^{n-3} theilbar ist.

Nun ist aber nach (94.)

$$\overset{2r+1}{\mathfrak{a}}_{2r-1} = \tfrac{1}{6}\cdot r(4r^2-1)(3r-1),$$

was für $r = 2^n$ in

$$2^{n-1}.\frac{4^{n+1}-1}{4-1}\cdot(3.2^n-1)$$

übergeht; und die Division mit 2^{n-3} ergiebt eine ganze Zahl mit dem Theiler $2^2 = 4$.

Alle Summanden des Ausdrucks (63.), nachdem völlig ausmultiplicirt ist, werden ersichtlich grade Zahlen, mit Ausnahme des letzten, welcher eben so offenkundig ungrade ist. Daher ist v_r selbst ungrade.

Nimmt man noch hinzu, dass u_{2r} als eine ganze Zahl erkannt ist (Abschnitt 10.), so erhält man demnach den folgenden Lehrsatz:

Die Zahl

$$v_r = 2.(2^{2r}-1).B_r = \frac{r.u_{2r}}{2^{2r-2}}$$

ist ganz, ungrade und durch jeden ungraden Theiler von r theilbar. Die Zahl u_{2r} ist durch die $(2r-2-n)^{te}$ Potenz von 2, aber durch keine höhere, theilbar, wenn 2^n die höchste Potenz von 2 bedeutet, welche in r aufgeht.

Die neun ersten Werthe von v_r sind:

$v_1 = 1,\quad v_2 = 1,\quad v_3 = 3,\quad v_4 = 17,\quad v_5 = 5.31,\quad v_6 = 3.691,\quad v_7 = 7.127.43,$
$v_8 = 257.3617,\quad v_9 = 9.73.43867.$

Uebrigens lassen sich für die Zahlen v_r aus den bei uns angemerkten Recursionsformeln für B_r auch leicht Recursionsformeln aufstellen. Z. B. folgt, wenn man zu (40.) die Gleichung (38.) addirt, nachdem man in der letzteren r um 1 erniedrigt hat:

$$(98.)\quad v_r - \tfrac{1}{2}\cdot\binom{2r}{2}\cdot v_{r-1} + \tfrac{1}{2}\cdot\binom{2r}{4}\cdot v_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1}.\tfrac{1}{2}\cdot\binom{2r}{2r-2}\cdot v_1 + (-1)^r.r = 0;$$

und aus (41.) in Verbindung mit (39.) ergiebt sich:

$$(99.)\quad v_r - \tfrac{1}{3}\cdot\binom{2r}{2}\cdot v_{r-1} + \tfrac{1}{5}\cdot\binom{2r}{4}\cdot v_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1}.\frac{1}{2r-1}\binom{2r}{2r-2}\cdot v_1 + (-1)^r = 0.$$

Die Zahlen u_{2r+1} sind sämmtlich ungrade, wie nun die Formel (89.) ohne weiteres zeigt, weil man sämmtliche Glieder dieser Formel mit Ausnahme des letzten durch 2 theilen kann.

Berlin, October 1882.

Elementare Beweise einiger geometrischen Sätze.

(Hierzu Fig. 1 Taf. I.)

(Von Herrn *Study* in Strassburg i. E.)

I.

Der Satz von *Faure* über die Poltetraeder der Flächen zweiten Grades.

Die in Bezug auf ein ebenes Polarsystem Σ^2 conjugirten Punkte $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ etc. einer Geraden p_1 bilden eine involutorische Punktreihe, deren Mittelpunkt M_1 dem unendlich fernen Punkt von p_1 entspricht und daher zugleich mit dem Pole P_1 von p_1 auf dem der Geraden p_1 conjugirten Durchmesser d_1 liegt. Der zweite Schnittpunkt aller den Dreiecken $P_1 A_1 A_2$, $P_1 B_1 B_2$ etc. umschriebenen Kreise liegt daher ebenfalls auf d_1: Der Mittelpunkt M_2 des Polarsystems liegt auf der Chordale des Kreisbüschels (P_1). Er liegt aber ebenso auf der Chordale eines beliebigen anderen Kreisbüschels (Q_1), das in analoger Weise construirt ist, so wie auf der Chordale des durch den Schnittpunkt der Polaren von P_1 und Q_1 bestimmten Büschels $(p_1 q_1)$.

Da nun letzteres sowohl mit (P_1) als auch mit (Q_1) einen Kreis gemein hat, und P_1 und Q_1 ganz beliebig sind, so folgt, auch wenn M_2 unendlich fern liegt, der Satz, „dass die den Poldreiecken eines ebenen Polarsystems umschriebenen Kreise den Mittelpunkt desselben zum gemeinsamen Chordalpunkt haben“ *) (S. *Reye*, Geom. d. Lage I. p. 214). Auf ähnlichem Wege gelangen wir zu dem analogen Satz im Raume (S. *Reye* in diesem Journal Band 78 p. 345).

Ist nämlich das ebene Polarsystem Σ^2 ein Schnitt eines räumlichen Σ^3, so gehen die Kugeln, welche durch den Pol P_2 von Σ^2 und das in Σ^2 liegende Kreisnetz gelegt werden können, noch durch einen zweiten

*) Hieraus kann man unter anderem noch schliessen, dass alle Kreise, die man den Punktetripeln einer Involution dritten Grades auf einer Curve zweiter Ordnung umschreiben kann, einem Netze angehören. Ein analoger Satz gilt für die Involutionen vierten Grades auf Raumcurven dritter Ordnung u. s. w.

Punkt P_2', welcher mit den Mittelpunkten M_2 und M_3 des ebenen und räumlichen Polarsystems, sowie mit P_2 in einer Geraden liegt. Es ist also durch jeden Punkt P_2 des Raumes ein Kugelbündel (P_2) bestimmt, dessen Chordale ein Durchmesser von Σ^3 ist, und dessen Kugeln allen den Poltetraedern von Σ^3 umschrieben sind, von welchen P_2 ein Eckpunkt ist.

Ist nun Q_2 ein beliebiger zweiter und R_2 ein dritter zu P_2 und Q_2 conjugirter Punkt, so hat das Kugelbündel (R_2) sowohl mit (P_2) als auch mit (Q_2) einen Kugelbüschel gemein, und da die Chordalen von (P_2), (Q_2) und (R_2) in denselben Punkt convergiren, so gehören (P_2), (Q_2) und (R_2) einem Kugelgebüsch an; da dieses von Q_2 unabhängig bestimmt ist, so ist hiermit der Satz bewiesen: „Alle den Poltetraedern des räumlichen Polarsystems umschriebenen Kugelflächen besitzen in dem Mittelpunkte des Polarsystems einen gemeinsamen Chordalpunkt".

II.

Zwei Kreise und ihr Isogonalkreis*) haben bekanntlich die Chordale gemein; die drei Isogonalkreise dreier Kreise haben daher mit diesen denselben Chordalpunkt, und weil ihre Mittelpunkte als die Diagonalmitten des vollständigen Vierseits der Aehnlichkeitspunkte in einer Geraden liegen, so haben sie unter sich eine gemeinsame Chordale.

Ebenso haben die Isogonalkugeln von vier Kugeln unter sich die Chordale und mit den Hauptkugeln den Chordalpunkt gemein; ihre Mittelpunkte bilden die Ecken eines vollständigen Vierseits. Einen Grenzfall hiervon bildet der Satz der Ebene: „Die sechs Isogonalkreise von vier Kreisen besitzen einen gemeinsamen Chordalpunkt", dem das räumliche Analogon gegenübersteht: „Die zehn Isogonalkugeln von fünf Kugeln haben den Chordalpunkt gemein"; ihre Mittelpunkte bilden die Ecken eines vollständigen Fünfflachs.

Da sich zu jedem vollständigen Vierseit auf unendlich viele Arten**) Gruppen von drei Kreisen construiren lassen, in Bezug auf welche seine Ecken die Aehnlichkeitspunkte sind, so folgt der Satz (S. ***Reye,*** Geom. d. Lage Th. I. Aufg. 118, wo er für den Fall reeller Schnittpunkte der drei Kreise bewiesen ist):

*) „Isogonalkreis" heisst nach *Nöggerath* der über dem Abstande der Aehnlichkeitspunkte als Durchmesser beschriebene Kreis, weil von den Punkten seiner Peripherie aus die beiden Kreise unter gleichen Winkeln erscheinen.

**) Dieselben unterscheiden sich nur durch die absolute Länge der Radien.

„Die über den Diagonalen eines vollständigen Vierseits beschriebenen Kreise haben die Chordale gemeinsam“.

Auf ähnliche Weise gelangt man zu dem folgenden Satz:

„Liegen auf drei Geraden des Raumes, die sich in einem Punkte schneiden, drei Punktepaare, $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, so bestimmen diese und ihre Verbindungslinien eine Configuration von 12 Punkten, 16 Geraden und 12 Ebenen, welche mit der durch die Aehnlichkeitspunkte von 4 Kugeln bestimmten Figur identisch ist. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von $\overline{B_1 C_1}$ und $\overline{B_2 C_2}$ mit α_1, den von $\overline{B_1 C_2}$ und $\overline{B_2 C_1}$ mit α_2 u. s. w.

Die sechs Kugeln, welche über den Abständen der Punkte $A_1 \alpha_1$, $A_2 \alpha_2$, $B_1 \beta_1$ ... als Durchmessern beschrieben werden können, besitzen eine gemeinsame Chordale. Ihre Mittelpunkte liegen zu dreien in einer Geraden, bilden also die Ecken eines vollständigen Vierseits. Ein Gleiches gilt für die Gruppe $A_1 \alpha_2$, $A_2 \alpha_1$, $B_1 \beta_2$. ...“.

Eines der in der Figur enthaltenen zwölf Vierseite hat die Strecken $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$, $\overline{\beta_1 \beta_2}$, $\overline{\gamma_1 \gamma_2}$ zu Diagonalen; wir ziehen hieraus den Schluss:

„Nimmt man auf drei Strahlen eines Bündels je ein Punktepaar an, und beschreibt über den Abständen der übrigen beiden Eckpunkte der drei so bestimmten vollständigen Vierseite Kugeln, so haben diese die Chordalebene gemein.“

Bezeichnen wir die Kugel $(\alpha_1 \alpha_2)$ als „Diagonalkugel“ der Punktepaare $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$, so können wir nun diesen Satz in erweiterter Form auch so aussprechen:

„In zwei perspectivischen collinearen räumlichen Systemen bilden die zu drei Paaren zugeordneter Punkte gehörigen Diagonalpunkte ein vollständiges Vierseit, die zu vier Punktepaaren gehörigen die obige Configuration von 12 Punkten, 16 Geraden und 12 Ebenen. Die zu je drei Punktepaaren gehörigen Diagonalkugeln haben die Chordalebene, die zu je vieren gehörigen die Chordallinie, die zu je fünf Punktepaaren gehörigen den Chordalpunkt gemeinsam“. Die Mittelpunkte der letzteren bilden die Ecken eines vollständigen Fünfflachs.

Um den letzten Theil des Satzes zu beweisen, bezeichnen wir die Paare zugeordneter Punkte mit den Ziffern 1, 2, ... 5 und den Kugelbüschel, in dem die Diagonalkugeln (23)(31)(12) enthalten sind, mit (123).

Die vier Kugelbüschel

$$(234)(134)(124)(123)$$

müssen nun einem und demselben Kugelbündel (1234) angehören, welches durch die Kugeln (12)(23)(34) bestimmt ist; denn dieses enthält alle Diagonalkugeln der Punktepaare 1, 2, 3, 4.

Ebenso ergiebt sich, dass die fünf Kugelbündel

(2345)(1345)(1245)(1235)(1234)

in demjenigen Kugelgebüsch enthalten sind, welches durch die Kugeln

(12)(23)(34)(45)

geht.

III.

„Alle Kreise, welche die Abstände zugeordneter Punkte einer quadratischen Involution auf einer Curve II. O. zu Durchmessern haben, besitzen einen gemeinsamen Chordalpunkt, der senkrecht über der Mitte der Involutionsaxe liegt."

Sind nämlich A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 drei Paare zugeordneter Punkte, S das Involutionscentrum, und schneiden sich die Verbindungslinien der Punkte B_1B_2 mit A_1A_2 und C_1C_2 in K, L, M, N (s. d. Figur) so ist die Chordale PP_0 der Kreise (LK) und (MN) unabhängig von der Lage des Strahles $\overline{SC_1C_2}$, weil die involutorische Punktreihe K, L, M, N aus Paaren conjugirter Punkte bezüglich der Curve II. O. besteht. Ferner haben die Kreise $(KL)(A_1A_2)(B_1B_2)$, sowie $(MN)(C_1C_2)(B_1B_2)$ nach einem unter (II.) bewiesenen Satze die betreffenden Chordalen gemein; folglich haben diese sechs Kreise einen gemeinschaftlichen Chordalpunkt P; dieser ist aber schon durch PP_0 und die Chordale von (A_1A_2) und (B_1B_2) ausreichend bestimmt, also von (C_1C_2) unabhängig.

Für Flächen II. O. folgt hieraus: „Zieht man aus einem Punkte des einer cyklischen Ebene conjugirten Durchmessers Secanten an die Fläche, so liegen die kleinsten Kugeln, welche über den Strecken beschrieben werden können, die die Fläche auf den Secanten abgrenzt, in einem Kugelgebüsche".

Diese Sätze sind Verallgemeinerungen eines bekannten Satzes über die quadratische Involution auf der Geraden.

Strassburg i. E., 1881.

Zur conformen Abbildung der Cyklide auf Rechteck und unbegrenzte Ebene.

(Hierzu Fig. 2 Taf. I.)

(Von Herrn *Holzmüller* in Hagen.)

Da jede Cyklide durch Inversion in eine Rotationsfläche verwandelt werden kann, ist nur die Betrachtung der letzteren nöthig. Man kann dieselbe durch einen einfachen Process in ein Rechtecksnetz eintheilen, dessen Individua mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben. (Dies geschieht durch wiederholte Inversion.)

Der Radius des rotirenden Kreises sei $\varrho = \frac{r-r_1}{2}$, wobei r und r_1 grösster resp. kleinster Abstand von der Rotationsaxe sind. Der Rotationswinkel werde mit ϑ, der Winkel am erzeugenden Kreise mit φ bezeichnet (vergl. Figur).

Bei unendlich kleiner Quadrattheilung ist am äussersten Rande

$$\varrho\, d\varphi = r\, d\vartheta$$

der Ausdruck für die Quadratseiten, in der Entfernung x von der Rotationsaxe hingegen

$$\varrho\, d\varphi_1 = x\, d\vartheta,$$

so dass sich beliebige Quadratseiten zu den Randelementen wie $x:r$ verhalten, also

$$\varrho\, d\varphi_1 = (r\, d\vartheta)\frac{x}{r} = (r\, d\vartheta)\frac{r+\varrho\cos\varphi-\varrho}{r}.$$

Der mittlere Werth des veränderlichen Factors von $r\, d\vartheta$ ist

$$(1.)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r+\varrho\cos\varphi-\varrho}{r}\, d\varphi = \frac{r+r_1}{2r}.$$

Um nun die Cyklide conform als Rechteck darzustellen, dessen Basis $2r\pi$, d. h. der grösste Umfang des Körpers ist, hat man jede Quadratseite

$\varrho d\varphi_1$ mit dem umgekehrten Werthe des Ausdrucks (1.) zu multipliciren, d. h. mit $\frac{2r}{r+r_1}$, um lauter gleiche Quadrate zu erhalten. Die Höhe des Rechtecks also wird

$$2\varrho\pi\frac{2r}{r+r_1}, \quad \text{oder auch} \quad 2r\pi\frac{r-r_1}{r+r_1}.$$

Die einfachste conforme Abbildung der Rotationscyklide ist also die auf ein Rechteck mit dem Seitenverhältniss

$$h:b = r-r_1:r+r_1.$$

Mit Hülfe der Abbildung $Z = \sin\operatorname{am} z$, wobei der Modul dem Verhältniss der Rechtecksseiten gemäss zu bestimmen ist, kann man dann zur Darstellung auf der gesammten Ebene übergehen.

Hagen, den 10. December 1882.

Ueber gewisse transcendente Flächen, welche die Cyklide als speciellen Fall enthalten.

(Von Herrn *Holzmüller* in Hagen.)

In einer Abhandlung über die logarithmische Abbildung im Jahrgange 1871 der Zeitschrift für Math. und Physik machte ich auf gewisse Flächen aufmerksam, welche die Cyklide als speciellen Fall enthalten. Ihre Entstehungsweise war folgende: Man denke sich in den Streifen zwischen zwei logarithmischen Spiralen oder Doppelspiralen *) derselben Parallelschaar alle möglichen Berührungskreise eingezeichnet und jeden durch Rotation um einen seiner Durchmesser in eine Kugel verwandelt, dann ist die Enveloppe aller Kugeln die zu definirende Fläche. (Schneidet z. B. die log. Spirale ihre Radien unter 90^0, so hat man die Rotationscyklide.)

Ihre allgemeinste Gestalt erhalten die zu besprechenden Flächen durch Inversion von einem beliebigen Raumpunkte aus. Die Grenzlinien der besprochenen Kreismenge sind dann isogonale Trajectorien eines Kreisbüschels auf der Kugelfläche, im speciellen Falle Loxodromen.

Es ist klar, dass alle Eigenschaften der einfachsten dieser Flächen, die mit der Kreisverwandtschaft (Kugelverwandtschaft) zusammenhängen, der ganzen Gruppe gemeinsam sind, so dass man nur nöthig hat, von der ersteren zu sprechen, die mit Hülfe der logarithmischen Spiralen zu construiren war. Sie mag als „logarithmische Spiralfläche" bezeichnet werden.

Einige jener Eigenschaften sollen hier ohne weiteren Beweis angegeben werden, um für diese eigenthümliche Flächengruppe zu interessiren.

1) Die eine Schaar von Krümmungslinien der logarithmischen Spiralfläche (und aller anderen der definirten Gruppe) besteht aus lauter Kreisen.

---

*) Fig. 58 und 59 meiner „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften" (Leipzig, B. G. Teubner, 1882) stellen solche Spiralstreifen dar.

2) Mittels dieser Kreise kann man — durch einfache Aehnlichkeitstransformation — eine isothermische Eintheilung in Streifen erzielen (die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben).

3) Die zweite Schaar von Krümmungslinien stellt sich in der Projection auf die Symmetrieebenen in Form von logarithmischen Spiralen dar. In Wirklichkeit sind sie „Loxodromen" von Kreiskegeln, die ihre Spitze im Centrum der Spiralen haben und deren Axe senkrecht auf der Ebene der letzteren steht.

4) Um die isothermische Rechteckstheilung mit Hülfe dieser Curven zu vollenden, d. h. Rechtecke zu erzielen, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben, kann man folgende Ueberlegung machen: Man gehe aus von einem der Berührungskreise der beiden Spiralen und zeichne die Krümmungskreise für die Berührungspunkte der letzteren. Diese Kreise geben Veranlassung zu einer Cyklide, die man passend als Krümmungscyklide bezeichnet. Der zu der Berührungsstelle gehörige isothermische Elementarstreifen (von zwei Kreisen gebildet) ist beiden Flächen gemeinsam. Nun lässt sich aber die Cyklide durch wiederholte Inversion gegen Punkte der Axe des Kreisschnittbüschels in ein System „ähnlicher Rechtecke" (mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustrebend) eintheilen, und diese Eintheilung, so weit sie den besprochenen Elementarstreifen betrifft, gilt sofort auch für den der Spiralfläche.

Die Elemente der „Quadrattheilung" z. B. lassen sich für die Cyklide construiren, sobald man durch Rechnung (in gewissen Fällen, die mit der Kreistheilung zusammenhängen, durch Construction) eins der Quadrate bestimmt hat. Dasselbe gilt dann von der Spiralfläche, deren Abbildung auf einen unendlichen Parallelstreifen, sodann mit Hülfe der Exponentialfunction auf die ganze Ebene, nun im Princip gelöst ist.

Die Uebertragung dieser Betrachtungen auf die übrigen Flächen, ebenso die Untersuchung der Diagonalcurven der Rechteckstheilung, ist ohne Schwierigkeit. Auch die Modellirung der Flächen ist durchführbar.

Die Krümmungscyklide hat offenbar entsprechende Bedeutung für alle Flächen, die durch beliebige Bewegung einer Kugel mit veränderlichem Radius entstehen.

Hagen, den 10. December 1882.

Ueber Integrale zweiter Gattung.

(Von Herrn *J. Thomae* in Jena.)

In dem Aufsatze Bd. 93 S. 69 bis 80 dieses Journals habe ich die Absicht ausgesprochen, die Darstellung der Function

$$\frac{d \lg \vartheta((u(\sigma, \zeta) - \Sigma u(s_\mu, z_\mu)))}{d\zeta}$$

durch Integrale zweiter Gattung für den Fall $p = 3$ noch zu vereinfachen. Hier soll eine solche Vereinfachung als Fortsetzung jenes Aufsatzes gegeben werden, so dass die dortige Bezeichnung beibehalten wird. Einiges Ungenaue, welches ich in jenem Aufsatze bemerkt habe, will ich zuerst corrigiren.

Die Gleichung (3.) S. 72 gilt offenbar nur, wenn φ von s unabhängig ist; im allgemeinen Falle ist zu schreiben

$$\sum_{\varphi=0} t(s, z) + F_2(k) \frac{\partial \lg \varphi(k)}{\partial s} \equiv \sum_{\varphi^{(0)}=0} t(s, z) + \frac{\partial \lg \varphi^{(0)}(k)}{\partial s},$$

wenn abkürzend

$$\frac{\partial \lg \varphi(k)}{\partial s} \quad \text{für} \quad \frac{\partial \lg \varphi(s, z)}{\partial s} \qquad {\scriptstyle (s,\, z = z_k,\, k)}$$

geschrieben wird.

In den Gleichungen (7.) und (13.) ist φ_ν statt φ_0 zu lesen, in (9.) und (10.) das Vorzeichen von $d \lg F_1(\sigma, \zeta) : d\zeta$ umzukehren, und in der auf die Gleichung (15.) S. 80 folgenden Zeile ist integriren durch differentiiren zu ersetzen.

Da (§ 5) für zweiblättrige Flächen

$$\begin{aligned} t(\sigma, \zeta;\ -\sigma, \zeta) &= -\tfrac{1}{4} \sum_{(k)} \frac{1}{(\zeta - k)} + \sum_{(k)} \frac{\sigma}{(\zeta - k)} \frac{\partial (u_\nu(-\sigma, \zeta) - U_\nu)}{\varphi_\nu(k) \partial k} \\ &\equiv -\tfrac{1}{4} \sum_{(k)} \frac{1}{(\zeta - k)} - \sum_{(k)} \frac{\sigma}{(\zeta - k)} \frac{\partial (u_\nu(\sigma, \zeta) - U_\nu)}{\varphi_\nu(k) \partial k} \end{aligned}$$

ist, so folgt

$$\Sigma t(\sigma, \zeta;\ s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}) \equiv \tfrac{1}{2}\sum_{(k)} \frac{1}{\zeta-k} + \sum_{(k)} \frac{\sigma}{\zeta-k} \frac{\partial(u_\nu(\sigma,\zeta)-U_\nu)}{\varphi_\nu(k)\partial k},$$

und also

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lg\vartheta((u(\sigma,\zeta)-\Sigma u(s_\mu, z_\mu)))}{d\zeta} \\ \equiv \Sigma t(\sigma,\zeta;\ s_\mu, z_\mu) - \sum_{(k)} \left\{ \dfrac{\sigma}{\zeta-k} \dfrac{\partial(u_\nu(\sigma,\zeta)-U_\nu)}{\varphi_\nu(k)\partial k} + \tfrac{1}{2}\dfrac{1}{\zeta-k} \right\}. \end{cases}$$

Nun wenden wir uns zu unserem Gegenstande.

§ 6.

Die Functionen χ und $\varphi^{(\nu)}$.

Die Gleichung $F(s, z)$, die zu Grunde liegt, sei in der Form gegeben

$$F(s, z) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0,$$

$$a_0 = \mathfrak{a}_0, \quad a_1 = a_1(z) = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 z, \quad a_2 = a_2(z) = \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2 z + \mathfrak{c}_2 z^2,$$

$$a_3 = \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{b}_3 z + \mathfrak{c}_3 z^2 + \mathfrak{d}_3 z^3, \quad a_4 = \mathfrak{a}_4 + \mathfrak{b}_4 z + \mathfrak{c}_4 z^2 + \mathfrak{d}_4 z^3 + \mathfrak{e}_4 z^4,$$

so dass also — gegenüber der Bezeichnung des § 1 — die Binomialcoefficienten in a_1, a_2, a_3 eingerechnet sind.

Die ganze Function $\chi(\sigma, \zeta;\ s, z)$ (siehe § 3), deren wir uns zur Darstellung der Integrale zweiter Gattung bedienen, die, weil im Endlichen liegende sich aufhebende Verzweigungspunkte hier nicht vorhanden sind, nur die Bedingung zu befriedigen hat, in den Punkten $\sigma^{(1)}, \zeta;\ \sigma^{(2)}, \zeta;\ \sigma^{(3)}, \zeta$ zu verschwinden und höchstens vom dritten Grade zu sein, kann in der Form

$$(16.)\quad \begin{cases} \chi(\sigma,\zeta;\ s, z) = \dfrac{F(s,\zeta)-F(\sigma,\zeta)}{s-\sigma} \\ = a_0(s^3+s^2\sigma+s\sigma^2+\sigma^3) + a_1(\zeta)(s^2+s\sigma+\sigma^2) + a_2(\zeta)(s+\sigma) + a_3(\zeta) \end{cases}$$

dargestellt werden, und geht für $s, z = \sigma, \zeta$ in $F_1(\sigma, \zeta)$ über. Differentiirt man (total) nach z, und setzt nachher σ, ζ für s, z, so ergiebt sich

$$\chi'(\sigma,\zeta;\ s, z) = -\{a_0(3s^2+2s\sigma+\sigma^2) + a_1(\zeta)(2s+\sigma) + a_2(\zeta)\} F_2(s, z) : F_1(s, z),$$

$$(17.)\quad \chi'(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta) = -\frac{(6a_0\sigma^2 + 3a_1(\zeta)\sigma + a_2(\zeta))F_2(\sigma,\zeta)}{F_1(\sigma,\zeta)} = -\frac{F_{11}(\sigma,\zeta)F_2(\sigma,\zeta)}{2F_1(\sigma,\zeta)}.$$

Das Integral zweiter Gattung nimmt so, nach der im § 3 gegebenen Darstellung, die Gestalt an

$$(18.)\quad t(\sigma,\zeta;\ s, z) = \sum_{(k)} \frac{\partial u_\nu(s,z)}{\partial k} \frac{\chi(\sigma,\zeta;k)}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)} + \frac{\chi(\sigma,\zeta;\ s, z)}{(\zeta-z)F_1(s,z)}.$$

Die Function $\varphi^{(0)}$ sollte eine fest bestimmte möglichst einfache Function φ sein. Als solche empfiehlt sich hier die Zahl Eins, welche zu den φ-Functionen gehört. Als ihre Nullpunkte sind die vier unendlich fernen Punkte der Fläche T anzusehen, welche wir mit $\infty, \infty;\ \infty^{(1)}, \infty;\ \infty^{(2)}, \infty;\ \infty^{(3)}, \infty$ bezeichnen. Der Werth, den

$$t(\sigma, \zeta;\ \infty, \infty) + t(\sigma, \zeta;\ \infty^{(1)}, \infty) + t(\sigma, \zeta;\ \infty^{(2)}, \infty) + t(\sigma, \zeta;\ \infty^{(3)}, \infty)$$

annimmt, lässt sich leicht angeben. Setzen wir

$$u_\nu(\infty, \infty) + u_\nu(\infty^{(1)}, \infty) + u_\nu(\infty^{(2)}, \infty) + u_\nu(\infty^{(3)}, \infty) = U_\nu,$$

worin U_ν nach *Riemanns* Annahmen über die Anfangswerthe ein System ganzer gleichzeitiger Periodicitätsmoduln der Function u_ν bedeutet, so bildet die Summe

$$\sum_{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial k} \frac{\chi(\sigma, \zeta;\ k)}{(\zeta - k)\varphi_\nu(k)} = \Sigma \tau_\mu^{(\infty)}$$

den einen Bestandtheil jenes Werthes. Derselbe bildet zugleich ein System ganzer Periodicitätsmoduln der Function $t(\sigma, \zeta;\ s, z)$ und es würde das System (im Sinne des § 1) durch $((\tau^{(\infty)}))$ zu bezeichnen sein. — Der andere Bestandtheil jenes Werthes

$$\frac{\chi(\sigma, \zeta;\ \infty, \infty)}{(\zeta - \infty)F_1(\infty, \infty)} + \frac{\chi(\sigma, \zeta;\ \infty^{(1)}, \infty)}{(\zeta - \infty)F_1(\infty^{(1)}, \infty)} + \frac{\chi(\sigma, \zeta;\ \infty^{(2)}, \infty)}{(\zeta - \infty)F_1(\infty^{(2)}, \infty)} + \frac{\chi(\sigma, \zeta;\ \infty^{(3)}, \infty)}{(\zeta - \infty)F_1(\infty^{(3)}, \infty)}$$

ist Null, weil jedes Glied der Summe Null ist. Somit erhalten wir die Gleichung oder Congruenz

$$(19.)\qquad \sum_{\varphi^{(0)}=0} t(\sigma, \zeta;\ s, z) = \Sigma \tau_\mu^{(\infty)} \equiv 0,$$

worin τ_μ der Periodicitätsmodul von t am Schnitt b_μ, $((\tau_\mu^{(\infty)}))$ ein System derselben ist.

§ 7.

Die Function $\sqrt{\psi}$.

Nun betrachten wir die Zusammensetzung der unter (5.) im § 2 definirten Function $\sqrt{\psi}$. Diese Function wird besonders einfach, wenn σ, ζ auf einen Punkt ε fällt, und kann dann durch drei Producte aus je zwei Paaren (im engeren Sinne) *Abel*scher Functionen dargestellt werden *). Um von diesem Falle zum allgemeineren zu gelangen, hat man die besondere Function nur noch mit einer gewissen rationalen Function von s und z zu

*) Vergl. *Weber,* Ueber *Abel*sche Functionen vom Geschlecht 3, § 18.

multipliciren. Wir construiren jedoch die Function nach der Vorschrift des § 2, weil die erste Art wesentliche Vereinfachungen nicht zu bieten scheint.

Die Doppelpunkte der Functionen $ab(s,z)$, $ab_1(s,z)$, $ab_2(s,z)$, die mit $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$; $\varepsilon_1^{(1)}$, $\varepsilon_1^{(2)}$; $\varepsilon_2^{(1)}$, $\varepsilon_2^{(2)}$ früher bezeichnet wurden, mögen hier der Reihe nach auch noch durch

$$\mathfrak{s}_1,\ \mathfrak{z}_1;\quad \mathfrak{s}_2,\ \mathfrak{z}_2;\quad \mathfrak{s}_3,\ \mathfrak{z}_3;\quad \mathfrak{s}_4,\ \mathfrak{z}_4;\quad \mathfrak{s}_5,\ \mathfrak{z}_5;\quad \mathfrak{s}_6,\ \mathfrak{z}_6$$

wiedergegeben werden, und die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & \mathfrak{z}_1, & \mathfrak{z}_1^2, & \mathfrak{s}_1, & \mathfrak{s}_1\mathfrak{z}_1, & \mathfrak{s}_1^2 \\ 1, & \mathfrak{z}_2, & \mathfrak{z}_2^2, & \mathfrak{s}_2, & \mathfrak{s}_2\mathfrak{z}_2, & \mathfrak{s}_2^2 \\ 1, & \mathfrak{z}_3, & \mathfrak{z}_3^2, & \mathfrak{s}_3, & \mathfrak{s}_3\mathfrak{z}_3, & \mathfrak{s}_3^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \mathfrak{z}_6, & \mathfrak{z}_6^2, & \mathfrak{s}_6, & \mathfrak{s}_6\mathfrak{z}_6, & \mathfrak{s}_6^2 \end{vmatrix}$$

mag durch den Buchstaben E repräsentirt werden. Ersetzt man in dieser Determinante die Terme der ν^{ten} Verticalreihe durch Functionen $w(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{z}_1)$, $w(\mathfrak{s}_2, \mathfrak{z}_2)$, ... $w(\mathfrak{s}_6, \mathfrak{z}_6)$, so soll sie durch $E_\nu(w(\mathfrak{s}, \mathfrak{z}))$ bezeichnet werden, so dass z. B. $E_3(\chi(\sigma, \zeta;\ \mathfrak{s}, \mathfrak{z}))$ oder kürzer $E_3(\chi(\mathfrak{s}, \mathfrak{z}))$ gleich

$$\begin{vmatrix} 1, & \mathfrak{z}_1, & \chi(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{z}_1), & \mathfrak{s}_1, & \mathfrak{s}_1\mathfrak{z}_1, & \mathfrak{s}_1^2 \\ 1, & \mathfrak{z}_2, & \chi(\mathfrak{s}_2, \mathfrak{z}_2), & \mathfrak{s}_2, & \mathfrak{s}_2\mathfrak{z}_2, & \mathfrak{s}_2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \mathfrak{z}_6, & \chi(\mathfrak{s}_6, \mathfrak{z}_6), & \mathfrak{s}_6, & \mathfrak{s}_6\mathfrak{z}_6, & \mathfrak{s}_6^2 \end{vmatrix}$$

ist. — Werden aber in E die Terme der ν^{ten} Zeile, also $1, \mathfrak{z}_\nu, \mathfrak{z}_\nu^2, \mathfrak{s}_\nu, \mathfrak{s}_\nu\mathfrak{z}_\nu, \mathfrak{s}_\nu^2$ bez. durch $1, \zeta, \zeta^2, \sigma, \sigma\zeta, \sigma^2$ ersetzt, so soll die neue Determinante durch $E^{(\nu)}(\sigma, \zeta)$ dargestellt werden. Nun setzten wir unter (5.)

$$\sqrt{\psi} = f(\sigma, \zeta;\ s, z) : (\zeta - z)\,ab(s, z)\sqrt{ab_1(s, z)\,ab_2(s, z)},$$

worin die Charakteristik von $\sqrt{ab_1 . ab_2}$ mit der von $\sqrt{\psi}$ übereinstimmen muss, geben aber jetzt dem Zähler die Form

$$(20.)\quad \begin{cases} f(\sigma, \zeta;\ s, z) = \chi(\sigma, \zeta;\ s, z) + (z - \zeta)\,G(\sigma, \zeta;\ s, z), \\ G(\sigma, \zeta;\ s, z) = m_1 + m_2 z + m_3 z^2 + m_4 s + m_5 s z + m_6 s^2, \end{cases}$$

worin die m_1, m_2, ... m_6 dadurch bestimmt sind, dass f in den Punkten $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, ... $\varepsilon_2^{(2)}$ verschwinden muss. Diese Bedingung ergiebt

$$m_1 = \frac{1}{E} E_1\left(\frac{\chi(\mathfrak{s},\mathfrak{z})}{\zeta-\mathfrak{z}}\right),\quad m_2 = \frac{1}{E} E_2\left(\frac{\chi(\mathfrak{s},\mathfrak{z})}{\zeta-\mathfrak{z}}\right),\quad \dots\quad m_6 = \frac{1}{E} E_6\left(\frac{\chi(\mathfrak{s},\mathfrak{z})}{\zeta-\mathfrak{z}}\right).$$

Eine etwas modificirte Gestalt erhält die Function G, wenn man das sammelt, was mit

$$\chi(\mathfrak{s}_\nu,\mathfrak{z}_\nu):(\zeta-\mathfrak{z}_\nu) = \chi(\sigma,\zeta;\ \mathfrak{s}_\nu,\mathfrak{z}_\nu):(\zeta-\mathfrak{z}_\nu)$$

multiplicirt ist, nämlich die Gestalt

$$(21.)\qquad G(\sigma,\zeta;\ s,z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=6} \frac{\chi(\sigma,\zeta;\ \mathfrak{s}_\nu,\mathfrak{z}_\nu)}{\zeta-\mathfrak{z}_\nu}\cdot\frac{E^{(\nu)}(s,z)}{E},$$

aus welcher sogleich hervorgeht, dass

$$(22.)\qquad \lim_{\zeta-\mathfrak{z}_\lambda}(\zeta-\mathfrak{z}_\lambda)\,G(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta) = F_1(\mathfrak{s}_\lambda,\mathfrak{z}_\lambda)$$

wird, was für das Folgende wichtig ist.

Evident sind die Gleichungen

$$f(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta) = F_1(\sigma,\zeta),\quad f'(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta) = \chi'(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)+G(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta),$$

$$\frac{f'(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}{f(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)} = \frac{\chi'(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}{\chi(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}+\frac{G(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}{F_1(\sigma,\zeta)}.$$

§ 8.

Die ganze Function

$$H(\sigma,\zeta) = G(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)-\tfrac{1}{2}F_1(\sigma,\zeta)\frac{d\lg ab(\sigma,\zeta)ab_1(\sigma,\zeta)ab_2(\sigma,\zeta)}{d\zeta}.$$

Wir sahen im § 7, dass $G(\sigma,\zeta;\sigma,\zeta)$ im Punkte $\mathfrak{s}_\lambda$, $\mathfrak{z}_\lambda$ wie $F_1(\sigma,\zeta):(\zeta-\mathfrak{z}_\lambda)$ unendlich gross wird, und da dort die Entwickelung des Productes $ab.ab_1.ab_2$ nach Potenzen von $\zeta-\mathfrak{z}_\lambda$ mit $(\zeta-\mathfrak{z}_\lambda)^2$ beginnt, so wird der halbe logarithmische Differentialquotient wie $1:(\zeta-\mathfrak{z}_\lambda)$ unendlich gross, also bleibt dort $H(\sigma,\zeta)$ endlich. In den übrigen über $\mathfrak{z}_\lambda$ liegenden Punkten der Fläche T wird G nicht unendlich gross, weil $\chi(\sigma,\zeta;\ \mathfrak{s}_\lambda,\mathfrak{z}_\lambda)$ seiner Construction nach dort verschwindet. Für andere endliche Werthe von σ und ζ aber bleibt $H(\sigma,\zeta)$ offenbar endlich, und ist also eine ganze Function und zwar vom zweiten Grade, deren quadratischer Theil sich durch die Coefficienten in F vollständig ausdrücken lässt, was in diesem Paragraphen geschehen soll.

Weil $ab.ab_1.ab_2$ für wachsende ζ unendlich gross in der dritten Ordnung wird, so wird $\frac{1}{2}d\lg(ab.ab_1.ab_2):d\zeta$ in jedem unendlich fernen Punkte unendlich klein wie $3:2\zeta$ und $F_1(\sigma,\zeta)d\lg(ab.ab_1.ab_2):2d\zeta$ unendlich gross wie $3F_1(\sigma,\zeta):2\zeta$. Um aber $G(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)$ in Bezug auf sein Anwachsen in's Unendliche näher zu untersuchen, ersetzen wir in m_ν die Grösse

$\chi(\mathfrak{s}, \mathfrak{z}) : (\zeta - \mathfrak{z})$ durch

$$\frac{\chi(\mathfrak{s}, \mathfrak{z})}{\zeta} + \frac{\chi(\mathfrak{s}, \mathfrak{z})\cdot\mathfrak{z}}{\zeta^2} + \frac{\chi(\mathfrak{s}, \mathfrak{z})\cdot\mathfrak{z}^2}{\zeta^3} + \frac{\chi(\mathfrak{s}, \mathfrak{z})\cdot\mathfrak{z}^3}{\zeta^3(\zeta-\mathfrak{z})},$$

und lassen m_ν bez. in n_ν, n'_ν, n''_ν, n'''_ν übergehen, wenn für $\chi(\mathfrak{s}, \mathfrak{z}) : (\zeta-\mathfrak{z})$, $\chi : \zeta$, $\mathfrak{z}\cdot\chi : \zeta^2$, $\mathfrak{z}^2\cdot\chi : \zeta^3$, $\mathfrak{z}^3\cdot\chi : \zeta^3(\zeta-\mathfrak{z})$ substituirt wird, so dass

$$m_\nu = n_\nu + n'_\nu + n''_\nu + n'''_\nu$$

ist. Zur Abkürzung mag noch für den Augenblick

$$a_0 s^3 + a_1(z)s^2 + a_2(z)s + a_3(z) = A(s, z),$$
$$(a_0\mathfrak{s}^3 + a_0\mathfrak{s}^2 + a_1(\zeta)\mathfrak{s}^2)\mathfrak{z} = B$$

gesetzt werden. Alsdann findet man durch Anwendung des Satzes, dass eine Determinante identisch verschwindet, wenn die entsprechenden Terme zweier Reihen einander gleich sind, die Gleichungen

$$n_1 + n_2\zeta + n_3\zeta^2 + n_4\sigma + n_5\sigma\zeta + n_6\sigma^2$$
$$= \frac{E_1(a_0\mathfrak{s}^3)}{E.\zeta} + \frac{E_2(a_0\mathfrak{s}^3)}{E} + \frac{E_3(a_0\mathfrak{s}^3)\zeta}{E} + \frac{E_4(a_0\mathfrak{s}^3)\sigma}{E.\zeta} + \frac{E_5(a_0\mathfrak{s}^3)\sigma}{E} + \frac{E_6(a_0\mathfrak{s}^3)\sigma^2}{E.\zeta}$$
$$+ \frac{A(\sigma, \zeta)}{\zeta} \qquad + \frac{A(\sigma, \zeta) - a_3(\zeta)}{\zeta} \qquad + \frac{a_0\sigma^3 + a_1(\zeta)\sigma^2}{\zeta},$$

$$n'_1 = \frac{E_1(B)}{E.\zeta^2}, \quad n'_2.\zeta = \frac{E_2(B)}{E.\zeta} + \frac{A(\sigma, \zeta)}{\zeta}, \quad n'_3.\zeta^2 = \frac{E_3(B)}{E},$$

$$n'_4.\sigma = \frac{E_4(B).\sigma}{E.\zeta^2}, \quad n'_5.\sigma\zeta = \frac{E_5(B).\sigma}{E.\zeta} + \frac{A(\sigma, \zeta) - a_3(\zeta)}{\zeta}, \quad n'_6.\sigma^2 = \frac{E_6(B).\sigma^2}{E.\zeta^2},$$

$$n''_1 = \frac{E_1(\chi\cdot\mathfrak{z}^2)}{E.\zeta^3}, \quad n''_2.\zeta = \frac{E_2(\chi\cdot\mathfrak{z}^2)}{E.\zeta^2}, \quad n''_3.\zeta^2 = \frac{E_3(A(\mathfrak{s}, \zeta)\mathfrak{z}^2)}{E.\zeta} + \frac{A(\sigma, \zeta)}{\zeta^3},$$

$$n''_4.\sigma = \frac{E_4(\chi\cdot\mathfrak{z}^2).\sigma}{E.\zeta^3}, \quad n''_5.\sigma\zeta = \frac{E_5(\chi\cdot\mathfrak{z}^2).\sigma}{E.\zeta^2}, \quad n''_6.\sigma^2 = \frac{E_6(\chi\cdot\mathfrak{z}^2).\sigma^2}{E.\zeta^3}.$$

Wir wünschen nun in $G(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta)$ den Theil kennen zu lernen, der unendlich gross zweiter Ordnung wird, und wollen deshalb ad hoc das Zeichen $\cong$ für eine Gleichheit einführen, welche sich auf solche Theile bezieht, die mit ζ unendlich gross zweiter Ordnung werden, während die Glieder erster oder niederer Ordnung beliebig differiren können. Dann ist, wie man leicht sieht:

$$n_1 + n_2\zeta + n_3\zeta^2 + n_4\sigma + n_5\sigma\zeta + n_6\sigma^2 \cong \frac{2A(\sigma, \zeta) - a_2(\zeta)\sigma - 2a_3(\zeta)}{\zeta},$$

$$n'_1 + n'_2\zeta + n'_3\zeta^2 + n'_4\sigma + n'_5\sigma\zeta + n'_6\sigma^2 \cong \frac{3A(\sigma, \zeta) - 2a_3(\zeta)}{\zeta},$$

$$n''_1 + n''_2\zeta + n''_3\zeta^2 + n''_4\sigma + n''_5\sigma\zeta + n''_6\sigma^2 \cong \frac{A(\sigma, \zeta)}{\zeta},$$

$$n'''_1 + n'''_2\zeta + n'''_3\zeta^2 + n'''_4\sigma + n'''_5\sigma\zeta + n'''_6\sigma^2 \cong 0,$$

und mithin

$$G(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta) \cong \frac{6a_0\sigma^3+6a_1(\zeta)\sigma^2+5a_2(\zeta)\sigma+3a_3(\zeta)}{\zeta},$$

$$\tfrac{1}{2}F_1(\sigma,\zeta)\frac{d\lg ab(\sigma,\zeta)ab_1(\sigma,\zeta)ab_2(\sigma,\zeta)}{d\zeta} \cong \tfrac{3}{2}\frac{F_1(\sigma,\zeta)}{\zeta},$$

$$\tfrac{3}{2}\frac{F_1(\sigma,\zeta)}{\zeta} \cong 6a_0\sigma^3+\tfrac{1}{2}9a_1(\zeta)\sigma^2+3a_2(\zeta)\sigma+\tfrac{3}{2}a_3(\zeta),$$

und also

$$H(\sigma,\zeta) \cong \frac{3a_1\sigma^2+4a_2(\zeta)\sigma+3a_3(\zeta)}{2\zeta} \cong \tfrac{1}{2}F_{12}(\sigma,\zeta).$$

Da nun H eine ganze Function ist, und also hierdurch bis auf eine Function φ, der wir die Formen

$$d_0+d_1\sigma+d_2\zeta = 2c_1\varphi_1(\sigma,\zeta)+2c_2\varphi_2(\sigma,\zeta)+2c_3\varphi_3(\sigma,\zeta)$$

geben können, bestimmt ist, so ergiebt sich die Gleichung

$$(23.)\qquad H(\sigma,\zeta) = \tfrac{1}{2}F_{12}(\sigma,\zeta)+2\Sigma c_\mu\varphi_\mu(\sigma,\zeta).$$

§ 9.

Resultat.

Um von einem System *halber* Periodicitätsmoduln frei zu werden, multipliciren wir die Gleichung (13.) mit 2, nehmen aber die Congruenz nach einem gewöhnlichen Systeme ganzer Periodicitätsmoduln des Integrales $t(\sigma,\zeta;\ s,z)$ und geben ihr so die Form

$$\frac{2d\lg\vartheta((u(\sigma,\zeta)-\Sigma u(s_\mu,z_\mu)))}{d\zeta} \equiv \Sigma 2t(\sigma,\zeta;\ s_\mu,z_\mu)-\Sigma 2t(\sigma,\zeta;\ s_{\mu,\zeta},z_{\mu,\zeta})$$

$$\equiv \Sigma 2t(\sigma,\zeta;\ s_\mu,z_\mu)-\frac{2F_1(\sigma,\zeta)}{\chi(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}\sum_{(k)}\frac{\partial u_\nu(\sigma,\zeta)}{\partial k}\frac{\chi(\sigma,\zeta;\ k)}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)}-\sum_{\varphi^{(0)}=0}t(\sigma,\zeta;\ s,z)$$

$$-\frac{2d\lg F_1(\sigma,\zeta)}{d\zeta}+\frac{2\chi'(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}{\chi(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}-\frac{2f'(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}{f(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}+\frac{d\lg ab(\sigma,\zeta)ab_1(\sigma,\zeta)ab_2(\sigma,\zeta)\varphi^{(0)}(\sigma,\zeta)}{d\zeta}.$$

Für unseren vorliegenden Fall dividiren wir wieder mit 2, rechnen aber in die Grössen c_1, c_2, c_3 ein additives System ganzer Multipla von $\frac{1}{2}$, etwa $\frac{1}{2}h_1$, $\frac{1}{2}h_2$, $\frac{1}{2}h_3$ ein, was möglich ist, weil $2\varphi_1(\sigma,\zeta):F_1(\sigma,\zeta)$, $2\varphi_2(\sigma,\zeta):F_1(\sigma,\zeta)$, $2\varphi_3(\sigma,\zeta):F_1(\sigma,\zeta)$ die Periodicitätsmoduln von $t(\sigma,\zeta;\ s,z)$ sind, und gelangen so mit Rücksicht auf die Beziehung (19.) des § 6 zu der Congruenz

$$(24.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\lg\vartheta((u(\sigma,\zeta)-\Sigma u(s_\mu,z_\mu)))}{d\zeta}\\ &\equiv \Sigma t(\sigma,\zeta;\ s_\mu,z_\mu)-\sum_{(k)}\frac{\partial u_\nu(\sigma,\zeta)}{\partial k}\frac{\chi(\sigma,\zeta;\ k)}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)}-\frac{d\lg F_1(\sigma,\zeta)}{d\zeta}\\ &\qquad -\frac{\frac{1}{2}F_{12}(\sigma,\zeta)}{F_1(\sigma,\zeta)}-2\Sigma c_\mu\frac{du_\mu(\sigma,\zeta)}{d\zeta},\end{aligned}\right.$$

und es sind die Grössen c_1, c_2, c_3 von σ, ζ; s_1, z_1; s_2, z_2; s_3, z_3 unabhängig.

Die Function $H(\sigma,\zeta)$ des vorigen Paragraphen war eine durch die Punkte ε, $\varepsilon^{(1)}$, ε_1, ... $\varepsilon_2^{(1)}$ völlig gegebene ganze Function von σ,ζ. Mithin sind auch die Grössen c_1, c_2, c_3 als gegebene Functionen der ε anzusehen, die man durch drei Gleichungen der Form

$$H(s,z)-\tfrac{1}{2}F_{12}(s,z) = 2c_1\varphi_1(s,z)+2c_2\varphi_2(s,z)+2c_3\varphi_3(s,z)$$

für drei beliebig gewählte specielle Werthe von s, z darstellen kann, und auch das System von Brüchen, welches in die c eingerechnet wurde, lässt sich durch die Grössen ε darstellen. Die Grössen c aber von den Grössen ε gänzlich zu befreien, ist mir nur auf transcendentem Wege gelungen, der sogleich eingeschlagen werden soll.

Multiplicirt man (24.) mit $d\zeta$ und integrirt von σ_1, ζ_1 bis σ_2, ζ_2, so erhält man bis auf ein Multiplum von $2i\pi$, welches wir in den Logarithmus einrechnen, die Congruenz oder, wenn man in die c noch ein additives System von ganzen Zahlen aufnimmt, die Gleichung

$$(25.)\quad \begin{cases} \lg\vartheta((u(\sigma_2,\zeta_2)-\Sigma u(s_\mu,z_\mu)))-\lg\vartheta((u(\sigma_1,\zeta_1)-\Sigma u(s_\mu,z_\mu))) \\ \quad =\Sigma\int_{\sigma_1,\zeta_1}^{\sigma_2,\zeta_2} t(\sigma,\zeta;\ s_\mu,z_\mu)\,d\zeta-\sum_{(k)}\int_{\sigma_1,\zeta_1}^{\sigma_2,\zeta_2}\frac{\partial u_\nu(\sigma,\zeta)}{\partial k}\,\frac{\chi(\sigma,\zeta;\ k)\,d\zeta}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)} \\ -\tfrac{1}{2}\int_{\sigma_1,\zeta_1}^{\sigma_2,\zeta_2}\frac{F_{12}(\sigma,\zeta)\,d\zeta}{F_1(\sigma,\zeta)}-\lg\frac{F_1(\sigma_2,\zeta_2)}{F_1(\sigma_1,\zeta_1)}-2\Sigma c_\mu(u_\mu(\sigma_2,\zeta_2)-u_\mu(\sigma_1,\zeta_1)). \end{cases}$$

Wählt man nun für σ_2, ζ_2 einen Punkt auf dem einen Ufer von a_ν, und für σ_1,ζ_1 den ihm auf dem anderen Ufer benachbarten Punkt, oder, was dasselbe ist, führt man die Integration über den Schnitt b_ν aus, so wird die linke Seite ein ganzes Multiplum von $2i\pi$, etwa $2\lambda_\nu i\pi$, ebenso wird $\lg(F_1(\sigma_1,\zeta_1):F_1(\sigma_1,\zeta_1))=\lg 1$ ein ganzes Multiplum von $2i\pi$, etwa $2\lambda'_\nu i\pi$, und man findet daher aus der Gleichung

$$(26.)\quad \begin{cases} 2c_\nu i\pi+2(\lambda_\nu+\lambda'_\nu)i\pi \\ =\Sigma\int_{b_\nu} t(\sigma,\zeta;\ s_\mu,z_\mu)\,d\zeta-\int_{b_\nu}\Big(\sum_{(k)}\frac{\partial u_\nu(\sigma,\zeta)}{\partial k}\,\frac{\chi(\sigma,\zeta;\ k)}{(\zeta-k)\,\varphi_\nu(k)}+\tfrac{1}{2}\frac{F_{12}(\sigma,\zeta)}{F_1(\sigma,\zeta)}\Big)d\zeta \end{cases}$$

c_ν ausgedrückt durch bestimmte Integrale, abgesehen von einer ganzen Zahl, welche der Natur der Sache nach unbestimmt bleibt.

§ 10.

Partielle Differentialquotienten der Thetafunctionen.

Soll ein Integral zweiter Gattung, welches an den Schnitten a stetig ist, in drei Punkten unendlich gross werden, so enthält es drei willkürliche Constante, welche so eingerichtet werden können, dass das Integral noch an zwei Schnitten a stetig ist, und am dritten einen willkürlich gegebenen Periodicitätsmodul erhält. Solche Integrale sind partielle logarithmische Differentialquotienten der Thetafunctionen, und wir wollen dieselben noch darstellen.

Es seien $\sigma_2, \zeta_2; \sigma_3, \zeta_3$ die den Punkten $s_2, z_2; s_3, z_3$ durch die Gleichung $\varphi^{(2,3)}(s, z) = 0$ verknüpften Punkte, und es werde s, z für $s_1, z_1; \sigma_1, \zeta_1$ für σ, ζ gesetzt, so folgt (siehe Gl. (2.) § 2)

$$(27.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lg\vartheta((\Sigma u(\sigma_\mu, \zeta_\mu)-u(s, z)))}{d\zeta_1} \\ \qquad \equiv t(\sigma_1, \zeta_1; s, z)-R^{(1)}-P(\sigma_1, \zeta_1)-2\Sigma c_\mu \dfrac{du_\mu(\sigma_1, \zeta_1)}{d\zeta_1}, \\ R^{(1)} = t(\sigma_1, \zeta_1;\ \sigma_2, \zeta_2)+t(\sigma_1, \zeta_1;\ \sigma_3, \zeta_3)-\dfrac{d\lg\varphi^{(2,3)}(\sigma_1, \zeta_1)}{d\zeta_1}, \\ P(\sigma_1, \zeta_1) = \sum\limits_{(k)} \dfrac{\partial u_\nu(\sigma_1, \zeta_1)}{\partial k}\,\dfrac{\chi(\sigma_1, \zeta_1;\ k)}{(\zeta_1-k)\varphi_\nu(k)}+\dfrac{d\lg F_1(\sigma_1, \zeta_1)}{d\zeta_1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{F_{12}(\sigma_1, \zeta_1)}{F_1(\sigma_1, \zeta_1)}. \end{cases}$$

Zwei analoge Gleichungen erhalten wir, wenn wir σ_1, ζ_1 bez. mit σ_2, ζ_2; σ_3, ζ_3 vertauschen. Schreiben wir

$$((v)) \quad \text{für} \quad ((\Sigma u(\sigma_\mu, \zeta_\mu)-u(s, z)))$$

und

$$\Sigma \frac{\partial\lg\vartheta((v))}{\partial v_\mu}\,\frac{\varphi_\mu(\sigma_\nu, \zeta_\nu)}{F_1(\sigma_\nu, \zeta_\nu)} \quad \text{für} \quad \frac{d\lg\vartheta((v))}{d\zeta_\nu},$$

so liefern die drei Gleichungen das Resultat

$$(28.)\quad \frac{\partial\lg\vartheta((v))}{\partial v_\nu} \equiv \Sigma \frac{\delta\lg\left|\frac{du}{d\zeta}\right|}{\delta\frac{du_\nu}{d\zeta_\mu}}(t(\sigma_\mu, \zeta_\mu;\ s, z)-R^{(\mu)}-P(\sigma_\mu, \zeta_\mu))+2c_\nu,$$

worin $\left|\frac{du}{d\zeta}\right|$ die aus

$$\begin{matrix} \dfrac{du_1(\sigma_1, \zeta_1)}{d\zeta_1}, & \dfrac{du_2(\sigma_1, \zeta_1)}{d\zeta_1}, & \dfrac{du_3(\sigma_1, \zeta_1)}{d\zeta_1}, \\ \dfrac{du_1(\sigma_2, \zeta_2)}{d\zeta_2}, & \dfrac{du_2(\sigma_2, \zeta_2)}{d\zeta_2}, & \dfrac{du_3(\sigma_2, \zeta_2)}{d\zeta_2}, \\ \dfrac{du_1(\sigma_3, \zeta_3)}{d\zeta_3}, & \dfrac{du_2(\sigma_3, \zeta_3)}{d\zeta_3}, & \dfrac{du_3(\sigma_3, \zeta_3)}{d\zeta_3}, \end{matrix}$$

gebildete Determinante und δ eine *formale* Differentiation bedeutet.

Der Theil von $\partial \log \vartheta((v)):\partial v_\nu$, der von s, z allein abhängt, lässt sich, so wie er in (28.) enthalten ist, ohne Weiteres aus der Periodicität der Function hinschreiben. Schwierigkeiten macht allein der von s, z unabhängige Theil. Da die Thetafunction wie von s, z ganz ähnlich von $\sigma_1, \zeta_1;\ \sigma_2, \zeta_2;\ \sigma_3, \zeta_3$ abhängt, indem nur für die letzteren Variabeln die Punkte Unendlich durch Functionen φ zu bestimmen sind, so lässt sich die gegebene Form dieses Theiles vielleicht noch in andere Gestalt bringen, wovon wir jedoch hier abstehen.

Die Untersuchung hätte sich ebenso durchführen lassen, wenn $a_0 = 0$, also T nur dreiblättrig angenommen worden wäre. Für die Function χ wäre dann der Ausdruck

$$a_1(\zeta)(s^2+s\sigma+\sigma^2)+a_2(\zeta)(s+\sigma)+a_3(\zeta)+\mathfrak{b}_1(z-\zeta)s^2$$

mit Vortheil angewandt worden. Uebrigens lässt sich auch für ein beliebiges p wie hier das Resultat (13.) durch bestimmte Integrale von den algebraischen Grössen $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots$ befreien.

Jena, October 1882.

Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen II.

(Von Herrn *Otto Rausenberger* in Frankfurt a. M.)

In meiner Abhandlung „Theorie der allgemeinen Periodicität" im 18. Bande der Mathematischen Annalen basirte ich die naturgemässe Einführung der periodischen Functionen auf eine algebraische Analogie. Sowie die *Abel*schen Gleichungen, deren Wurzeln sich aus einer einzigen durch die Iterirungen einer oder zweier vertauschbaren linearen Substitutionen herleiten lassen, algebraisch lösbar sind, so liess es sich vermuthen, dass transcendente Functionen, die bei ebensolchen Substitutionen unverändert bleiben, unter gewissen, sich leicht ergebenden Einschränkungen algebraisch (im weitesten Sinne) umkehrbar sind. Diese Umkehrungen werden sich im Allgemeinen durch unendlich viele Wurzelgrössen mit theilweise unendlich hohen Exponenten darstellen lassen. In der That ist ein solcher Ausdruck für die Umkehrung der Exponentialfunction allbekannt; aus $e^x = \left(1+\frac{x}{\omega}\right)^\omega$, $\omega = \infty$, folgt nämlich $\log x = \omega(x^{\frac{1}{\omega}}-1)$. Weit grössere Schwierigkeiten stellen sich der Durchführung dieser Methode bei den multiplicatorisch periodischen, resp. elliptischen Functionen entgegen. Die Resultate, zu denen ich nach mannigfachen Versuchen gelangt bin, befriedigen schon deshalb nicht vollkommen, weil gerade diejenige Methode, welche der Auflösungsart der *Abel*schen Gleichungen vollständig nachgebildet ist, sich nicht mit ganz elementaren Hülfsmitteln durchführen liess. Immerhin glaube ich jedoch, dass die folgenden Entwickelungen schon wegen ihrer eigenthümlichen Form von Interesse sein werden.

§ 1.

Die erste hier zu behandelnde Methode der Umkehrung der multiplicatorisch periodischen Functionen steht in keiner directen Beziehung

zu den *Abel*schen Gleichungen, zeichnet sich jedoch durch ihren völlig elementaren Charakter aus; die Potenzreihen für $\mathrm{S}^k(p, x)$ nämlich, welche bei derselben verwandt werden und die ich der Kürze wegen den *Jacobi*-schen Untersuchungen (Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum p. 115 ff.; Gesammelte Werke, Vol. I, p. 170 ff.) entnehme, lassen sich auch ganz elementar mittelst Methoden entwickeln, auf die ich bei späterer Gelegenheit zurückzukommen gedenke*).

1. Es ist, wenn α eine n^{te} Einheitswurzel, n eine ins Unendliche wachsende Primzahl bedeutet und

$$\text{mod.}\,p^{\frac{1}{2}} < \text{mod.}\,x < \text{mod.}\,\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}$$

ist, in Folge der als bekannt anzusehenden Entwickelung

$$\mathrm{S}(p, x) = -\frac{2i}{\eta_2^2}\Sigma\frac{p^{\frac{2n+1}{2}}}{1-p^{2n+1}}\left(x^{2n+1}-\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

$$\varphi(x) = \mathrm{S}(p, x)+\frac{1}{\alpha}\mathrm{S}(p, \alpha x)+\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{S}(p, \alpha^2 x)+\cdots+\frac{1}{\alpha^{n-1}}\mathrm{S}(p, \alpha^{n-1}x)$$

$$= -\frac{2i}{\eta_2^2}\Sigma\frac{1}{\alpha^k}\left\{\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p}\left(x\alpha^k-\frac{1}{x\alpha^k}\right)+\frac{p^{\frac{3}{2}}}{1-p^3}\left(x^3\alpha^{3k}-\frac{1}{x^3\alpha^{3k}}\right)+\cdots\right\}$$

$$= -\frac{2i}{\eta_2^2}\left\{\frac{np^{\frac{1}{2}}}{1-p}x+\frac{p^{\frac{3}{2}}}{1-p^3}x^3\Sigma\alpha^{2k}+\frac{p^{\frac{5}{2}}}{1-p^5}x^5\Sigma\alpha^{4k}+\cdots\right.$$

$$\left.-\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p}\frac{1}{x}\Sigma\frac{1}{\alpha^{2k}}-\frac{p^{\frac{3}{2}}}{1-p^3}\frac{1}{x^3}\Sigma\frac{1}{\alpha^{4k}}-\cdots\right\}. \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Unter Berücksichtigung, dass

$$\Sigma\alpha^{2rk} = 0$$

wird, wenn nicht r ein Vielfaches von n ist, und dass Letzteres nur bei verschwindend kleinen Gliedern vorkommt, gelangen wir zu dem Resultat

$$\varphi(x) = -\frac{2in}{\eta_2^2}\cdot\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p}x$$

oder

$$(1.)\qquad x = \frac{i(1-p)}{2np^{\frac{1}{2}}}\eta_2^2\left\{\mathrm{S}(p, x)+\frac{1}{\alpha}\mathrm{S}(p, \alpha x)+\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{S}(p, \alpha^2 x)+\cdots+\frac{1}{\alpha^{n-1}}\mathrm{S}(p, \alpha^{n-1}x)\right\}.$$

*) Man erkennt leicht, dass die folgenden Untersuchungen auch mit Hülfe bekannter Formeln aus der Theorie der complexen Integrale durchgeführt werden könnten (vgl. den Schluss des Paragraphen); doch ziehe ich die angewandte Behandlungsweise wegen ihres rein algebraischen Charakters vor.

Ebenso erhalten wir

$$(2.)\quad \begin{cases} \frac{1}{x} = -\frac{i(1-p)}{2np^{\frac{1}{4}}}\eta_2^2\Big\{S(p,x)+\frac{1}{\alpha}S\Big(p,\frac{x}{\alpha}\Big)+\frac{1}{\alpha^2}S\Big(p,\frac{x}{\alpha^2}\Big)+\cdots \\ \qquad\qquad\cdots+\frac{1}{\alpha^{n-1}}S\Big(p,\frac{x}{\alpha^{n-1}}\Big)\Big\} \end{cases}$$

und durch Addition von (1.) und (2.) die am leichtesten zu entwickelnde Reihe

$$(3.)\quad \begin{cases} x+\frac{1}{x} = \frac{i(1-p)}{2np^{\frac{1}{4}}}\eta_2^2\Big\{\frac{1}{\alpha}\Big[S(p,\alpha x)-S\Big(p,\frac{x}{\alpha}\Big)\Big] \\ +\frac{1}{\alpha^2}\Big[S(p,\alpha^2 x)-S\Big(p,\frac{x}{\alpha^2}\Big)\Big]+\cdots+\frac{1}{\alpha^{n-1}}\Big[S(p,\alpha^{n-1}x)-S\Big(p,\frac{x}{\alpha^{n-1}}\Big)\Big]\Big\}. \end{cases}$$

Um auf der rechten Seite dieser Gleichung $w = S(p,x)$ statt x einzuführen, bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} S(p,\alpha^k x)-S\Big(p,\frac{x}{\alpha^k}\Big) &= 2C(p,x)D(p,x)\frac{S(p,\alpha^k)}{1-\varkappa^2S^2(p,\alpha^k)S^2(p,x)} \\ &= 2\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2w^2)}\cdot\frac{S(p,\alpha^k)}{1-\varkappa^2S^2(p,\alpha^k)w^2} \end{aligned}$$

ist. Der Bruch auf der rechten Seite lässt sich in eine nach Potenzen von w^2 fortschreitende Reihe entwickeln, wenn

$$\text{mod.}[\varkappa^2S^2(p,\alpha^k)w^2] < 1$$

ist; es handelt sich daher um die Auffindung des grösstmöglichen Werthes, den $\text{mod.}[\varkappa^2S^2(p,\alpha^k)w^2]$ für irgend ein k erreichen kann. Es ist

$$\text{mod.}[\varkappa^2S^2(p,\alpha^k)] = \text{mod.}\Big[\frac{\eta_2^2}{\eta_3^2}\,\frac{\eta_1^2(p,\alpha^k)}{\eta_0^2(p,\alpha^k)}\Big].$$

Berücksichtigen wir nun die bekannten Sätze, dass der Modul eines Products oder eines Quotienten gleich dem Product oder Quotienten der Moduln der einzelnen Grössen, der Modul einer Summe zweier Grössen dagegen grösser als die Differenz, aber kleiner als die Summe der Moduln der einzelnen Grössen ist, so ergeben sich leicht die folgenden Relationen, in denen wir $\text{mod.}p = r$ setzen:

$$\begin{aligned} \text{mod.}\eta_1(p,\alpha^k) &= \text{mod.}\Big[\frac{ip^{\frac{1}{4}}}{\alpha^k}(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\ldots \\ &\qquad\ldots(1-\alpha^{2k})(1-p\,\alpha^{2k})(1-p^4\alpha^{2k})\ldots\Big(1-\frac{p^2}{\alpha^{2k}}\Big)\Big(1-\frac{p^4}{\alpha^{2k}}\Big)\cdots\Big] \\ &\leqq \text{mod.}[2p^{\frac{1}{4}}(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\ldots][1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots]^2 \\ &\leqq \frac{\text{mod.}[2p^{\frac{1}{4}}(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\ldots]}{2r^{\frac{1}{4}}(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\ldots}\eta_2(r,1) \\ &\leqq \frac{\text{mod.}[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\ldots]}{(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\ldots}\eta_2(r,1) \end{aligned}$$

und

$$\text{mod.}\,\eta_0(p,\alpha^k) \geqq \text{mod.}\,[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\dots][(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\dots]^2$$
$$\geqq \frac{\text{mod.}[(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\dots]}{(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\dots}\eta_0(r,1).$$

Hieraus folgt das einfache Resultat:

$$\text{mod.}[\varkappa^2 S^2(p,\alpha^k)] \leqq \text{mod.}\left[\frac{\eta_2^2(p,1)}{\eta_3^2(p,1)}\right]\cdot\frac{\eta_2^2(r,1)}{\eta_0^2(r,1)};$$

jene Potenzreihe convergirt also für beliebige k, wenn

$$\text{mod.}\,w < \text{mod.}\left[\frac{\eta_3^2(p,1)}{\eta_2^2(p,1)}\right]\cdot\frac{\eta_0^2(r,1)}{\eta_2^2(r,1)}$$

ist. Die Reihe lautet:

$$(4.)\quad \begin{cases} S(p,\alpha^k x)-S\left(p,\dfrac{x}{\alpha^k}\right) \\ = 2\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)}\cdot\{S(p,\alpha^k)+S^3(p,\alpha^k)\varkappa^2 w^2+S^5(p,\alpha^k)\varkappa^4 w^4+\cdots\} \end{cases}$$

und somit ist

$$(5.)\quad \begin{cases} x+\dfrac{1}{x} = \dfrac{i(1-p)}{np^{\frac{1}{4}}}\eta_2^2\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)} \\ \quad\cdot\left[\sum\limits_0^{n-1}{}_k\dfrac{S(p,\alpha^k)}{\alpha^k}+\varkappa^2 w^2\sum\limits_0^{n-1}{}_k\dfrac{S^3(p,\alpha^k)}{\alpha^k}+\varkappa^4 w^4\sum\limits_0^{n-1}{}_k\dfrac{S^5(p,\alpha^k)}{\alpha^k}+\cdots\right]. \end{cases}$$

Die zunächst sich ergebende Convergenzbedingung ist auch hier

$$\text{mod.}\,w < \text{mod.}\left[\frac{\eta_3^2(p,1)}{\eta_2^2(p,1)}\right]\cdot\frac{\eta_0^2(r,1)}{\eta_2^2(r,1)},$$

da die Reihe als das arithmetische Mittel von n Reihen der Form (4.) betrachtet werden kann, die alle unter dieser Bedingung convergiren; doch ist es leicht, den Convergenzbereich nach allgemeinen Principien zu erweitern.

Die Ausführung der eingeklammerten Summen wird sehr erleichtert durch folgende bekannte Relation. Ist

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+\frac{a_{-1}}{x}+\frac{a_{-2}}{x^2}+\frac{a_{-3}}{x^3}+\cdots,$$

so ist

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}_k\frac{f(\alpha^k)}{\alpha^k} = \frac{a_0}{n}\sum_0^{n-1}{}_k\frac{1}{\alpha^k}+a_1+\frac{a_2}{n}\sum_0^{n-1}{}_k\alpha^k+\frac{a_3}{n}\sum_0^{n-1}{}_k\alpha^{2k}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{a_{-1}}{n}\sum_0^{n-1}{}_k\frac{1}{\alpha^{2k}}+\frac{a_{-2}}{n}\sum_0^{n-1}{}_k\frac{1}{\alpha^{3k}}+\cdots,$$

also für $n=\infty$

$$(6.)\quad \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}_k\frac{f(\alpha^k)}{\alpha^k} = a_1,$$

da jene Summen (bis auf unendlich entfernte) verschwinden. Die rechte

Seite von (5.) lässt sich also durch endliche Ausdrücke darstellen, wenn man den Coefficienten von x in den Potenzreihen für $S(p, x)$, $S^3(p, x)$, $S^5(p, x)$ u. s. w. kennt. Nach den angeführten *Jacobi*schen Entwickelungen ist aber (nach einigen Umformungen, wenn $\Omega = 2\pi\eta_3^2 = 4K$ gesetzt wird):

$$S(p, x) = -\frac{4i\pi}{\varkappa\Omega}\left\{\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\cdots\right\},$$

$$S^3(p, x) = -i\left(\frac{2\pi}{\varkappa\Omega}\right)^3\left\{(1+\varkappa^2)\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)^2-1\right\}\cdot\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\cdots,$$

$$S^5(p, x) =$$

$$-\frac{i}{12}\left(\frac{2\pi}{\varkappa\Omega}\right)^5\left\{3(3+2\varkappa^2+3\varkappa^4)\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)^4-10(1+\varkappa^2)\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)^2+1\right\}\cdot\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\cdots$$

u. s. w.

Aus (5.) wird daher

$$(7.)\quad \begin{cases} x+\frac{1}{x} = \frac{1}{\varkappa}\cdot\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)}\cdot\left\{\frac{4\pi}{\Omega}+\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^3\left[(1+\varkappa^2)\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)^2-1\right]w^2\right. \\ \left.+\frac{1}{12}\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^5\left[3(3+2\varkappa^2+4\varkappa^4)\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)^4-10(1+\varkappa^2)\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)^2+1\right]w^4+\cdots\right\}, \end{cases}$$

eine Reihe, deren allgemeines Bildungsgesetz recht complicirt ist (vgl. die *Jacobi*sche Untersuchung).

2. Die Formeln (3.) und (5.) lassen sich auch durch bestimmte Integrale darstellen, indem wir

$$\alpha^k = e^{2\pi i\varphi},$$

$$x = e^{\frac{2\pi i u}{\Omega}},$$

somit

$$S(p, \alpha^k x) = \sin\operatorname{am}(u+\Omega\varphi) \quad \text{u. s. w.}$$

setzen. Wir erhalten

$$(8.)\quad \begin{cases} x+\frac{1}{x} = 2\cos\frac{2\pi u}{\Omega} \\ \quad = \frac{i(1-p)\Omega\varkappa}{4\pi p^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 e^{-2\pi i\varphi}[\sin\operatorname{am}(u+\Omega\varphi)-\sin\operatorname{am}(u-\Omega\varphi)]\,d\varphi \end{cases}$$

und

$$(9.)\quad \begin{cases} x+\frac{1}{x} = 2\cos\frac{2\pi u}{\Omega} = \frac{i(1-p)\Omega\varkappa}{2\pi p^{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)} \\ \cdot\left\{\int_0^1 e^{-2\pi i\varphi}\sin\operatorname{am}(\Omega\varphi)\,d\varphi+\varkappa^2 w^2\int_0^1 e^{-2\pi i\varphi}\sin^3\operatorname{am}(\Omega\varphi)\,d\varphi\right. \\ \left.+\varkappa^4 w^4\int_0^1 e^{-2\pi i\varphi}\sin^5\operatorname{am}(\Omega\varphi)\,d\varphi+\cdots\right\}. \end{cases}$$

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass ich auf diese Behandlungsweise des Umkehrungsproblems durch die *Abel*schen Untersuchungen über Division der elliptischen Functionen geführt wurde.

Bevor ich zu einer zweiten Umkehrungsmethode übergehe, die der Lösung der *Abel*schen Gleichungen ganz analog ist, muss ich eine Hülfsuntersuchung einschalten, die wohl auch an sich einiges Interesse bietet.

§ 2.

1) In der ersten Abhandlung gleichen Titels wurden Functionen wie

$$\Phi(x) = \left[\frac{\eta_0(p, \alpha x)}{\eta_0(p, x)}\right]^n,$$

worin jetzt α eine primitive $2n^{\text{te}}$ Einheitswurzel bezeichne, behandelt; durch einen Grenzübergang gelangen wir zu einer Function, welche uns im Folgenden von Nutzen sein wird. Lassen wir nämlich n ins Unendliche wachsen, so kann $\alpha = 1+\frac{\pi i}{n}$ genommen werden, und wir haben unter Beibehaltung der Bezeichnung $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \left[\frac{\eta_0\left(p, \left(1+\frac{\pi i}{n}\right)x\right)}{\eta_0(p, x)}\right]^n = \left[\frac{\eta_0\left(p, \left(1+\frac{\pi i}{n}\right)x\right)-\eta_0(p, x)}{\eta_0(p, x)}+1\right]^n$$

$$= \left[1+\frac{\pi i x}{n}\cdot\frac{\eta_0'(p, x)}{\eta_0(p, x)}\right]^n = \left[1+\frac{2\pi i}{n}\cdot A_0(p, x)\right]^n,$$

wenn wir nämlich

$$A_0(p, x) = \frac{x}{2}\cdot\frac{\eta_0'(p, x)}{\eta_0(p, x)}$$

setzen. Weiter können wir hierfür schreiben

$$\Phi(x) = e^{\pi i x \frac{\eta_0'(p, x)}{\eta_0(p, x)}} = e^{2\pi i A_0(p, x)}.$$

Es wird sich nun darum handeln, diese multiplicatorisch periodische Function durch eine der einfachen Transcendenten dieser Klasse, etwa $\mathrm{S}(p, x)$, auszudrücken. Die Function $A_0(p, x)$, welche der Gleichung

$$A_0(p, px) = A_0(p, x)-1$$

genügt, wird sich dann als Logarithmus einer multiplicatorisch periodischen Function darstellen lassen.

2) Da $\Phi(x)$ nur dann unstetig wird, wenn dies mit

$$\mathrm{S}(p, x) = \frac{\eta_3}{\eta_2}\cdot\frac{\eta_1(p, x)}{\eta_0(p, x)}$$

der Fall ist, so wird ($\arg \mathrm{S}(p, x)$ bezeichne die Umkehrung von $\mathrm{S}(p, x)$)

$$\varphi(x) = e^{2\pi i A_0[p, \arg \mathrm{S}(p, x)]}$$

nur für $x = \infty$ unendlich. Durch die unendliche Vieldeutigkeit von $\arg \mathrm{S}(p, x)$ wird $\varphi(x)$ nicht mehrdeutig gemacht, wohl aber dadurch, dass wegen $\mathrm{S}(p, x) = \mathrm{S}\left(p, -\frac{1}{x}\right)$ der Ausdruck $y = \arg \mathrm{S}(p, x)$ zwei Werthe y_1 und y_2 besitzt, die durch die Relation

$$y_2 = -\frac{1}{y_1}$$

verbunden sind. Da man sich ferner leicht überzeugt, dass

$$A_0\left(p, -\frac{1}{x}\right) = -A_0(p, x)$$

ist, so erkennt man, dass jedem x zwei Werthe von $\varphi(x)$ entsprechen, die zu einander reciprok sind.

3) Bevor wir zur wirklichen Darstellung von $\varphi(x)$ schreiten, leiten wir für dasselbe eine Functionalgleichung her. Aus directen Entwickelungen oder aus dem bekannten Additionstheorem für elliptische Integrale zweiter Gattung ergiebt sich leicht

$$A_0(p, x) + A_0(p, y) = A_0(p, xy) + \frac{\varkappa^2 \Omega}{4\pi i} \mathrm{S}(p, x)\mathrm{S}(p, y)\mathrm{S}(p, xy),$$

oder

$$A_0(p, \arg \mathrm{S}(p, u)) + A_0(p, \arg \mathrm{S}(p, v)) = A_0(p, \arg \mathrm{S}(p, w)) + \frac{\varkappa^2 \Omega}{4\pi i} uvw,$$

wenn

$$w = \frac{u\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)} + v\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2 u^2)}}{1-\varkappa^2 u^2 v^2}$$

gesetzt wird. Hieraus folgt

$$\varphi(w) = \varphi(u)\varphi(v)e^{-\frac{\varkappa^2 \Omega}{2} uvw}.$$

4) Die letzte Relation gestattet uns zu schliessen, dass $\varphi(x)$ keine andere Irrationalität als $\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}$ enthält. Zu demselben Resultat gelangen wir durch einen Grenzübergang, indem wir von Betrachtungen ausgehen, die den in meiner früheren Arbeit gemachten ganz analog sind. Mit Rücksicht darauf, dass $\varphi(x)$ für kein endliches x unendlich wird, dürfen wir daher setzen (die Weglassung der Hälfte der Glieder rechtfertigt sich leicht durch die Bemerkung, dass bei einem Zeichenwechsel von x die beiden Werthe von $\varphi(x)$ nur in einander übergehen können, sowie durch die fol-

gende Entwickelung):

$$\varphi(x) = 1+a_2x^2+a_4x^4+\cdots\pm(b_1x+b_3x^3+b_5x^5+\cdots)\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)};$$

dieser Ausdruck muss für beliebige endliche x convergent sein.

5) Zur wirklichen Berechnung der Coefficienten benutzen wir die bekannte Relation

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \frac{E}{\Omega}w - \frac{1}{\varkappa^2}\cdot\frac{d\log\vartheta_0\left(\frac{2w}{\Omega}\right)}{dw},$$

worin

$$E = \frac{\vartheta_0''\vartheta_0\Omega}{\vartheta_1'^2\varkappa^2}, \quad w = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

gesetzt ist. Wir können hierfür auch schreiben:

$$A_0(p, e^{\frac{2\pi i w}{\Omega}}) = A_0(p, \arg \mathrm{S}(p,x)) = \frac{\varkappa^2\Omega}{4\pi i}\int_0^x \frac{\left(\frac{E}{\Omega}-x^2\right)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

und erhalten

$$\varphi(x) = e^{\frac{\varkappa^2\Omega}{2}\int_0^x \frac{\left(\frac{E}{\Omega}-x^2\right)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}}.$$

Durch Differentiation folgt hieraus

$$\varphi'(x) = \frac{\varkappa^2\Omega}{2}\varphi(x)\frac{\frac{E}{\Omega}-x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}.$$

Setzen wir hierin die obige Reihe ein, so finden wir, dass die Gleichung

$$\begin{aligned} &2a_2x+4a_4x^3+6a_6x^5+\cdots\pm(b_1+3b_3x^2+5b_5x^4+\cdots)\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}\\ &\pm(b_1x+b_3x^3+b_5x^5+\cdots)\cdot\frac{-(1+\varkappa^2)x+2\varkappa^2x^3}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}\\ = &\pm[1+a_2x^2+a_4x^4+\cdots\pm(b_1x+b_3x^3+b_5x^5+\cdots)\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}]\\ &\cdot\frac{\varkappa^2\Omega}{2}\cdot\frac{\frac{E}{\Omega}-x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} \end{aligned}$$

identisch befriedigt sein muss. Dieselbe zerfällt in die beiden

$$2a_2x+4a_4x^3+6a_6x^5+\cdots = (b_1x+b_3x^3+b_5x^5+\cdots)\frac{\varkappa^2}{2}(E-\Omega x^2)$$

und

$$\begin{aligned} &(b_1+3b_3x^2+5b_5x^4+\cdots)(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)+(b_1x+b_3x^3+b_5x^5+\cdots)(-(1+\varkappa^2)x+2\varkappa^2x^3)\\ &\quad = (1+a_2x^2+a_4x^4+\cdots)\frac{\varkappa^2}{2}(E-\Omega x^2), \end{aligned}$$

welche durch Coefficientenvergleichung die Relationen liefern:

$$2a_2 = \frac{\varkappa^2 E}{2} b_1,$$

$$2n a_{2n} = \frac{\varkappa^2 E}{2} b_{2n-1} - \frac{\varkappa^2 \Omega}{2} b_{2n-3},$$

$$b_1 = \frac{\varkappa^2 E}{2},$$

$$3b_3 - 2(1+\varkappa^2) b_1 = \frac{\varkappa^2 E}{2} a_2 - \frac{\varkappa^2 \Omega}{2}$$

und

$$(2n+1) b_{2n+1} - 2n(1+\varkappa^2) b_{2n-1} + (2n-1)\varkappa^2 b_{2n-3} = \frac{\varkappa^2 E}{2} a_{2n} - \frac{\varkappa^2 \Omega}{2} a_{2n-2},$$

aus denen sich die Coefficienten selbst leicht ergeben:

$$b_1 = \frac{\varkappa^2 E}{2},$$

$$a_2 = \frac{\varkappa^4 E^2}{8},$$

$$b_3 = \varkappa^2 \frac{\varkappa^4 E^3 + 16(1+\varkappa^2)E - 8\Omega}{48},$$

$$a_4 = \varkappa^4 E \frac{\varkappa^4 E^3 + 16(1+\varkappa^2)E - 32\Omega}{384},$$

$$b_5 = \varkappa^2 \frac{\varkappa^8 E^5 + 80(1+\varkappa^2)\varkappa^4 E^3 - 80\varkappa^4 \Omega E^2 + 128(8+7\varkappa^2+8\varkappa^4)E - 512(1+\varkappa^2)\Omega}{3840},$$

u. s. w.

§ 3.

Durch die Untersuchungen des letzten Paragraphen sind wir in den Stand gesetzt, das Umkehrungsproblem der multiplicatorisch periodischen Functionen nach Analogie der Lösung der *Abel*schen Gleichungen zu behandeln. Die Resultate, die wir hierbei erhalten werden, sind allerdings wegen ihrer grossen Complicirtheit praktisch unbrauchbar; doch glaube ich, dass sie einen nicht unbedeutenden theoretischen Werth besitzen, da sie die algebraische Analogie rechtfertigen, die mir den Eingang zur Theorie der periodischen Functionen eröffnete. Was die Form der Rechnungen anlangt, so bemerke ich, dass an Stelle unendlich hoher Wurzeln Logarithmen, an Stelle von Summen mit unendlich vielen Gliedern entweder unendliche Reihen oder Integrale treten. Das Vorkommen von Integralen in der Rechnung ist daher nichts, was der rein algebraischen Natur derselben

Abbruch thäte; dagegen empfinde ich es als einen Mangel, dass es mir nicht vollständig gelungen ist, die Benutzung von Differentialgleichungen zu vermeiden. Dass das Umkehrungsproblem mittelst einer ähnlichen Differentialgleichung auch direct, bloss mit Zuhülfenahme des elliptischen Integrals erster Gattung gelöst werden kann, versteht sich von selbst; trotz der Einfachheit dieses Verfahrens ziehen wir das nachfolgende complicirtere vor, welches die algebraische Natur der Modularfunctionen klar stellt.

1) Die gewöhnliche Methode der Lösung der *Abel*schen Gleichungen ist (etwas erweitert) die folgende. Lassen sich die Lösungen einer Gleichung in der Form

$$\begin{array}{lllll} x_1, & \varphi_1(x_1), & \varphi_2(x_1), & \dots, & \varphi_{n-1}(x_1), \\ x_2, & \varphi_1(x_2), & \varphi_2(x_2), & \dots, & \varphi_{n-1}(x_2), \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_m, & \varphi_1(x_m), & \varphi_2(x_m), & \dots, & \varphi_{n-1}(x_m) \end{array}$$

darstellen, wobei φ_1 eine rationale Function, φ_k deren k^{te} Iterirung, $\varphi_n(x) = x$ ist, und bezeichnet $f(x)$ eine beliebige rationale Function, α eine primitive n^{te} Einheitswurzel, so kann man

$$(1.)\quad \begin{cases} f(x_1)+\alpha f(\varphi_1(x_1))+\alpha^2 f(\varphi_2(x_1))+\dots+\alpha^{n-1} f(\varphi_{n-1}(x_1)) = \sqrt[n]{V_1}, \\ f(x_1)+\alpha^2 f(\varphi_1(x_1))+\alpha^{2.2} f(\varphi_2(x_1))+\dots+\alpha^{2(n-1)} f(\varphi_{n-1}(x_1)) = \sqrt[n]{V_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(x_1)+\alpha^{n-1} f(\varphi_1(x_1))+\alpha^{(n-1).2} f(\varphi_2(x_1))+\dots+\alpha^{(n-1)(n-1)} f(\varphi_{n-1}(x_1)) = \sqrt[n]{V_n}, \\ f(x_1)+f(\varphi_1(x_1))+f(\varphi_2(x_1))+\dots+f(\varphi_{n-1}(x_1)) = V \end{cases}$$

setzen, wo $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V$ durch Gleichungen m^{ten} Grades aus den Coefficienten der vorgelegten Gleichung zu berechnen sind. Addirt man die Gleichungen (1.), so erhält man

$$(2.)\quad f(x_1) = \frac{\sqrt[n]{V_1}+\sqrt[n]{V_2}+\dots+\sqrt[n]{V_{n-1}}+V}{n};$$

in ähnlicher Weise findet man $f(\varphi_1(x))$ u. s. w. Ferner ist bekannt, dass

$$\sqrt[n]{V_k} = \sqrt[n]{V_1^k}.A_k$$

gesetzt werden kann, wo A_k ebenfalls durch eine Gleichung m^{ten} Grades aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung zu berechnen ist. — Der letzteren Bemerkung entsprechend werden wir die Umkehrung der Modularfunctionen durchführen.

2) Die Umkehrung von

$$w = \mathrm{S}(p, x),$$

also

$$x = \arg \mathrm{S}(p, w),$$

mit deren Berechnung wir uns beschäftigen wollen, hat die folgenden, doppelt unendlich vielen Werthe:

$$x, \quad px, \quad p^2x, \quad \ldots, \quad \frac{x}{p}, \quad \frac{x}{p^2}, \quad \ldots$$

$$-\frac{1}{x}, \quad -\frac{1}{px}, \quad -\frac{1}{p^2x}, \quad \ldots, \quad -\frac{p}{x}, \quad -\frac{p^2}{x^2}, \quad \ldots.$$

Wählen wir

$$f(x) = -\frac{1}{x-\frac{1}{x}} = \frac{x}{1-x^2}$$

und nehmen jetzt α als $2n^{\text{te}}$ Einheitswurzel an, indem wir wie in der Folge uns n als eine ins Unendliche wachsende Zahl denken, so nehmen die Ausdrücke (1.), wenn α^2 an Stelle von α gesetzt wird, die Form an:

$$(3.) \qquad \Phi(\alpha, x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{\alpha^{2k}p^kx}{1-p^{2k}x^2} \quad \text{u. s. w.}$$

Nun ist aber, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll,

$$(4.) \qquad \Phi(\alpha, x) = \frac{i\eta_0\eta_2\eta_3}{2\eta_0(p,\alpha)} \cdot \frac{\eta_0(p,\alpha x)}{\eta_1(p,x)} = \frac{i\eta_0\eta_3^2}{2\eta_0(p,\alpha)} \cdot \frac{1}{\mathrm{S}(p,x)} \cdot \frac{\eta_0(p,\alpha x)}{\eta_1(p,x)},$$

und es handelt sich jetzt darum, die Ausdrücke $\Phi(\alpha, x)$ durch w auszudrücken und dann zu summiren.

3) Sei

$$\alpha = e^{\frac{\pi i}{n}} = 1 + \frac{\pi i}{n},$$

so ist

$$(5.) \quad \begin{cases} \dfrac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i}{n}}x)}{\eta_0(p,x)} = \dfrac{\prod_0^{\infty}{}_k\left[1-p^{2k+1}x^2\left(1+\frac{2\pi i}{n}\right)\right]\left[1-\frac{p^{2k+1}}{x^2}\left(1-\frac{2\pi i}{n}\right)\right]}{\prod_0^{\infty}{}_k\left[1-p^{2k+1}x^2\right]\left[1-\frac{p^{2k+1}}{x^2}\right]} \\[2ex] \qquad = \prod_0^{\infty}{}_k\left[1-\dfrac{2\pi i}{n}\cdot\dfrac{p^{2k+1}x^2}{1-p^{2k+1}x^2}\right]\left[1+\dfrac{2\pi i}{n}\cdot\dfrac{\frac{p^{2k+1}}{x^2}}{1-\frac{p^{2k+1}}{x^2}}\right], \end{cases}$$

oder nach Ausmultipliciren unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen von höherer als der ersten Ordnung:

$$(6.)\quad \frac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i}{n}} x)}{\eta_0(p, x)} = 1 - \frac{2\pi i}{n}\left\{\sum_0^\infty k\left(\frac{p^{2k+1}x^2}{1-p^{2k+1}x^2} - \frac{\frac{p^{2k+1}}{x^2}}{1-\frac{p^{2k+1}}{x^2}}\right)\right\} = 1 + \frac{2\pi i}{n} A_0(p, x).$$

Die n^{te} Potenz hiervon ist

$$e^{2\pi i A_0(p,x)},$$

eine Grösse, die wir in § 2 durch w auszudrücken lernten. Dass in diesem Ausdruck eine Quadratwurzel vorkommt, stimmt vollkommen mit der algebraischen Theorie, da sich die Werthe von $x = \arg \mathrm{S}(p, w)$ in *zwei* Reihen darstellen.

4) Dem algebraischen Vorbilde entsprechend handelt es sich jetzt darum, *alle* Functionen

$$\frac{\eta_0(p, \alpha^k x)}{\eta_0(p, x)} = \frac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i k}{n}} x)}{\eta_0(p, x)}$$

auf die Form

$$e^{2\pi i \cdot \frac{k}{n} A_0(p,x)} . A_k$$

zu bringen. Wir haben

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i k}{n}} x)}{\eta_0(p, x)} = \dfrac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i}{n}} x)}{\eta_0(p, x)} \cdot \dfrac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i . 2}{n}} x)}{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i}{n}} x)} \cdot \dfrac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i . 3}{n}} x)}{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i . 2}{n}} x)} \cdots \dfrac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i k}{n}} x)}{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i (k-1)}{n}} x)} \\ = \left(1 + \dfrac{2\pi i}{n} A_0(p, x)\right)\left(1 + \dfrac{2\pi i}{n} A_0(p, e^{\frac{\pi i}{n}} x)\right)\left(1 + \dfrac{2\pi i}{n} A_0(p, e^{\frac{\pi i . 2}{n}} x)\right) \cdots \\ \qquad \cdots \left(1 + \dfrac{2\pi i}{n} A_0(p, e^{\frac{\pi i (k-1)}{n}} x)\right), \end{cases}$$

also mit Rücksicht auf die Reihenentwickelung für $\log(1+x)$:

$$(8.)\quad \begin{cases} \log \dfrac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i k}{n}} x)}{\eta_0(p, x)} \\ = \dfrac{2\pi i}{n} [A_0(p, x) + A_0(p, e^{\frac{\pi i}{n}} x) + A_0(p, e^{\frac{\pi i . 2}{n}} x) + \cdots + A_0(p, e^{\frac{\pi i (k-1)}{n}} x)]. \end{cases}$$

Berücksichtigen wir die Relation

$$(9.)\quad A_0(p, x) + A_0(p, y) = A_0(p, xy) + \frac{x^2 \Omega}{4\pi i} \cdot \mathrm{S}(p, x)\mathrm{S}(p, y)\mathrm{S}(p, xy),$$

so wird hieraus

$$(10.)\quad \begin{cases} \log \dfrac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i k}{n}} x)}{\eta_0(p, x)} = 2\pi i \cdot \dfrac{k}{n} \cdot A_0(p, x) + \dfrac{2\pi i}{n}\Big[\sum_1^{k-1}{}_r A_0(p, e^{\frac{\pi i r}{n}}) \\ \qquad - \dfrac{\varkappa^2 \Omega}{2n} \mathrm{S}(p, x) \sum_0^{k-1}{}_r \mathrm{S}(p, e^{\frac{\pi i r}{n}}) \mathrm{S}(p, e^{\frac{\pi i r}{n}} x)\Big]. \end{cases}$$

Es ist aber

$$(11.)\quad \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{n} \sum_1^{k-1}{}_r A_0(p, e^{\frac{\pi i r}{n}}) = 2\pi i \displaystyle\int_0^{\frac{k}{n}} A_0(p, e^{\pi i \varphi}) d\varphi \\ = \displaystyle\int_0^{\frac{k}{n}} \dfrac{\vartheta_0'(\tau, \varphi)}{\vartheta_0(\tau, \varphi)} d\varphi = \log \dfrac{\vartheta_0\left(\tau, \frac{k}{n}\right)}{\vartheta_0} = \log \dfrac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i k}{n}})}{\eta_0}. \end{cases}$$

Weiter haben wir, da

$$\mathrm{S}(p, e^{\frac{\pi i r}{n}}) = \sin\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \frac{r}{n}$$

ist,

$$\mathrm{S}(p, e^{\frac{\pi i r}{n}}) \mathrm{S}(p, e^{\frac{\pi i r}{n}} x)$$

$$= \frac{w \sin\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \frac{r}{n} \sin'\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \frac{r}{n} + \sin^2\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \frac{r}{n} \cdot \sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)}}{1 - \varkappa^2 w^2 \sin^2\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \frac{r}{n}},$$

also

$$(12.)\quad \begin{cases} \dfrac{\varkappa^2 \Omega}{2n} \mathrm{S}(p, x) \sum_0^{k-1}{}_r \mathrm{S}(p, e^{\frac{\pi i r}{n}}) \mathrm{S}(p, e^{\frac{\pi i r}{n}} x) \\ = \dfrac{\varkappa^2 \Omega}{2} w \displaystyle\int_0^{k} \dfrac{w \sin\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \varphi \sin'\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \varphi + \sin^2\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \varphi . \sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)}}{1 - \varkappa^2 w^2 \sin^2\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \varphi} d\varphi \\ = -\frac{1}{2} \log\left[1 - \varkappa^2 w^2 \sin^2\mathrm{am} \dfrac{\Omega}{2} \dfrac{k}{n}\right] \\ \qquad + \dfrac{\varkappa^2 \Omega}{2} w \sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)} \displaystyle\int_0^{\frac{k}{n}} \dfrac{\sin^2\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \varphi}{1 - \varkappa^2 w^2 \sin^2\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \varphi} d\varphi. \end{cases}$$

Die Zusammenstellung von (10.), (11.) und (12.) giebt

$$(13.)\quad \begin{cases} \dfrac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i k}{n}} x)}{\eta_0(p, x)} = e^{2\pi i \frac{k}{n} A_0(p, x)} \cdot \dfrac{\eta_0(p, e^{\frac{\pi i k}{n}})}{\eta_0} \\ \qquad \cdot \sqrt{\left(1 - \varkappa^2 w^2 \sin^2\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \frac{k}{n}\right)} \cdot e^{-\frac{\varkappa^2 \Omega}{2} w \sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)} \int_0^{\frac{k}{n}} \frac{\sin^2\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \varphi}{1 - \varkappa^2 w^2 \sin^2\mathrm{am} \frac{\Omega}{2} \varphi} d\varphi}, \end{cases}$$

oder

$$(14.)\quad \Phi(e^{\frac{\pi i k}{n}}, x) = \frac{i\eta_3^2}{2}\cdot\frac{1}{w}\cdot e^{2\pi i\frac{k}{n}A_0(p,x)}\cdot\sqrt{\left(1-x^2w^2\sin^2\operatorname{am}\frac{\Omega}{2}\frac{k}{n}\right)} \cdot e^{-\frac{x^2\Omega}{2}w\sqrt{(1-w^2)(1-x^2w^2)}\int_0^{\frac{k}{n}}\frac{\sin^2\operatorname{am}\frac{\Omega}{2}\varphi}{1-x^2w^2\sin^2\operatorname{am}\frac{\Omega}{2}\varphi}d\varphi}.$$

5) Behufs Auswerthung der letzten Exponentialgrösse setzen wir

$$z=\sin\operatorname{am}\frac{\Omega}{2}\varphi,\quad\text{resp.}\quad z=\sin\operatorname{am}\frac{\Omega}{2}\frac{k}{n},$$

und

$$(15.)\quad \begin{cases}\chi(z) = e^{-\frac{x^2\Omega}{2}w\sqrt{(1-w^2)(1-x^2w^2)}\int_0^{\frac{k}{n}}\frac{\sin^2\operatorname{am}\frac{\Omega}{2}\varphi}{1-x^2w^2\sin^2\operatorname{am}\frac{\Omega}{2}\varphi}d\varphi} \\ \quad\; = e^{-x^2w\sqrt{(1-w^2)(1-x^2w^2)}\int_0^z\frac{z^2dz}{(1-x^2w^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}}}.\end{cases}$$

Es ist

$$(16.)\quad \chi'(z) = -\chi(z)x^2w\sqrt{(1-w^2)(1-x^2w^2)}\cdot\frac{z^2}{(1-x^2w^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}}.$$

Da man sich leicht überzeugt, dass alle in Betracht kommenden Werthe von z reell und höchstens gleich Eins sind, und dass ferner, falls $\operatorname{mod}.x<1$, $\operatorname{mod}.(xw)<1$ vorausgesetzt wird, sich $\chi(z)$ für $z\leqq 1$ in eine durchaus convergente, nach positiven Potenzen von z fortschreitende Reihe verwandeln lässt, da es in diesem Bereiche nicht unstetig wird, so setzen wir mit Beachtung, dass $\chi(0)=1$ ist,

$$\chi(z) = 1+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots.$$

Entwickelt man $\sqrt{1-z^2}$ und $\sqrt{1-x^2z^2}$ nach dem binomischen Lehrsatz, so findet man

$$\begin{aligned}\chi'(z)\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)} &= (a_1+2a_2z+3a_3z^2+4a_4z^3+\cdots)\\ &\cdot[1-\tfrac{1}{2}(1+x^2)z^2-\tfrac{1}{8}(1-2x^2+x^4)z^4-\tfrac{1}{16}(1-x^2-x^4+x^6)z^6-\cdots]\\ &= a_1+2a_2z+[3a_3-\tfrac{1}{2}(1+x^2)a_1]z^2+[4a_4-(1+x^2)a^2]z^3\\ &+[5a_5-\tfrac{3}{2}(1+x^2)a_3-\tfrac{1}{8}(1-2x^2+x^4)a_1]z^4\\ &+[6a_6-2(1+x^2)a_4-\tfrac{1}{4}(1-2x^2+x^4)a_2]z^5\\ &+[7a_7-\tfrac{5}{2}(1+x^2)a_5-\tfrac{3}{8}(1-2x^2+x^4)a_3-\tfrac{1}{16}(1-x^2-x^4+x^6)a_1]z^6+\cdots.\end{aligned}$$

Multiplicirt man noch mit $1-\varkappa^2 w^2 z^2$ und setzt den gefundenen Ausdruck in (16.) ein, so erhält man die Gleichung

$$(17.)\quad \begin{cases} a_1+2a_2 z+[3a_3-\frac{1}{2}(1+\varkappa^2)a_1-\varkappa^2 w^2 a_1]z^2 \\ +[4a_4-(1+\varkappa^2)a_2-2\varkappa^2 w^2 a_2]z^3 \\ +[5a_5-\frac{3}{2}(1+\varkappa^2)a_3-\frac{1}{8}(1-2\varkappa^2+\varkappa^4)a_1-\varkappa^2 w^2(3a_3-\frac{1}{2}(1+\varkappa^2)a_1)]z^4 \\ +[6a_6-2(1+\varkappa^2)a_4-\frac{1}{4}(1-2\varkappa^2+\varkappa^4)a_2-\varkappa^2 w^2(4a_4-(1+\varkappa^2)a_2)]z^5 \\ +[7a_7-\frac{5}{2}(1+\varkappa^2)a_5-\frac{3}{8}(1-2\varkappa^2+\varkappa^4)a_3-\frac{1}{16}(1-\varkappa^2-\varkappa^4+\varkappa^6)a_1 \\ \qquad -\varkappa^2 w^2(5a_5-\frac{3}{2}(1+\varkappa^2)a_3-\frac{1}{8}(1-2\varkappa^2+\varkappa^4)a_1)]z^6+\cdots \\ = -[z^2+a_1 z^3+a_2 z^4+\cdots]\varkappa^2 w\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)}. \end{cases}$$

Die Coefficientenvergleichung giebt

$$a_1 = a_2 = 0,$$
$$a_3 = -\tfrac{1}{3}\varkappa^2 w\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)},$$
$$a_4 = 0,$$
$$a_5 = -\tfrac{1}{5}[\tfrac{1}{2}(1+\varkappa^2)+\varkappa^2 w^2]\varkappa^2 w\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)},$$
$$a_6 = \tfrac{1}{18}\varkappa^4 w^2(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)$$

u. s. w.

Multipliciren wir $\chi(z)$ mit der Reihenentwickelung für $\sqrt{1-\varkappa^2 w^2 z^2}$, die unter denselben Bedingungen wie die obige möglich ist, so erhalten wir

$$(18.)\quad \begin{cases} \chi(z)\sqrt{1-\varkappa^2 w^2 z^2} = -\frac{1}{3}\varkappa^2 w\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)}.z^3 \\ -\frac{1}{10}[(1+\varkappa^2)+\frac{1}{3}\varkappa^2 w^2]\varkappa^2 w\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)}.z^5 \\ +\frac{1}{18}\varkappa^4 w^2(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2).z^6+\cdots. \end{cases}$$

Setzen wir nun wieder $z = \mathrm{S}(p, \alpha)$, so können wir unter Zuhülfenahme der früher citirten *Jacobi*schen Entwickelungen für $\sin^k \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}$ den letzten Ausdruck in eine nach ganzen positiven und negativen Potenzen von α fortschreitende Reihe entwickeln, die dann noch, um $\Phi(e^{\frac{\pi ik}{n}}, x)$ zu erhalten, abgesehen von einem von α unabhängigen Factor, mit $e^{2\pi i.\frac{k}{n}A_0(p,x)}$ zu multipliciren ist.

6) Analog den an die Spitze dieses Paragraphen gestellten algebraischen Herleitungen finden wir

$$(19.)\quad \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}_k\,\Phi(e^{\frac{\pi ik}{n}}, x).$$

Um die Summe rechts auszuführen, haben wir nach der letzten Bemerkung Summen von der Form

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}{}_k\, e^{2\pi i.\frac{k}{n}A_0(p,x)} . e^{\pi i.\frac{kr}{n}}$$

zu berechnen, wobei r eine ganze, positive oder negative Zahl bedeutet. Es ist aber

$$(20.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{0}^{n-1}{}_k\, e^{2\pi i.\frac{k}{n}A_0(p,x)} . e^{\pi i.\frac{kr}{n}} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{0}^{n-1}{}_k\, e^{\pi i.\frac{k}{n}[2A_0(p,x)+r]} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1-(-1)^r e^{2\pi i A_0(p,x)}}{1-e^{\frac{\pi i}{n}[2A_0(p,x)+r]}} \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{(-1)^r e^{2\pi i A_0(p,x)}-1}{\frac{\pi i}{n}[2A_0(p,x)+r]} = \dfrac{(-1)^r e^{2\pi i A_0(p,x)}-1}{\pi i[2A_0(p,x)+r]}. \end{cases}$$

7) Wenn wir die bis jetzt nur angedeuteten Theile der Rechnung wirklich durchführen, so gelangen wir zu folgendem Endresultat:

$$(21.)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} = \dfrac{e^{2\pi i A_0(p,x)}+1}{4\pi i}\cdot\dfrac{\eta_3^2}{w}\cdot\Big\{a_1\dfrac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p}\Big(\dfrac{1}{A_0(p,x)+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{A_0(p,x)-\frac{1}{2}}\Big) \\[1ex] \qquad\qquad + a_3\dfrac{p^{\frac{3}{2}}}{1-p^3}\Big(\dfrac{1}{A_0(p,x)+\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{A_0(p,x)-\frac{3}{2}}\Big) \\[1ex] \qquad\qquad + \cdots\cdots\Big\} \\[1ex] + \dfrac{e^{2\pi i A_0(p,x)}-1}{4\pi}\cdot\dfrac{\eta_3^2}{w}\cdot\Big\{a_0\dfrac{1}{A_0(p,x)}+a_2\dfrac{p}{1-p^2}\Big(\dfrac{1}{A_0(p,x)+1}+\dfrac{1}{A_0(p,x)-1}\Big) \\[1ex] \qquad\qquad + a_4\dfrac{p^2}{1-p^4}\Big(\dfrac{1}{A_0(p,x)+2}+\dfrac{1}{A_0(p,x)-2}\Big) \\[1ex] \qquad\qquad + \cdots\cdots\Big\}, \end{cases}$$

worin man hat

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{3}\cdot\frac{w}{\varkappa}\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2w^2)}\Big[(1+\varkappa^2)\cdot\frac{2\pi}{\Omega}-\Big(\frac{2\pi}{\Omega}\Big)^3\Big] \\ &\quad + \tfrac{1}{120}\big[\tfrac{1}{2}(1+\varkappa^2)+\varkappa^2w^2\big]\frac{w}{\varkappa^3}\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2w^2)} \\ &\quad \cdot\Big[3(3+2\varkappa^2+3\varkappa^4)\cdot\frac{2\pi}{\Omega}-10(1+\varkappa^2)\Big(\frac{2\pi}{\Omega}\Big)^3+\Big(\frac{2\pi}{\Omega}\Big)^5\Big] \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots, \\ a_3 &= \tfrac{1}{3}\cdot\frac{w}{\varkappa}\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2w^2)}\Big[(1+\varkappa^2)\cdot\frac{2\pi}{\Omega}-3^2\Big(\frac{2\pi}{\Omega}\Big)^3\Big] \\ &\quad + \tfrac{1}{120}\big[(1+\varkappa^2)+\tfrac{1}{3}\varkappa^2w^2\big]\frac{w}{\varkappa^3}\sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2w^2)} \\ &\quad \cdot\Big[3(3+2\varkappa^2+3\varkappa^4)\cdot\frac{2\pi}{\Omega}-3^2.10(1+\varkappa^2)\Big(\frac{2\pi}{\Omega}\Big)^3+3^4\Big(\frac{2\pi}{\Omega}\Big)^5\Big] \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

u. s. w.;

$$a_0 = \tfrac{1}{270}w^2(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)\Big[(8+7\varkappa^2+8\varkappa^4)\frac{E}{2\pi}-4(1+\varkappa^2)\Big]$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$a_2 = -\tfrac{1}{1080}\frac{w^2}{x^2}(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)$$
$$\cdot\Big[2.8(8+7\varkappa^2+8\varkappa^4)\Big(\frac{2\pi}{\Omega}\Big)^2-2^3.20(1+\varkappa^2)\Big(\frac{2\pi}{\Omega}\Big)^4+2^5\Big(\frac{2\pi}{\Omega}\Big)^6\Big]$$
$$- \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$a_4 = -\tfrac{1}{1080}\frac{w^2}{x^4}(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)$$
$$\cdot\Big[6.8(8+7\varkappa^2+8\varkappa^4)\Big(\frac{2\pi}{\Omega}\Big)^2-6^3.20(1+\varkappa^2)\Big(\frac{2\pi}{\Omega}\Big)^4+6^5\Big(\frac{2\pi}{\Omega}\Big)^6\Big]$$
$$- \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Wir verzichten auf die weitere Berechnung und Vereinfachung der gefundenen Coefficienten, da dieselbe auf bedeutende Schwierigkeiten stösst und schliesslich doch keinen praktischen Nutzen gewähren würde.

Aus dem Gange der Entwickelung folgt, dass die gefundene Reihe jedenfalls für

$$\text{mod.}\,\varkappa < 1 \quad \text{und} \quad \text{mod.}\,w\varkappa < 1$$

convergiren muss. Für $e^{2\pi i A_0(p,x)}$ können wir seine Entwickelung nach w, für $2\pi i A_0(p,x)$ denjenigen Werth des Logarithmus dieser Grösse einsetzen, der für $w=0$ verschwindet. Die Werthe für

$$\frac{p^k x}{1-p^{2k}x^2}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\frac{p^k}{x}}{1-\frac{p^{2k}}{x^2}}$$

ergeben sich sämmtlich aus dem obigen Ausdruck, wenn man für $2\pi i A_0(p,x)$ die verschiedenen Werthe jenes Logarithmus einfügt.

Frankfurt a. M., den 7. September 1882.

Ueber die *Bernoulli*schen Zahlen.

(Bemerkungen zur Abhandlung des Herrn *Worpitzky*, S. 203 u. flgde.)

(Von *Kronecker*.)

I. Man kann, wie ich es öfters in meinen Universitätsvorlesungen gethan habe, die ganze Function n^{ten} Grades von x, welche für alle positiven ganzzahligen Werthe von x der Summe $1+2^{n-1}+\cdots+(x-1)^{n-1}$ gleich wird, in sehr eleganter Weise mit Hülfe der *Lagrange*schen Interpolationsformel darstellen. Es erscheinen dabei als Coefficienten die Werthe der darzustellenden Function für $n+1$ verschiedene Argumentwerthe, also hier $n+1$ Reihen: $1+2^{n-1}+\cdots+(x-1)^{n-1}$ für $n+1$ verschiedene Zahlen x. Nimmt man speciell $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ und berücksichtigt, dass die darzustellende Function für $x=0$ und $x=1$ verschwindet, so erhält man für dieselbe den Ausdruck:

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots n}\sum_{h,k}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{x-k}\cdot h^{n-1}.$$
$$(h=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1;\ k=2,\ 3,\ \ldots,\ n \quad \text{oder} \quad 0<h<k\leqq n)$$

Vergleicht man den Coefficienten von x in diesem Ausdrucke mit demjenigen, welcher bei der Entwickelung von $1+2^{n-1}+\cdots+(x-1)^{n-1}$ nach Potenzen von x erscheint (vgl. S. 206, (1.) oder auch *Eisenlohrs* Abhandlung Bd. 28, S. 196 dieses Journals), so ergiebt sich, dass

$$\sum_{h,k}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{(-1)^k}{k}\cdot h^{n-1}=0 \quad \text{oder} \quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}B_{\frac{1}{2}(n-1)},$$
$$(0<h<k\leqq n)$$

ist, je nachdem n grade oder ungrade ist. Hierin ist die bekannte independente Darstellung der *Bernoulli*schen Zahlen enthalten. Mit $B_1,\ B_2,\ \ldots$ sind nämlich hier die *Bernoulli*schen Zahlen bezeichnet, für welche

$$1-x\cot x=\sum_n B_n\frac{(2x)^{2n}}{2n!},\quad \operatorname{tang} x=\sum_n B_n\frac{2(2^{2n}-1)(2x)^{2n-1}}{2n!} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

wird, und es ist also z. B. für $n=5$ und $n=6$:

$$10\cdot\tfrac{1}{2}-10\cdot\tfrac{1}{3}(1+2^4)+5\cdot\tfrac{1}{4}(1+2^4+3^4)-\tfrac{1}{5}(1+2^4+3^4+4^4)=\tfrac{1}{30},$$
$$15\cdot\tfrac{1}{2}-20\cdot\tfrac{1}{3}(1+2^5)+15\cdot\tfrac{1}{4}(1+2^5+3^5)-6\cdot\tfrac{1}{5}(1+2^5+3^5+4^5)+\tfrac{1}{6}(1+2^5+3^5+4^5+5^5)=0.$$

II. Dass die Zahlen $2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n$, wie in der *Worpitzky*schen Abhandlung bemerkt ist, ganze Vielfache von n sind, geht unmittelbar daraus hervor, dass eben jene Zahlen, dividirt durch n, die Coefficienten von $\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ in der Entwickelung von $\operatorname{tang} x$, oder also die Werthe der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Derivirten von $\operatorname{tang} x$, und daher die Werthe ganzer ganzzahliger Functionen von $\cos x$, dividirt durch $\cos x^{2n}$, für $x=0$ sind. Aber auch in den recurrirenden Formeln, welche man durch die Gleichung:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^m}{2m!} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}x^{2r-1}}{(2r-1)!}$$

erhält, tritt jene Eigenschaft der Zahlen $2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n$ in Evidenz. Eben dieselbe Eigenschaft ist endlich auch an den eigenthümlichen independenten Ausdrücken für die *Bernoulli*schen Zahlen zu erkennen, welche ich aus allgemeineren Recursionsformeln erlangt und im Jahre 1856 im I. Bande der 2. Serie des *Liouville*schen Journals veröffentlicht habe. Die eine der beiden a. a. O. aufgestellten Formeln ist:

$$2^{4n}(2^{2n}-1)B_n = (-1)^{n-1}\Sigma(\sum_h \pm e^{\frac{h\pi i}{n}})^{2n} \qquad (h=0,1,2,\ldots,2n-1),$$

wo sich die erste Summation rechts auf alle Combinationen der Zeichen $\pm$ bezieht, deren Anzahl offenbar 2^{2n} ist. Berücksichtigt man, dass die über alle $2n$ Werthe von h erstreckte Summe $\Sigma e^{\frac{h\pi i}{n}}$ gleich Null ist, so lässt sich die Formel folgendermassen darstellen:

$$2^{2n}(2^{2n}-1)B_n = (-1)^{n-1}\Sigma c.(e^{\frac{r\pi i}{n}}+e^{\frac{s\pi i}{n}}+e^{\frac{t\pi i}{n}}+\cdots)^{2n},$$

wo die Summation auf alle verschiedenen Systeme von höchstens n aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$ zu entnehmenden *ungleichen* Zahlen $r, s, t, \ldots$ auszudehnen und $c=1$ oder 2 zu nehmen ist, je nachdem die Anzahl der Zahlen $r, s, t, \ldots$ gleich n oder kleiner als n ist. So sind z. B. für $n=2$:

$$r=0,\ 1,\ 2,\ 3;\quad (r,s)=(0,1),\ (0,2),\ (0,3),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,3),$$

alle in die Formel einzusetzenden Werthsysteme, und es kommt darnach:

$$2^4(2^4-1)B_2 = -[2(1+1+1+1)+(1+i)^4+(1-i)^4+(-1+i)^4+(-1-i)^4].$$

On the sixteen-nodal quartic surface.

(By Professor *A. Cayley* at Cambridge.)

Riemann's theory of the bitangents of a plane quartic leads at once to a very simple form of the equation of the sixteen-nodal surface: viz. if ξ, η, ζ denote linear functions of the coordinates $(x\ y,\ z,\ w)$ such that identically

$$x+y+z+\xi+\eta+\zeta = 0,$$
$$ax+by+cz+f\xi+g\eta+h\zeta = 0,$$

(where $af = bg = ch = 1$), then the quartic surface

$$\sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta} = 0$$

has the sixteen singular tangent planes (each touching it along a conic)

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad \xi=0,\quad \eta=0,\quad \zeta=0,$$

$$x+y+z=0,\quad ax+by+cz=0,$$
$$\xi+y+z=0,\quad f\xi+by+cz=0,$$
$$x+\eta+z=0,\quad ax+g\eta+cz=0,$$
$$x+y+\zeta=0,\quad ax+by+h\zeta=0,$$

$$\frac{x}{1-bc}+\frac{y}{1-ca}+\frac{z}{1-ab}=0,\quad \frac{\xi}{1-gh}+\frac{\eta}{1-hf}+\frac{\zeta}{1-fg}=0:$$

and it is thus a sixteen nodal surface.

I have formerly given the equation of this surface under the form

$$\sqrt{x(X-w)}+\sqrt{y(Y-w)}+\sqrt{z(Z-w)} = 0,$$

where

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad X=\alpha(\gamma'\gamma''y-\beta'\beta''z),$$
$$\alpha'+\beta'+\gamma'=0,\quad Y=\beta(\alpha'\alpha''z-\gamma'\gamma''x),$$
$$\alpha''+\beta''+\gamma''=0,\quad Z=\gamma(\beta'\beta''x-\alpha'\alpha''y),$$

$$P\ = \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma},\quad X'\ = \alpha'(\gamma''\gamma\, y-\beta''\beta z),$$
$$P'\ = \frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta'}+\frac{z}{\gamma'},\quad Y'\ = \beta'(\alpha''\alpha z-\gamma''\gamma x),$$
$$P''= \frac{x}{\alpha''}+\frac{y}{\beta''}+\frac{z}{\gamma''},\quad Z'\ = \gamma'(\beta''\beta x-\alpha''\alpha y),$$
$$X''=\alpha''(\gamma\gamma' y-\beta\beta' z),$$
$$Y''=\beta''(\alpha\alpha' z-\gamma\gamma' x),$$
$$Z''=\gamma''(\beta\beta' x-\alpha\alpha' y),$$

and where the equations of the sixteen singular tangent planes are

$$\begin{array}{llll} x=0, & y=0, & z=0, & w=0,\\ X\ -w=0, & Y\ -w=0, & Z\ -w=0, & P\ =0,\\ X'-w=0, & Y'-w=0, & Z'-w=0, & P'=0,\\ X''-w=0, & Y''-w=0, & Z''-w=0, & P''=0,\end{array}$$

Journal t. LXXIII (1871) pp. 292–293 and see also Proc. Lond. Math. Soc. t. III. (1871) p. 251.

To identify the two forms, using $x', y', z', \xi', \eta', \zeta'$ for the new form, I assume

$$x',\ y',\ z',\ \xi',\ \eta',\ \zeta'\ =\ lx,\ my,\ nz,\ p(X-w),\ q(Y-w),\ r(Z-w),$$

where $lp=mq=nr=1$; and so convert the equation

$$\sqrt{x(X-w)}+\sqrt{y(Y-w)}+\sqrt{z(Z-w)}\ =\ 0$$

into

$$\sqrt{x'\xi'}+\sqrt{y'\eta'}+\sqrt{z'\zeta'}\ =\ 0.$$

The constants (l, m, n, p, q, r) and (a, b, c, f, g, h), where $af=bg=ch=1)$ are then to be determined so that we may have identically

$$x'+\ y'+\ z'+\ \xi'+\ \eta'+\ \zeta'\ =\ 0,$$
$$ax'+by'+cz'+f\xi'+g\eta'+h\zeta'\ =\ 0,$$

and we thus obtain 8 new equations to be satisfied by the 12 constants, viz. these are

$$\begin{aligned} l+\ r.\gamma\beta'\beta''-\ q.\beta\gamma'\gamma''\ &=\ 0,\\ m+\ p.\alpha\gamma'\gamma''-\ r.\gamma\alpha'\alpha''\ &=\ 0,\\ n+\ q.\beta\alpha'\alpha''-\ p.\alpha\beta'\beta''\ &=\ 0,\\ p+\ q\ \ +\ r\ &=\ 0,\\ al+hr.\gamma\beta'\beta''-gq.\beta\gamma'\gamma''\ &=\ 0,\\ bm+fp.\alpha\gamma'\gamma''-hr.\gamma\alpha'\alpha''\ &=\ 0,\\ cn+gq.\beta\alpha'\alpha''-fp.\alpha\beta'\beta''\ &=\ 0,\\ fp+gq\ \ +hr\ &=\ 0.\end{aligned}$$

But substituting for a, b, c, l, m, n their values $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$, we have in all 8 equations for the determination of qr, rp, pq, gh, hf, fg; viz. if for greater convenience we introduce the new symbols $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} = qr\alpha'\alpha''$, $rp\beta'\beta''$, $pq\gamma'\gamma''$, then the 8 equations are

$$\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{\mathfrak{B}}{\beta}-\frac{\mathfrak{C}}{\gamma}=0,$$
$$\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{\mathfrak{C}}{\gamma}-\frac{\mathfrak{A}}{\alpha}=0,$$
$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\mathfrak{A}}{\alpha}-\frac{\mathfrak{B}}{\beta}=0,$$
$$\frac{\alpha'\alpha''}{\mathfrak{A}}+\frac{\beta'\beta''}{\mathfrak{B}}+\frac{\gamma'\gamma''}{\mathfrak{C}}=0,$$

$$\frac{1}{\beta\gamma}+hf\cdot\frac{\mathfrak{B}}{\beta}-fg\cdot\frac{\mathfrak{C}}{\gamma}=0,$$
$$\frac{1}{\gamma\alpha}+fg\cdot\frac{\mathfrak{C}}{\gamma}-gh\cdot\frac{\mathfrak{A}}{\alpha}=0,$$
$$\frac{1}{\alpha\beta}+gh\cdot\frac{\mathfrak{A}}{\alpha}-hf\cdot\frac{\mathfrak{B}}{\beta}=0,$$
$$\frac{\alpha'\alpha''}{\mathfrak{A}gh}+\frac{\beta'\beta''}{\mathfrak{B}hf}+\frac{\gamma'\gamma''}{\mathfrak{C}fg}=0.$$

But in virtue of the equation $\alpha+\beta+\gamma=0$ the first four equations are equivalent to three equations only, and they determine $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, that is p, q, r, which give at once l, m, n; and similarly the second four equations are equivalent to three equations only, and $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ being known they determine gh, fg, gh, that is f, g, h, which give at once a, b, c: the identification of the two forms is thus completed.

Cambridge, 11th January 1883.

Ueber das Doppelintegral*).

(Von Herrn *P. du Bois-Reymond* in Tübingen.)

1.

Der Integralbegriff

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \sum_1^n \delta_p f_p,$$

wo $\sum_1^n \delta_p = X - x_0$ und f_p irgend einen dem Intervall δ_p angehörigen Werth von $f(x)$ vorstellt, ist mit den zugehörigen Sätzen leicht entwickelt, wenn man die zu integrirenden Functionen auf solche beschränkt, deren ***Descartes***sche geometrische Darstellung in unserer Anschauung eine befriedigende

*) In der Inauguraldissertation des Herrn ***Arnold Sachse,*** Göttingen 1879, die ausserdem noch in den „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik", Heft 3, und im Bulletin des Sciences mathématiques IV. Bd. 2. sér. veröffentlicht wurde, ist die Auffassung des Doppelintegrals, welche ich meinen an die ***Fourier***sche Formel sich anschliessenden Untersuchungen (dieses Journ. Bd. 69 und andere Aufsätze) zu Grunde legte, ohne nähere Angabe, wieso sie ungenügend sei, bemängelt worden. Nachdem ich in meiner Entgegnung (Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen, Tübingen 1879) meine Auffassung in Schutz genommen, wurde sie in einer Duplik des Herrn ***Sachse*** von Neuem angegriffen und geradezu für falsch erklärt (Göttinger gel. Anz. 1880 p. 980 sqq.), dieses Mal mit Angabe der vermeintlich richtigen Auffassung (p. 987 und 988). Diese läuft daraus hinaus, alle Doppelintegrale, ausser den absolut convergenten, für bedeutungslos zu erklären (s. das letzte Citat und die Anm. p. 284 dieses Aufsatzes). Da nun auch Herr ***Harnack*** in seinem Lehrbuch: Die Elemente der Differential- und Integralrechnung etc. Herrn ***Sachse*** sich anzuschliessen scheint, und auch in anderen Lehrbüchern die Theorie der Doppelintegrale mich nicht befriedigt, so scheint es mir von Nutzen, den Begriff des Doppelintegrals, wie er in logischer Fortentwickelung aus dem des einfachen Integrals und aus den allgemeinen Convergenzprincipien mit Nothwendigkeit sich ergiebt, in zusammenhängender Darstellung festzulegen.

Bei dieser Gelegenheit sei mir gestattet, Herrn ***Wiener*** auf seinen gegen meine Anmerkung (dies. Journ. Bd. 79, p. 29) gerichteten Tadel (Bd. 90 p. 222.) zu erwidern, dass, wie aus dem ersten Theil meiner allgemeinen Functionentheorie (Tübingen bei H. Laupp) zu entnehmen ist, seine geometrischen Betrachtungen über die ***Weierstrass***sche Function $\sum_0^\infty b^n \cos(a^n \pi x)$ die in jener Anmerkung angedeuteten Räthsel gänzlich unberührt lassen.

Flächenbegrenzung bildet. In der That beantwortet die geometrische Evidenz, dass dem $\lim \sum_1^n \delta_p f_p$ die Quadratur von $f(x)$ entspricht, die Frage nach dem Vorhandensein der Summengrenze und zwar nur einer Grenze; und die Verbindung beider Definitionen gestattet die müheloseste Herleitung der Haupteigenschaften des bestimmten Integrals. Namentlich der Fundamentalsatz der Integralrechnung, nach welchem aus $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

$$\int_{X_0}^{X_1} f(x)\,dx = F(X_1) - F(X_0)$$

folgt, welcher den Zusammenhang zwischen Quadratur und Primitivfunction ergiebt, somit *Descartes'* umgekehrtes Tangentenproblem löst, und den *Leibniz* lange vor seiner ersten Publication der Differentialrechnung (Acta Erudit. 1684) entdeckt hatte: dieser Satz ergiebt sich ohne Weiteres aus der Differentiation des bestimmten Integrals nach den Grenzen, und aus dem Satze der Differentialrechnung, dass zwei Functionen mit gleichem Differentialquotienten nur um eine Constante verschieden sein können. Diese *elementare* Herleitung der Theorie der bestimmten Integrale ist sodann noch zu vervollständigen durch Darlegung ihres Sinnes im Fall unendlicher Grenzen oder der verschiedenen Unstetigkeiten, die $f(x)$ in einzelnen Punkten des Integrationsintervalls annehmen kann.

Die angedeutete Herleitungsweise kann aber unserem Strengebedürfniss nicht genügen. Denn will man sich auch die Beschränkung auf Functionen gefallen lassen, deren Bild die Flächen anschaulich begrenzt, so ist diese Bestimmung selbst keine deutlich formulirbare, da doch sogar stetige Functionen, die analytisch definirt sind, im Allgemeinen kein geometrisches Aequivalent besitzen, welches als anschauliche Begrenzung von Flächenräumen gelten könnte. So bleibt uns nichts übrig, als auf die beweiskräftige Evidenz der Anschauung des Functionsbildes zu verzichten und einen rein analytischen Integralbegriff festzulegen. Nachdem *Dirichlet* den Anfang hierzu unter Annahme stetiger Integranden gemacht*), erweiterte *Riemann* den Spielraum integrirbarer Functionen bis an seine äusserste Grenze**). Soll nämlich $\Sigma \delta_p f_p$ einen und nur einen Limes haben, wie auch die Theilintervalle δ_p gegen Null abnehmen mögen und wo auch f_p im Intervall δ_p

---

*) *Ferd. Meyer,* Vorles. über best. Int. etc., § 2.

**) Gesammelte mathematische Werke pag. 226.

gelegen sei, so muss offenbar $\Sigma\delta_p\sigma_p$, wenn σ_p die Schwankung der Function $f(x)$ im Intervall δ_p bezeichnet, den Limes Null haben. Allerdings ist noch zu zeigen, dass umgekehrt aus $\lim\Sigma\delta_p\sigma_p = 0$ der eindeutige Limes $\Sigma\delta_p f_p$ folgt, was von mir und anderen nachgetragen worden ist. Auf diese Definition des Integrals und der integrirbaren Function ist sodann die Integralrechnung zu gründen.

Man wird gegenwärtig nicht viel Lücken mehr in dieser Neubegründung antreffen, nachdem der Fundamentalsatz erledigt*) und die Bedingungen, unter welchen Functionen integrirbarer Functionen integrirbar sind, festgestellt wurden**). Was den Sinn des Integrals im Falle unendlicher Grenzen oder diverser Singularitäten anlangt, so wird er in der strengen Theorie nicht anders als in der elementaren erklärt.

Die Theorie der Doppelintegrale ist dagegen noch nicht zu solcher Durchführung gediehen. Auch hier ist eine elementare und eine strenge Begründung zu unterscheiden, doch bemerke ich sofort, dass die unter beiden Hypothesen nach denselben Principien zu untersuchende Bedeutung der Doppelintegrale im Falle unendlicher Grenzen oder besonderer Singularitäten des Integranden hier einen zusammengesetzteren Charakter annimmt, weshalb wir sie nach Gegenüberstellung der beiden Begründungsweisen eingehender besprechen wollen.

2.

Das Doppelintegral ging aus dem Bedürfniss der Cubatur hervor, und zwar zugleich seine Form als *Doppelintegral*,

$$J = \int_{X_0}^{X}\int_{Y_0}^{Y} dx\, dy\, f(x, y)$$

und seine *gleichwerthigen* Formen als *zweimalige* Integrale:

$$J_{yx} = \int_{X_0}^{X} dx \int_{Y_0}^{Y} dy\, f(x, y), \quad J_{xy} = \int_{Y_0}^{Y} dy \int_{X_0}^{X} dx\, f(x, y),$$

die sich zur Ausrechnung eignen. Diese Aequivalenz leuchtet in der That ein, wenn man von dem Volumbegriff ausgeht, und die Fläche $z = f(x, y)$

*) Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung, Leipz. Ann. XVI. Bd., pag. 115.

**) Leip. Ann. XX. Bd., pag. 122.

anschauliche Begrenzung des prismatischen Volums V auf der rechteckigen Basis $X_0 Y_0$, XY sein kann. Dann werden im Doppelintegral die Elementarprismen $dx\,dy\,f(x,y)$, in den zweimaligen Integralen die Elementarplatten $dx\int_{Y_0}^{Y} dy\,f(x,y)$ resp. $dy\int_{X_0}^{X} dx\,f(x,y)$ addirt, und liefern augenscheinlich alle drei dasselbe Volum V.

Was den Fundamentalsatz:

$$\int_{X_0}^{X}\int_{Y_0}^{Y} dx\,dy\,f(x,y) \;=\; F(X,Y)-F(X_0,Y)-F(X,Y_0)+F(X_0,Y_0)$$

für $f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ betrifft, so beweist man ihn entweder direct so. Die geometrische Vorstellung ergiebt die Gleichheit von

$$\frac{\partial^2 F(X,Y)}{\partial X \partial Y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}\int_{X_0}^{X}\int_{Y_0}^{Y} dx\,dy\,f(x,y).$$

Mithin ist:

$$\int_{X_0}^{X}\int_{Y_0}^{Y} dx\,dy\,f(x,y) \;=\; F(X,Y)+\varphi(X)+\psi(Y).$$

Hieraus folgen die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} F(X_0,Y)+\varphi(X_0)+\psi(Y) &= 0,\\ F(X,Y_0)+\varphi(X)+\psi(Y_0) &= 0,\\ F(X_0,Y_0)+\varphi(X_0)+\psi(Y_0) &= 0, \end{aligned}$$

woraus der Fundamentalsatz sich ergiebt. Oder man beweist ihn durch Bildung der zweimaligen Integrale, und indem man ihn für einfache Integrale voraussetzt.

Aus dem Begriff des Doppelintegrals entsteht der allgemeinere des *Flächenintegrals*

$$\int dE\,f(x,y)$$

bei welchem an die Stelle der rechteckigen Begrenzung der Volumbasis irgend eine krummlinige tritt und an Stelle des Elementes der Basis $dx\,dy$ irgend ein anderes dE. Die Basis braucht weder einfach zusammenhängend noch eindeutig zu sein. Auch das Flächenintegral kann als zweimaliges Integral dargestellt werden, nur sind dann die Grenzen des inneren Integrals Functionen der Variabeln der zweiten Integration. Daher nannte *Richelot* (Vorlesung über Mechanik) die Doppelintegrale und die Flächen-

integrale Doppelintegrale mit unabhängigen resp. mit abhängigen Grenzen. Ich habe jedoch die hier angewandten Ausdrücke vorgezogen, gerade um das zweimalige Integral als blosse analytische Umformung in den Hintergrund zu stellen. ***Denn das Wesen des Doppel- oder Flächenintegrals besteht darin, dass es über ein Areal genommen wird, dass sein Summand ein prismatisches Volum mit nach jeder Dimension unendlich kleiner Basis ist.*** Nur indem dies consequent festgehalten wird, kann die Theorie des Doppel- und Flächenintegrals correct und ungezwungen durchgeführt werden, wie man an Beispielen erkennen wird.

Der Fundamentalsatz tritt bei den Flächenintegralen auf als Ueberführung des Flächenintegrals

$$\int dE \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

in die Randintegrale

$$\int ds \frac{dy}{ds} \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{oder} \quad -\int ds \frac{dx}{ds} \frac{\partial F}{\partial x},$$

welche ihrerseits, wenn die Begrenzung ein den Coordinaten paralleles Rechteck ist, in das viergliedrige Aggregat im Fundamentalsatze des Doppelintegrals übergehen.

3.

Die strenge Begründung der vorstehenden elementaren Theorie der Doppelintegrale wird an die allgemeinere Form des Flächenintegrals anzuknüpfen haben, und ihre Hauptaufgaben werden sein, seine Aequivalenz mit zweimaligen Integralen und den Fundamentalsatz festzustellen.

Wir denken uns das Gebiet E in Theilgebiete dE_p zerlegt, deren grösste Durchmesser bei ihrer fortgesetzten Verkleinerung unter jede Grenze sinken. Soll alsdann die Summe

$$\int dE_p f_p$$

eine und nur eine Grenze haben, wie auch das Eintheilungsprincip dE_p gewählt und wo auch die Functionswerthe f_p in den Arealen dE_p gelegen sein mögen, so muss wieder

$$\Sigma\, dE_p \sigma_p,$$

unter σ_p die Schwankung der Function $f(x, y)$ im Areal dE_p verstanden, den Limes Null haben. Die Umkehrung dieser Bedingung hat Herr *Thomae* bewiesen, der sie auch meines Wissens zuerst ausgesprochen hat*).

*) *Schlömilchs* Zeitschr. XXI. Bd., pag. 224.

Schwierigkeiten macht, wenn man sie direct in Angriff nimmt, die Reduction der Flächen- oder Doppelintegrale auf zweimalige Integrale. Doch kann man sie leicht bewerkstelligen mit Hülfe meines Satzes von den simultanen und successiven Grenzwerthen, welcher, so weit er hier in Anwendung kommt, lautet*): Wenn eine Abhängigkeit $\varphi(\alpha, \beta)$ bei unbegrenzter gleichzeitiger Abnahme von α und β eine Grenze G hat, wie klein auch das Verhältniss von α zu β bei der Abnahme von β werden mag, so hat man ebenfalls $\lim_{\beta=0}(\lim_{\alpha=0}\varphi(\alpha, \beta)) = G$. Betrachten wir, um unnöthige Allgemeinheiten zu vermeiden, ein Doppelintegral:

$$J = \lim_{\varDelta x=0,\, \varDelta y=0} \Sigma_p \Sigma_q \varDelta x \varDelta y f(x+p\varDelta x+\xi_{pq},\, y+q\varDelta y+\eta_{pq}),$$

wo $0 \leqq \xi_{pq} \leqq \varDelta x$, $0 \leqq \eta_{pq} \leqq \varDelta y$. Setzen wir es gleich $\varphi(\varDelta x, \varDelta y)$, so können wir auf Grund der Integrirbarkeitsbedingung den vorstehenden Satz unmittelbar darauf anwenden, und erhalten:

$$J_{xy} = \lim_{\varDelta y=0} \Sigma_q \varDelta y \lim_{\varDelta x=0} \Sigma_p \varDelta x f(x+p\varDelta x+\xi_{pq},\; y+q\varDelta y+\eta_{pq}).$$

Dies ist zwar sehr einfach geschlossen. Aber das Ergebniss ist sehr umfassend, denn in dem so erhaltenen zweimaligen Integral $\int_{Y_0}^{Y} dy \int_{X_0}^{X} dx f(x, y)$ kann die Function $\int_{X_0}^{X} dx f(x, y)$ von y irgend eine integrirbare Function sein, braucht also z. B. nur pantachisch feste Werthe zu haben, und kann pantachisch zwischen solchen Grenzen unbestimmt sein, die eine Integration zulassen.

Ein ganz einfaches Beispiel hierfür bietet eine Function $f(x, y)$ die Null ist, ausser für dyadische Werthe von x und y. Für $x = \frac{2m+1}{2^p}$, $y = \frac{2n+1}{2^q}$ sei $f(x, y) = \frac{1}{2^p}$. Ihr Doppelintegral über das rechteckige Gebiet mit den Diagonalecken $x = 0$, $y = 0$, und $x = 1$, $y = 1$ ist Null und ebenso das innere Integral in

$$J_{xy} = \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x, y).$$

---

*) Zwei Sätze über Grenzwerthe von Functionen zweier Veränderlichen, Leipz. Ann. XI. Bd., pag. 145. Aehnlich kann man Herrn *Kroneckers* Integralsatz (Monatsberichte 1878, pag. 54), der eine Bedingung angiebt, unter welcher aus $\lim_{\sigma=0}\varphi(\varrho, \sigma) = 0$ folgt $\lim_{\sigma=0}\int_a^b \varphi(\varrho, \sigma)d\varrho$, auch so auffassen, dass, $\int_a^b \varphi(\varrho, \sigma)d\varrho = \chi(\sigma, d\varrho)$ gesetzt, er lehrt, unter welchen Umständen die Grenzübergänge $\sigma=0$, $d\varrho=0$ in $\lim_{\sigma=0,\, d\varrho=0}\chi(\sigma, d\varrho)$ vertauscht werden können.

Dagegen ist das innere Integral in

$$J_{yx} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy\, f(x, y)$$

für Werthe von x der Form $\frac{2m+1}{2^p}$ unbestimmt zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2^p}$, das zweimalige Integral J_{yx} selbst aber ist Null.

Da solches Verhalten unter die Voraussetzungen aufgenommen werden muss, scheint in der That ein directer Nachweis der Gleichwerthigkeit des Doppelintegrals mit den ihm zugehörigen zweimaligen Integralen schwierig, und der oben gegebene, der über den allgemeinen Grenzwerthsatz führt, der natürliche.

Aehnliches gilt vom Fundamentalsatz:

$$\int_{X_0}^{X}\int_{Y_0}^{Y} dx\, dy \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F(X, Y) - F(X_0, Y) - F(X, Y_0) + F(X_0, Y_0);$$

auch seine directe Herleitung scheint sehr schwierig, namentlich wegen des zweiten Differentialquotienten. Wenn man aber die vorstehende Reduction auf zweimalige Integrale voraussetzt, so kann man auf jede der successiven Integrationen die Betrachtungen meiner oben citirten Abhandlung (S. 275.) anwenden, indem der zweite Differentialquotient als Differentialquotient eines Differentialquotienten behandelt wird. Ich lasse es bei dieser Hinweisung bewenden, deren genauere Ausführung keinen weiteren Bedenken unterliegt.

Es sei noch erwähnt, dass ein von Herrn *Thomae* zu anderem Zwecke gegebenes Beispiel*) zeigt, wie ein zweimaliges Integral J_{xy} existiren kann, ohne dass das Doppelintegral J und das zweimalige Integral J_{yx} existirt. Der Integrand erfüllt alsdann natürlich auch nicht die Integrirbarkeitsbedingung für zwei Variabeln. Man kann also nicht von der Existenz eines zweimaligen Integrals auf die des Doppelintegrals schliessen, wie es umgekehrt möglich ist.

4.

Die Theorie der Convergenz der Doppelintegrale ist naturgemäss weitaus zusammengesetzter, wie die der einfachen. Es treten bei jenen Singularitäten auf, die kein Analogon bei diesen besitzen. Wir haben nicht entfernt die Absicht, uns hier in diese Theorie zu vertiefen. Es handelt

*) *Schlömilchs* Zeitschr. XXIII. Bd., pag. 67.

sich nur um einige ganz allgemeine, ja oberflächliche Vorbemerkungen, die indessen, wie es scheint, nicht überflüssig sind. Zu diesem Zweck ist es nicht nöthig, hinsichtlich des Charakters der Function $f(x, y)$ die allgemeinste Voraussetzung zu machen, sondern es genügt, sie mit Ausnahme von Punkten und Linien stetig anzunehmen.

Wir nehmen als Gebiet G, über welches das Flächenintegral zu nehmen ist, ein solches an, das eindeutig, einfach zusammenhängend ist, sich aber theilweise oder nach allen Richtungen ins Unendliche erstrecken kann. Dem Gebiet G oder seinen Begrenzungen mögen Punkte oder Linien angehören, in denen $f(x, y)$ unendlich wird. Dann ist, allen Analogien folgend, unter dem über G genommenen Flächenintegral:

$$J = \int dE f(x, y)$$

Folgendes zu verstehen. Es wird ein dem Gebiet G angehöriges Gebiet G_1 gebildet, das sich bis zu Begrenzungen erstreckt, welche die Unstetigkeitspunkte und Linien umlaufen, wenn sie im Innern von G liegen, und die alten Begrenzungen auf geeignete Weise ersetzen, wenn die Unstetigkeit auf ihnen gelegen. Ausserdem werde auch das Unendliche durch dergleichen neue Begrenzungen ausgeschlossen, so dass G_1 durchweg im Endlichen liegt, und innerhalb G_1 die Function $f(x, y)$ durchweg stetig ist. Die Begrenzungen von G_1, die nicht mit solchen von G zusammenfallen, denkt man sich in der Art beweglich, dass sie die Unstetigkeitsstellen immer enger umschliessen können, oder immer weiter in den Richtungen hinausrücken können, in welchen G ins Unendliche ragt, und zwar mit der Bestimmung, *dass bei dieser Bewegung der neuen Begrenzungen schliesslich jeder Punkt von G, in dem $f(x, y)$ stetig ist, von G_1 aufgenommen wird.* Da ich der Kürze halber für die Begrenzungen von G_1, die nicht zugleich Begrenzungen von G sind, einen Namen brauche, so will ich sie *kritische Begrenzungen**) nennen. Unter dem Integral J über das Gebiet G kann man

---

*) In seiner bisher nur im Auszuge in den Monatsberichten vom Jahre 1869 pag. 159 mitgetheilten Untersuchung: *Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln* führt Herr *Kronecker* (pag. 187) für dergleichen Begrenzungen die Bezeichnung: „natürliche Begrenzungen" ein. Wenn ich im Texte einen andern Namen wählte, so geschah dies aus dem Grunde, dass es sich in der That nicht um dasselbe handelt. Die Integrale, welche Herr *Kronecker* a. a. O. in den Bereich seiner Betrachtungen zieht, sind solcher Art, dass auf die Form der neuen Begrenzungen nichts ankommt, sie sind *absolut* convergent. In dem allgemeinen hier betrachteten Falle wird nicht vorausgesetzt, dass das Integral des Integrandenmoduls endlich sei, und dann hängt,

nichts anderes verstehen als den Limes des über das Gebiet G_1 genommenen Integrals J_1, wenn die kritischen Begrenzungen sich in der vorgeschriebenen Weise verengern, beziehlich erweitern.

Legen wir für's erste den einfachen Fall nur eines Unstetigkeitspunkts p zu Grunde, und zwar im Innern von G, das im Endlichen liegen mag. Dann werden die kritischen Begrenzungen eine Linie, die p umläuft, und bei deren Verengerung das Areal des Gebietes, in dem p liegt, gegen Null abnimmt. Die kritischen Begrenzungen können aber auch z. B. zwei parallele bis an die Randcurve von G erstreckte Geraden sein, in welchem Falle das Gebiet von p zum Theil noch durch Stücke jener Randcurve begrenzt wird. Nun denke man sich die kritische Begrenzung in zwei Stadien ihrer Verengerung. Ich bezeichne mit j das Flächenintegral über dem Areal zwischen jenen zwei kritischen Begrenzungen, und nenne es ***Residuum.*** Wenn das Residuum Null zur Grenze hat, wie auch die beiden kritischen Begrenzungen sich unabhängig von einander der Grenze nähern mögen, ist das Integral convergent, andernfalls divergent. Es folgt noch, im Falle der Convergenz, ***dass der Theil von*** $\lim J_1$, ***der innerhalb der kritischen Begrenzung liegt, bei deren Verengerung unter jede Grenze sinkt.*** Ganz wie in der Reihentheorie werden wir eine absolute und eine bedingte Convergenz zu unterscheiden haben, welche letztere das allgemeinere Vorkommen sein wird. Wenn $f(x, y)$ positiv und das Integral convergent ist, so ist die Convergenz bedingungslos, d. i. unabhängig von der Gestalt der kritischen Begrenzungen. Ebenso wird $\int dE f(x, y)$ bedingungslos convergent sein, wenn $\int dE \bmod f(x, y)$ convergirt. Ist dies nicht der Fall, so ist der Werth des Integrals von der Gestalt der kritischen Begrenzung abhängig, weil diese das Verhältniss bestimmt, in welchem nach und nach positives und negatives Volum, dessen beziehentlicher Vorrath in der Umgebung von p unbegrenzt gross ist, zum Integral hinzutritt.

Die umgekehrte Definition, dass die Convergenz bedingt oder unbedingt ist, je nachdem der $\lim J_1$ von der Gestalt der kritischen Begrenzungen

---

wie im Text näher erörtert wird, der Werth des Integrals ab von der Gestalt der neu eingeführten Begrenzungen; diese ***entscheiden*** über den Grenzwerth des Integrals, welches somit, um mit Herrn ***Kronecker*** zu reden, ein ***uneigentliches*** ist. Diesen über den Werth des Integrals entscheidenden Charakter der neuen Begrenzungen soll das Beiwort „kritisch" andeuten.

unabhängig ist oder nicht, stimmt, wie einiges Nachdenken lehrt, völlig mit der vorigen überein.

Die Natur der Aufgabe wird die Wahl der kritischen Begrenzungen bestimmen. Z. B. treten bekanntlich in der complexen Functionentheorie Doppelintegrale auf, die bei etwaigen Unstetigkeiten für beliebige kritische Begrenzungen ein convergentes Resultat, nämlich ein gewisses Randintegral, ergeben müssen. Hier also wird absolute Convergenz verlangt. Die Mehrzahl der Doppel- oder Flächenintegrale jedoch, die in den Anwendungen vorkommen, sind bedingt convergent, so dass ihr Werth von der Gestalt der kritischen Begrenzungen abhängt.

Betrachten wir nun z. B. ein Kreisintegral

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} dr\, d\varphi\, f(r, \varphi),$$

wo $f(r, \varphi)$ irgendwo auf der Kreisperipherie $r = R$ unendlich wird, so kann es den Bedingungen einer Aufgabe angemessen sein, es als

$$\lim_{r=R} \int_0^r \int_0^{2\pi} dr\, d\varphi\, f(r, \varphi)$$

aufzufassen, als kritische Begrenzung also einen Kreis $r < R$ zu nehmen. So wird die kritische Begrenzung eines Integrals

$$\int_0^\infty \int_0^\infty dx\, dy\, f(x, y)$$

den Linien $x = X$, $y = Y$ angehören, unter X und Y hinreichend grosse Werthe verstanden, und wenn man das Integral auf Polarcoordinaten transformirt, wird man immer besonders nachweisen müssen, dass die kritische Begrenzung auch ein Kreisbogen sein darf.

Wenn es sich um ein *Doppelintegral* mit Unstetigkeiten des Integranden handelt, dessen Gebiet G also ein den x, y paralleles Rechteck ist, so wird das Natürliche sein, es als Grenze wieder von Doppelintegralen anzusehen, und als Gebiet G_1 wiederum den x, y parallele Rechtecke zu wählen, obgleich besondere Aufgaben selbstverständlich auch andere Festsetzungen erheischen können.

Bei einem Doppelintegral mit unendlichen Grenzen z. B.

$$\int_1^\infty \int_1^\infty dx\, dy\, f(x, y)$$

wird wohl jeder Leser sogleich an den Limes

$$\int_1^X \int_1^Y dx\,dy\,f(x, y)$$

für $X = \infty$, $Y = \infty$ denken. Da nun dieses Integral mit

$$\int_{\frac{1}{X}}^1 \int_{\frac{1}{Y}}^1 \frac{dx\,dy}{x^2 y^2} f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

identisch ist, so wird man consequenter Weise

$$\int_0^1 \int_0^1 dx\,dy\,f(x, y),$$

wenn $f(0, 0)$ unendlich ist, als den Limes für $\xi = 0$, $\eta = 0$ von

$$\int_\xi^1 \int_\eta^1 dx\,dy\,f(x, y)$$

auffassen müssen. Falls also $f(x, y)$ nur im Punkt 0, 0 unstetig ist, und G das Rechteck 0, 0 ... 1, 1 bildet, so ist es als Limes des Rechtecks ξ, η ... 1, 1, welches G_1 sei, anzusehen. Der Punkt ξ, η kann auf unzählige Weise in den Punkt 0, 0 übergehen, und so kommt augenscheinlich, wenn in der Umgebung des Punktes 0, 0 im positiven Quadranten sowohl das positive als das negative Volum $\int dE f(x, y)$ unbegrenzt gross ist, eine grosse Mannigfaltigkeit von Werthen des Doppelintegrals zum Vorschein. Besonders hervorragende Werthe erhält man, indem man erst das Rechteck 0, η ... 1, 1 bildet und dann η Null werden lässt, oder erst das Rechteck ξ, 0 ... 1, 1 bildet und dann ξ verschwinden lässt. Es wird also in diesen beiden extremen Fällen

$$\int_0^1 \int_0^1 dx\,dy\,f(x, y)$$

entweder als

$$\lim\nolimits_{\eta=0} \int_0^1 \int_\eta^1 dx\,dy\,f(x, y),$$

oder als

$$\lim\nolimits_{\xi=0} \int_\xi^1 \int_0^1 dx\,dy\,f(x, y)$$

aufgefasst. Die beiden vorstehenden Doppelintegrale besitzen einen in ihrem Summationsgebiet durchweg stetigen Integrand. Sie können daher auch jedes in zweifacher Weise als zweimalige Integrale geschrieben werden,

so dass die vorstehenden Werthe werden:

$$\lim_{\eta=0}\int_\eta^1 dy\int_0^1 dx f(x,y), \quad \lim_{\xi=0}\int_\xi^1 dx\int_0^1 dy f(x,y),$$

die durchaus verschieden sein können*).

5.

Hiermit ist die Beziehung von Doppelintegralen, die wegen unendlicher Grenzen oder Unstetigkeiten des Integranden als Grenzen gewöhnlicher Doppelintegrale (die schlechtweg Grenzen von Doppelsummen sind) aufgefasst werden müssen, zu den zugehörigen zweimaligen Integralen ins rechte Licht gesetzt, und es erübrigt, diese Dinge durch geeignete Beispiele zu beleuchten. Wir wählen deren zwei. Ein altbekanntes mit einem Unstetigkeits*punkt* des Integranden und ein anderes mit einer Unstetigkeits*linie*.

An dem Integral

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} dx\,dy\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

entdeckte *Cauchy* die Thatsache, dass die Integrale

$$\int_{X_0}^{X} dx\int_{Y_0}^{Y} dy f(x,y), \quad \int_{Y_0}^{Y} dy\int_{X_0}^{X} dx f(x,y)$$

mitunter verschiedene Werthe haben**). Statt des *Cauchy*schen Integrals, bei dem der Unstetigkeitspunkt im Innern liegt, betrachten wir einen Theil davon:

$$J=\int_0^X\int_0^Y dx\,dy\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

bei dem er in der (0, 0)-Ecke liegt, und die oberen Grenzen willkürlich

*) pag. 987 und 988 des in der ersten Anmerkung pag. 273 citirten Artikels aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen ist wörtlich zu lesen:

... „Wird z. B. eine sonst im Integrationsgebiete G stetige und endliche Function zweier Variabeln $f(x,y)$ an einer Stelle X_0, Y_0 unendlich, so schliesse man von G ein kleines Flächenstück aus, welches die Stelle X_0, Y_0 enthält. Wenn das Integral über den übrig bleibenden Theil von G erstreckt einer festen Grenze A zustrebt, wie man auch das ausgeschlossene Flächenstück bis zum Verschwinden verkleinert, so versteht man unter A den Werth des über das Gebiet G erstreckten Doppelintegrals. *Andernfalls hat das Integral keine Bedeutung.*" Dem wird der im Texte und in meinen älteren Arbeiten angegebene Sinn des bedingt convergenten Doppelintegrals gegenübergestellt, und gesagt: „Die Folgen einer solchen Definition ... treten denn auch bald hervor". Mit diesen „Folgen" ist die Abhängigkeit des Werthes des Doppelintegrals von der Gestalt der kritischen Begrenzungen gemeint.

**) Mémoires des Savants étrangers I.

bleiben. Dieses Integral ist übrigens gleich:

$$\int_{\frac{1}{X}}^{\infty}\int_{\frac{1}{Y}}^{\infty} dx\, dy \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Um J auszuwerthen, hat man:

$$f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right),$$

und da x und y positiv sind, ist $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\frac{\pi}{2}$.

Aus dem zweiten und dritten Ausdruck für $f(x,y)$ folgt:

$$J_{yx} = \int_0^X dx \int_0^Y dy\, f(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{X}{Y},\quad J_{xy} = \int_0^Y dy \int_0^X dx\, f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{Y}{X}.$$

Es ist also

$$J_{xy} - J_{yx} = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn man die zweimaligen Integrale so ausrechnet, wie hier angedeutet, so ist dagegen Nichts einzuwenden. Es wird z. B. $\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}$ nach y unbestimmt integrirt, dann werden die Grenzen 0 und Y dieser Integration eingesetzt, und dann wird nach x integrirt, und endlich die Grenzen der Integration nach x eingesetzt. Dies ist correct; was aber nicht correct ist, und es ist dies nicht ganz unwesentlich, das ist die Schreibweise

$$\int_0^X dx \int_0^Y dy\, f(x,y).$$

Dies zweimalige Integral hat keinen Sinn, weil unter den Werthen von x, für welche das innere Integral zu bilden ist, Null vorkommt. Für $x=0$ wird das innere Integral

$$\int_0^Y dy \frac{y^2}{y^4},$$

ist also unendlich. Soll das innere Integral existiren, so muss $x > 0$ sein. Bei der obigen Ausrechnung wird dieser Fehler dadurch vermieden, dass bei der Integration von $\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}$ x formal in den Ausdrücken stehen bleibt, was darauf hinausläuft, x von Null verschieden anzunehmen, wie es eben auch sein muss. Die einwurfsfreie Schreibweise des zweimaligen

Integrals ist daher:

$$\lim_{\xi=0} \int_\xi^X dx \int_0^Y dy\, f(x, y).$$

Dann aber ist es identisch mit dem Limes des Doppelintegrals:

$$\int_\xi^X \int_0^Y dx\, dy\, f(x, y)$$

über das Rechteck ξ, $0 \ldots X$, Y. Somit werden wir mit Nothwendigkeit auf die oben entwickelte Auffassung hingedrängt.

Das Integral J ist bedingt convergent. Denn bilden wir das Volum über den Viertelkreis im positiven Quadranten mit dem Radius r und dem Mittelpunkt 0, 0, so zerfällt es in den negativen und positiven Theil $x \gtrless y$. In Polarcoordinaten werden diese Volumina

$$-\int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\varphi}{r}\, dr\, d\varphi \quad \text{und} \quad -\int_0^r \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi}{r}\, dr\, d\varphi,$$

die beide unendlich sind. Hiernach kann das Residuum jeden positiven und negativen Werth zur Grenze haben. Sieht man das Doppelintegral

$$\int_0^X \int_0^Y dx\, dy\, f(x, y),$$

allgemein zu reden, als Grenze dieses

$$\int_\xi^X \int_\eta^Y dx\, dy\, f(x, y)$$

an, so ist das Residuum der Unterschied zweier solcher Integrale für zwei Werthepaare ξ, η. Nun ist allgemein:

$$\int_{X_0}^X \int_{Y_0}^Y dx\, dy\, f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} - \operatorname{arctg} \frac{Y_0}{X} - \operatorname{arctg} \frac{Y}{X_0} + \operatorname{arctg} \frac{Y_0}{X_0} = \Big|_{X_0}^{X} \Big|_{Y_0}^{Y} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Wendet man diese Formel auf jenen Unterschied an, so wird er

$$\Big|_{\xi_1}^{\xi_2} \Big|_{\eta_2}^{Y} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \Big|_{\xi_2}^{X} \Big|_{\eta_1}^{\eta_2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} \Big|_{\eta_1}^{\eta_2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\eta_1}{\xi_1} - \operatorname{arctg} \frac{\eta_2}{\xi_2} + \left[\operatorname{arctg} \frac{Y}{\xi_2} - \operatorname{arctg} \frac{Y}{\xi_1} - \operatorname{arctg} \frac{\eta_1}{X} + \operatorname{arctg} \frac{\eta_2}{X}\right].$$

Wenn $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$ verschwinden, ist Null der Limes der Klammer. Der Theil

$$\operatorname{arctg} \frac{\eta_1}{\xi_1} - \operatorname{arctg} \frac{\eta_2}{\xi_2}$$

des Residuums entscheidet also über Convergenz und Divergenz.

Es ergiebt sich, wie übrigens aus dem Fundamentalsatz zu ersehen, dass das Residuum verschwindet, wenn $\lim \frac{\eta}{\xi}$ bestimmt (incl. ∞) ist. Der Werth des Doppelintegrals J ist

$$\operatorname{arctg} \frac{Y}{X} + \lim \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} - \frac{\pi}{2}.$$

Die zweimaligen Integrale entsprechen den Fällen zuerst $\eta = 0$ und ξ nicht $= 0$, und zuerst $\xi = 0$ und η nicht $= 0$. Nachher verschwinden ξ resp. η.

6.

Das zweite Beispiel besteht in einer Umformung des Doppelintegrals der *Fourier*schen Formel. Wir setzen

$$\pi f(x) = \int_0^\infty d\alpha \int_a^b d\beta f(\beta) \cos[\alpha(\beta - x)] = \int_0^1 d\gamma \int_a^b d\beta f(\beta) \frac{\cos \gamma \frac{\beta - x}{1-\gamma}}{(1-\gamma)^2},$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{1-\gamma},$$

und es genügt den einfachen Fall zu betrachten, wo $x = 0$, $f(x) = 1$. Auch führen wir die Bezeichnungen dieses Aufsatzes ein, so dass es sich um das Integral:

$$J = \int_{X_0}^{X} \int_{Y_0}^{Y} dx\, dy \frac{\cos \frac{xy}{1-y}}{(1-y)^2}$$

handeln mag. Es wird $f(x, y) = \frac{\cos \frac{xy}{1-y}}{(1-y)^2}$ für $y = 1$ unstetig, dabei für $x = 0$ positiv unendlich, für andere Werthe von x und für $y = 1$ zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt. Weiter hat man:

$$f(x, y) = \frac{\cos \frac{xy}{1-y}}{(1-y)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin \frac{xy}{1-y}}{y(1-y)} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin \frac{xy}{1-y}}{x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^{\frac{xy}{1-y}} \sin u\, du$$

und

$$J = \Big|_{X_0}^{X} \Big|_{Y_0}^{Y} \int_0^{\frac{xy}{1-y}} \sin u\, du.$$

Das Rechteck $X_0, Y_0 \ldots X, Y$ darf zunächst die Unstetigkeitslinie $y = 1$ nicht enthalten, und mag, da $f(x, y)$ nach x symmetrisch ist, im positiven Quadranten liegen. Jenachdem wir nun das Rechteck erst bis zur y-Axe erstrecken ($X_0 = 0$ setzen) und dann bis zur Linie $y = 1$ ($Y = 1$ setzen), oder

umgekehrt verfahren, erhalten wir aus dem vorstehenden Ausdruck die Werthe

$$J_{xy} = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{XY_0}{1-Y_0}} \sin u \, dlu,$$

$$J_{yx} = -\int_0^{\frac{XY_0}{1-Y_0}} \sin u \, dlu.$$

Soweit ist alles dem ersten Beispiel analog. Ein besonderes Interesse wohnt diesem Beispiel inne, weil wegen der linearen Unstetigkeit man die vorstehenden Werthe von J_{xy} und J_{yx} nicht beide durch zweimalige Integrale ausdrücken kann. Setzen wir

$$J = \int_0^X \int_{Y_0}^1 dx\, dy\, f(x, y),$$

so hat man allerdings

$$J_{xy} = \int_{Y_0}^1 dy \int_0^X dx\, f(x, y) = \int_{\frac{Y_0}{1-Y_0}}^{\infty} \sin Xu \, dlu = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{XY_0}{1-Y_0}} \sin u \, dlu,$$

und es ist hierzu nur die oben bei der analogen Transformation im ersten Beispiel gemachte Bemerkung zu wiederholen, dass der Ausdruck J_{xy} correcterweise geschrieben werden müsste:

$$\lim_{\eta=1} \int_{Y_0}^{\eta} dy \int_0^X dx\, f(x, y),$$

oder dass man doch nicht vergessen darf, dass dies der Sinn von J_{xy} ist.

Das andere zweimalige Integral existirt aber überhaupt nicht. Denn bilden wir den Ausdruck

$$\int_0^X dx \int_{Y_0}^1 dy\, f(x, y),$$

so ist das innere Integral für jeden Werth von x divergent. Hier also erhält man den Werth des Doppelintegrals, das die Grenze eines gewöhnlichen Doppelintegrals ist, indem man beide Integrationen zuerst unbestimmt ausführt, um das Aggregat rechts im Fundamentalsatz zu bilden, und dann die Grenzen einsetzt, analog wie dies bei einfachen Integralen geschieht. Ein Doppelintegral, welches convergente Grenze eines solchen mit stetigem oder integrirbarem Integrand ist, braucht also die Reduction auf zweimalige Integrale nicht zu gestatten.

Wie oben betont, konnte das innere Integral $\int_{Y_0}^{Y} dy f(x, y)$, mit dx multiplicirt, nur dann als Bestandtheil des Doppelintegrals gelten, wenn es ein durch Summirung des Doppelintegralelementes entstandenes Volum ist. Dies ist hier eben nicht der Fall. Die Grössen:

$$\int_{x}^{x+dx} dx \int_{Y_0}^{Y} dy f(x, y) \quad \text{und} \quad dx \int_{Y_0}^{Y} dy f(x, y)$$

sind in diesem Falle total verschieden, wie klein dx auch sei.

Das Integral J ist natürlich wieder bedingt convergent, wie am Residuum leicht zu bestätigen. Ich zeige aber gleich direct, dass man ein Gebiet G_1, dessen Limes das Gebiet G (das Rechteck $0, Y_0 \ldots X, 1$) ist, dem Flächenintegral unterbreiten kann, so dass dieses an der Grenze unendlich wird. Das Gebiet G_1 setze ich zusammen aus den Theilen

$$\int_0^{x_0} dx \int_{Y_0}^{\frac{1}{1+\frac{x_0}{c}}} dy, \quad \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{Y_0}^{\frac{1}{1+\frac{x}{c}}} dy, \quad \int_{Y_0}^{1} dy \int_{x_1}^{X} dx, \qquad 0 < x_0 < x_1 < X.$$

Für $c = \infty$, oder $x_0 = 0$, $x_1 = 0$ geht dies Gebiet in das Rechteck $0, Y_0 \ldots X, 1$ über. Der Limes des Integrals über den ersten und dritten Gebietstheil ist nach dem Vorigen endlich. Weiter hat man:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{Y_1}^{\frac{1}{1+\frac{x}{c}}} dy \frac{\cos \frac{xy}{1-y}}{(1-y)^2} = \sin c . \log \frac{x_1}{x_0} - \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\sin x \frac{Y_0}{1-Y_0}}{x}.$$

Lassen wir c unendlich werden und zugleich x_0 und x_1 so verschwinden, dass $\lim \frac{x_1}{x_0} = \infty$, oder beschränken uns auf Letzteres, so wird der Limes des Integrals über G nach Belieben unbestimmt unendlich oder blos unendlich.

Als ich mit der Theorie der Doppelintegrale, zu denen das der *Fourier*schen Formel gehört, mich zu beschäftigen begann, suchte ich zunächst mit *Cauchy*s intégrales singulières mir zu helfen. Der Grund, weshalb man damit nicht viel ausrichten kann, ist die Mannigfaltigkeit der Schwankungen, die bei Annäherung an die Unstetigkeitsstellen möglich sind, und die doch bei allgemeineren Untersuchungen in Rechnung gezogen werden müssen. Ich änderte die *Cauchy*sche Analyse sodann dahin ab, dass ich

seinen intégrales singulières andere Begrenzungen gab. Wenn ich dabei auch zu keiner durchgreifenden Aufklärung über die Natur jener Doppelintegrale gelangte, so wurde ich doch durch diese Erweiterung der *Cauchy*schen Methode auf den geometrisch-anschaulichen Grund der manchmal sehr räthselhaften analytischen Eigenthümlichkeiten, welche manche Doppelintegrale zeigen, aufmerksam. Einige Resultate dieser Untersuchung habe ich im IV. Capitel meiner Abhandlung: Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Classe von Doppelintegralen etc. dieses Journal, Bd. 69, pag. 99 ff. mitgetheilt. Aus dem Wirrsal dieser Probleme befreite mich der anscheinend sehr nahe liegende Gedanke, auf die Doppelintegrale die spätere *Cauchy*sche Definition des einfachen Integrals, das entweder unendliche Grenzen hat, oder dessen Integrand unendlich wird, anzuwenden, ein Weg, der auch von *Dirichlet* mit grosser Schärfe vorgezeichnet war*). Ich sagte eben „anscheinend", da, als ich seiner Zeit eine auf diese Principien gegründete Discussion des Doppelintegrals nicht weiter rechtfertigte, ich nicht ahnte, dass ich sie nach funfzehn Jahren gegen Angriffe wie die in der Titelanmerkung erwähnten vertheidigen zu müssen in die Lage versetzt werden könnte.

*) Abhandlungen der Berliner Akademie 1839, pag. 63, § 1.

Tübingen, October 1882.

Eigenschaften der algebraisch-logarithmischen Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Wien.)

Wenn die lineare nicht homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(1.)\qquad \frac{d^m z}{dx^m}+Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\cdots+Y_{m-1}\frac{dz}{dx}+Y_m z = y,$$

in welcher $Y_1, Y_2, \ldots Y_m, y$ algebraische Functionen bedeuten mögen, ein algebraisches Integral besitzt, so wird dasselbe*), vorausgesetzt, dass die reducirte Differentialgleichung

$$(2.)\qquad \frac{d^m z}{dx^m}+Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\cdots+Y_{m-1}\frac{dz}{dx}+Y_m z = 0,$$

gar keine oder nur solche algebraischen Integrale besitzt, welche rational durch $x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ und y ausdrückbar sind, rational aus eben diesen Grössen zusammengesetzt sein. Sei nun y eine irreductible algebraische Function, welche für einen Umkreis des x, für welchen die Functionen $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ unverändert bleiben, in ein Multiplum des früheren Werthes übergeht, welches dann bekanntlich**) eine Einheitswurzel sein muss, so dass y einer Gleichung von der Form genügt

$$(3.)\qquad y^{\varkappa\mu}+\varphi_\mu(x, Y_1, \ldots Y_m)y^{(\varkappa-1)\mu}+\cdots+\varphi_{\varkappa\mu}(x, Y_1, \ldots Y_m) = 0,$$

so wird sich jenes algebraische Integral der Differentialgleichung (1.) in die Form setzen lassen

$$(4.)\qquad \begin{cases} z = \psi_0(x, Y_1, \ldots Y_m)+\psi_1(x, Y_1, \ldots Y_m)y+\psi_2(x, Y_1, \ldots Y_m)y^2+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+\psi_{\varkappa\mu-1}(x, Y_1, \ldots Y_m)y^{\varkappa\mu-1}, \end{cases}$$

---

*) s. pag. 189 meiner: „Allgem. Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen", Teubner 1882.

**) vergl. § 14 und § 15 des eben genannten Werkes.

worin die Functionen $\psi_0, \psi_1, \dots \psi_{\varkappa\mu-1}$ rationale Functionen der in den Klammern befindlichen Grössen bedeuten. Da nun der Werth (4.) von z und die aus demselben gebildeten Differentialquotienten, welche sich vermöge der die Grössen $Y_1, \dots Y_m$ und y definirenden algebraischen irreductibeln Gleichungen rational durch eben diese Grössen ausdrücken lassen, in die Differentialgleichung (1.) eingesetzt, dieselbe identisch befriedigen müssen, das Resultat dieser Substitution aber als eine algebraische Gleichung in y aufgefasst werden kann, deren Coefficienten rational aus x, $Y_1, \dots Y_m$ zusammengesetzt sind, so werden diesem Resultate bekanntlich alle Lösungen der mit Adjungirung der Grössen $x, Y_1, \dots Y_m$ irreductibeln Gleichung (3.) genügen müssen; anders ausgedrückt, es werden alle Werthe von z, welche man aus (4.) erhält, wenn man statt y alle Lösungen der Gleichung (3.) setzt, particuläre algebraische Integrale der Differentialgleichung (1.) sein, wenn in der letzteren die rechte Seite y durch die entsprechende Lösung der Gleichung (3.) ersetzt wird. Sei nun

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}},$$

so wird also

$$(5.)\quad z_1 = \psi_0(x, Y_1, \dots Y_m) + \varepsilon\psi_1(x, Y_1, \dots Y_m)y + \dots + \varepsilon^{\varkappa\mu-1}\psi_{\varkappa\mu-1}(x, Y_1, \dots Y_m)y^{\varkappa\mu-1}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$(6.)\qquad \frac{d^m z_1}{dx^m} + Y_1\frac{d^{m-1}z_1}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1}\frac{dz_1}{dx} + Y_m z_1 = \varepsilon y$$

sein, und somit aus (1.) und (6.) folgen, dass die reducirte Differentialgleichung (2.) das Integral besitzt

$$(7.)\qquad Z = z - \varepsilon z_1$$

oder

$$(8.)\quad \begin{cases} Z = (1-\varepsilon)\psi_0(x, Y_1, \dots Y_m) + (\varepsilon^2-\varepsilon)\psi_2(x, Y_1, \dots Y_m)y^2 + \dots \\ \qquad \dots + (\varepsilon^{\varkappa\mu-1}-\varepsilon)\psi_{\varkappa\mu-1}(x, Y_1, \dots Y_m)y^{\varkappa\mu-1}; \end{cases}$$

wird nun aber angenommen, dass die reducirte Differentialgleichung entweder gar keine algebraischen oder nur in $x, Y_1, \dots Y_m$ rational ausdrückbare algebraische Integrale haben soll, — eine Annahme, welche sich mit der oben gemachten verträgt —, so muss

$$(9.)\qquad (1-\varepsilon)\psi_0 + (\varepsilon^2-\varepsilon)\psi_2 y^2 + \dots + (\varepsilon^{\varkappa\mu-1}-\varepsilon)\psi_{\varkappa\mu-1}y^{\varkappa\mu-1} = \chi$$

sein, worin χ eine aus $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ rational zusammengesetzte Function bedeutet. Da aber y eine Lösung der irreductibeln algebraischen Gleichung

(3.) ist, so wird die Gleichung (9.) die Beziehungen zur Folge haben

$$(1-\varepsilon)\psi_0 = \chi \quad \text{und} \quad \psi_r = 0,$$

wenn nicht $\varepsilon^r = \varepsilon$, also $r = \varrho\mu+1$ ist, und da χ, also auch ψ_0 ein in $x, Y_1, \dots Y_m$ rationales Integral der reducirten Differentialgleichung ist, welches wir mit ζ bezeichnen wollen, so wird das Integral (4.) der Differentialgleichung (1.) die Form haben

$$(10.)\quad \begin{cases} z = \zeta + y\{\psi_1(x, Y_1, \dots Y_m) + y^\mu \psi_{\mu+1}(x, Y_1, \dots Y_m) + \cdots \\ \qquad \cdots + y^{(\varkappa-1)\mu}\psi_{(\varkappa-1)\mu+1}(x, Y_1, \dots Y_m)\}, \end{cases}$$

und weil ζ ein Integral der reducirten, der übrige Theil also ein Integral der ursprünglichen Differentialgleichung ist, und somit statt ζ jedes beliebige constante Multiplum algebraischer Integrale der reducirten Differentialgleichung hinzugefügt werden kann, ohne dass das gesammte algebraische Integral (10.) seinen Charakter ändert, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn die lineare Differentialgleichung (1.) *ein algebraisches Integral hat, und der reducirten Differentialgleichung genügen gar keine algebraischen oder nur in den Coefficienten der letzteren rationale Integrale, so hat, wenn die rechte Seite y der gegebenen Differentialgleichung für einen Umkreis des x, für welchen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ unverändert bleiben, in das $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$-fache des gegebenen Werthes übergeht, jenes algebraische Integral, von etwaigen additiven constanten Multiplen algebraischer particulärer Integrale der reducirten Differentialgleichung abgesehen, stets die Form*

$$y\{\psi_1(x, Y_1, \dots Y_m) + y^\mu \psi_{\mu+1}(x, Y_1, \dots Y_m) + \cdots + y^{(\varkappa-1)\mu}\psi_{(\varkappa-1)\mu+1}(x, Y_1, \dots Y_m)\},$$

worin $\psi_1, \psi_2, \dots$ rationale Functionen bedeuten, oder es besitzt die Eigenschaft der y-Function selbst, bei einem Umkreise des x in das ε-fache überzugehen.

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = y,$$

deren reducirte Gleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = 0$$

die in den Coefficienten rationalen algebraischen Integrale

$$z = cx$$

besitzt, für den Fall, dass y der Gleichung genügt

$$y^3 = (x^2+1)\left(\tfrac{8}{3}x^2 - \frac{x^2+3}{3x(x^2+1)}\right)^3,$$

nur algebraische Integrale, welche sich, wenn zur Abkürzung

$$\tfrac{8}{3}x^2 - \frac{x^2+3}{3x(x^2+1)} = \varphi(x)$$

gesetzt wird, in der Form darstellen lassen

$$z = cx + \frac{y}{\varphi(x)}\left(1 + \frac{x}{\varphi(x)^2}y^3\right).$$

Dehnen wir die Frage auf den Fall aus, dass zwischen mehr als zwei Zweigen der y-Function um einen Verzweigungspunkt herum eine homogene lineare Relation stattfindet, oder dass im Allgemeinen, wie an dem oben angeführten Orte nachgewiesen worden, die Entwicklung die Form hat

$$(11.) \qquad y = \psi_{\nu_1}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_1}{\varrho}} + \psi_{\nu_2}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_2}{\varrho}} + \cdots + \psi_{\nu_\mu}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_\mu}{\varrho}},$$

worin $\mu < \varrho - 1$ ist, und $\psi_{\nu_1}(x)$, $\psi_{\nu_2}(x)$, ... nach ganzen Potenzen von $x-\alpha$ fortschreitende Reihen bedeuten, so wird jene Relation, wenn ε eine primitive ϱ^{te} Einheitswurzel ist, die Form haben

$$(12.) \quad \begin{cases} y_{\mu+1} - (\varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu})y_\mu + (\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2} + \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_3} + \cdots + \varepsilon^{\nu_{\mu-1}}\varepsilon^{\nu_\mu})y_{\mu-1} - \cdots \\ \qquad \cdots + (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\ldots\varepsilon^{\nu_\mu} y_1 = 0, \end{cases}$$

und es werden aus den oben angegebenen Gründen die Functionen y_1, y_2, ... $y_{\mu+1}$, wenn wiederum die reducirte Differentialgleichung denselben Beschränkungen unterworfen wird, algebraische particuläre Integrale der resp. Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^m z_1}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z_1 &= y_1, \\ \frac{d^m z_2}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_2}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z_2 &= y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{d^m z_{\mu+1}}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_{\mu+1}}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z_{\mu+1} &= y_{\mu+1} \end{aligned}$$

sein, so dass sich durch Multiplication dieser Gleichungen mit den Coefficienten der Gleichung (12.) und durch Addition ergiebt, dass die reducirte Differentialgleichung das Integral besitzt

$$(13.) \qquad Z = z_{\mu+1} - (\varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu})z_\mu + \cdots + (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\ldots\varepsilon^{\nu_\mu} z_1.$$

Hat nun die reducirte Differentialgleichung entweder gar keine oder nur in x, Y_1, Y_2, ... Y_m rational ausdrückbare Integrale, so muss Z in der letzten Gleichung eben diesen Charakter haben, und wenn ein solches Integral wieder wie oben mit ζ bezeichnet wird, so folgt *aus der Existenz*

der Beziehung (12.) *für die die rechte Seite der Differentialgleichung bildende algebraische Function die entsprechende Relation für das algebraische Integral der Differentialgleichung in der Form*

$$(14.)\qquad \zeta+z_{\mu+1}-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\cdots+\varepsilon^{\nu_\mu})z_\mu+\cdots+(-1)^\mu\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\ldots\varepsilon^{\nu_\mu}z_1 = 0,$$

oder es wird die Function z_1, *von einem Integrale der reducirten Differentialgleichung abgesehen, um jenen Verzweigungspunkt herum ebenfalls eine unvollständige und zwar der Form* (11.) *analoge Entwicklung besitzen;* dies die Verallgemeinerung des oben bewiesenen Satzes.

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x} = y,$$

worin y um den Nullpunkt entwickelt die Form hat

$$y = -\frac{4}{5x}\cdot x^{\frac{1}{5}}-\frac{3}{5x}x^{\frac{2}{5}},$$

das algebraische Integral

$$z = x+x^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{2}{5}},$$

worin $\zeta = x$ ein Integral der reducirten Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x} = 0$$

ist, und welches, wenn $z-x=\eta$ gesetzt wird, der algebraischen Gleichung genügt

$$\eta^5+5x\eta^2-5x\eta+(x+x^2) = 0.$$

Habe nunmehr die Differentialgleichung (1.) das logarithmische Integral

$$(15.)\qquad z = A\log v,$$

worin A eine Constante und v eine algebraische Function bedeutet, so darf man bekanntlich unter der Voraussetzung, dass die reducirte Differentialgleichung (2.) keine logarithmischen Integrale besitzt, annehmen, dass v rational aus x, Y_1, Y_2, ... Y_{m-1} und y — indem $Y_m = 0$ sein muss — zusammengesetzt ist, und es wird daher, wenn y wieder bei einem Umlaufe des x, welcher Y_1, Y_2, ... Y_{m-1} unverändert lässt, in εy übergeht, die Differentialgleichung

$$(16.)\qquad \frac{d^m z}{dx^m}+Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\cdots+Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = \varepsilon y$$

das particuläre Integral

$$(17.)\qquad z_1 = A\log v_1$$

haben, wenn v_1 aus v durch Substitution von εy an Stelle von y hervorgeht. Daraus würde aber folgen, dass die reducirte Differentialgleichung

$$(18.)\qquad \frac{d^m z}{dx^m}+Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\cdots+Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = 0$$

das Integral besitzt

$$(19.)\qquad Z = \log v_1-\varepsilon\log v,$$

worin Z der Annahme gemäss eine Constante oder eine algebraische Function von x sein kann. Um aus dieser Gleichung weitere Schlüsse zu ziehen, beweisen wir einen Hülfssatz, der im Folgenden häufig zur Anwendung kommen wird; sei eine Beziehung von der Form vorgelegt

$$(20.)\qquad A_1\log v_1+A_2\log v_2+\cdots+A_\varrho\log v_\varrho = u,$$

worin $A_1, A_2, \dots A_\varrho$ Constanten, $u, v_1, v_2, \dots v_\varrho$ algebraische Functionen von x bedeuten, so wird man offenbar auch $v_2, v_3, \dots v_\varrho$ und u als algebraische Functionen von v_1 betrachten können, die man erhält, wenn man x zwischen je zwei jene Functionen definirenden Gleichungen eliminirt, und setzt man nun jene Relation in die Form

$$A_1\log v_1 = -A_2\log v_2-A_3\log v_3-\cdots-A_\varrho\log v_\varrho+u,$$

so schliesst man in bekannter Weise entweder nach *Abel* oder durch Zusammensetzung der einzelnen *Riemann*schen Flächen, dass auch die Beziehung besteht

$$\delta A_1\log v_1 = -A_2\log V_2-A_3\log V_3-\cdots-A_\varrho\log V_\varrho+U,$$

worin δ eine ganze Zahl und $V_2, V_3, \dots V_\varrho$, U rationale Functionen von v_1 bedeuten. Beschreibt nun v_1 um den Nullpunkt eine geschlossene Curve, so dass $\log v_1$ um $2k_1\pi i$ sich ändert, so werden die anderen Logarithmen, da $V_2, V_3, \dots V_\varrho$ als rationale Functionen von v_1 auch ihren früheren Werth wieder annehmen, sich um

$$2k_2\pi i,\quad 2k_3\pi i,\quad \dots\quad 2k_\varrho\pi i$$

ändern, während U unverändert bleibt, und somit wird die Gleichung bestehen

$$\delta k_1 A_1+k_2A_2+k_3A_3+\cdots+k_\varrho A_\varrho = 0,$$

worin $k_1, k_2, \dots k_\varrho$ und δ ganze Zahlen bedeuten.

Mit Hülfe dieser Bemerkung ersehen wir nun aus der Gleichung (19.), dass die Beziehung

$$(21.)\qquad k_1-\varepsilon k = 0$$

stattfinden muss, worin k und k_1 ganze Zahlen bedeuten, von denen die

erstere von Null verschieden ist. Da aber die primitive μ^{te} Einheitswurzel ε nur dann eine rationale Zahl sein kann, wenn $\mu = 1$ oder 2, also $\varepsilon = \pm 1$ ist, so ergiebt sich der folgende Satz:

Die lineare nicht homogene Differentialgleichung (1.), *deren rechte Seite der Gleichung* (3.) *genügt, kann, wenn die reducirte Differentialgleichung keine logarithmischen Integrale hat, nur dann logarithmische Integrale von der Form* (15.) *besitzen, wenn* $\mu = 1$ *oder* 2 *ist.*

Besteht das logarithmische Integral aus der Summe mehrerer mit Constanten multiplicirten Logarithmen

$$(22.)\qquad z = A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho,$$

worin $v_1, v_2, \ldots v_\varrho$ algebraische Functionen von x bedeuten, welche wir uns als Lösungen von ϱ algebraischen Gleichungen vorstellen wollen, deren Coefficienten rational aus $x, Y_1, Y_2, \ldots Y_{m-1}$ und y zusammengesetzt sind, so wird man, wenn der Werth von z nebst seinen Ableitungen in die Differentialgleichung eingesetzt und diese somit identisch befriedigt wird, x solche geschlossenen Umläufe machen lassen können *), dass $x, Y_1, \ldots Y_{m-1}$ und y ihre Werthe wieder erhalten, während $v_1, v_2, \ldots v_\varrho$ in dieselben oder andere Lösungen ihrer resp. Gleichungen übergehen, immer wird die daraus hervorgehende logarithmische Form von z ein Integral der gegebenen Differentialgleichung bleiben. Sind nun nicht alle ϱ, die Grössen v definirenden irreductibeln Gleichungen vom ersten Grade, so wird sich ein zweites Integral von der Form ergeben

$$z_1 = A_1 \log v_1' + A_2 \log v_2' + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho',$$

worin mindestens eines der v' von dem entsprechenden früheren v verschieden ist, und man erhielte somit

$$z_1 - z = A_1 \log \frac{v_1'}{v_1} + A_2 \log \frac{v_2'}{v_2} + \cdots + A_\varrho \log \frac{v_\varrho'}{v_\varrho}$$

als ein Integral der reducirten Differentialgleichung; nimmt man somit wieder an, dass diese keine logarithmischen Integrale dieser Form besitzt, so wird

$$A_1 \log \frac{v_1'}{v_1} + A_2 \log \frac{v_2'}{v_2} + \cdots + A_\varrho \log \frac{v_\varrho'}{v_\varrho} = u$$

*) Um diese Umläufe zu bestimmen, wird man in bekannter Weise die Grössen $v_1, v_2, \ldots v_\varrho$ rational durch eine Grösse t und $x, Y_1, Y_2, \ldots Y_{m-1}, y$ ausdrücken und als zusammengehörigen Werthecomplex alle diejenigen Werthe von $v_1, v_2, \ldots v_\varrho$ aufzufassen haben, welche für die verschiedenen Werthe der irreductibeln t-Gleichung durch jene rationalen Ausdrücke bestimmt werden.

sein, worin u eine algebraische Function bedeutet, die auch eine Constante sein kann, und sich hieraus wieder nach dem obigen Hülfssatze ergeben, dass

$$K_1 A_1 + K_2 A_2 + \cdots + K_\varrho A_\varrho = 0$$

ist, worin $K_1, K_2, \ldots K_\varrho$ ganze Zahlen bedeuten. Da man aber von vornherein annehmen kann, dass eine solche Beziehung nicht statthat, weil im entgegengesetzten Falle in der ursprünglichen Integralform (22.) die Zahl der Logarithmen verkleinert werden könnte, ohne den Charakter des Integrales zu ändern, so müssen sämmtliche Quotienten

$$\frac{v_1'}{v_1}, \quad \frac{v_2'}{v_2}, \quad \ldots \quad \frac{v_\varrho'}{v_\varrho}$$

Constanten sein; daraus folgt aber leicht nach bekannter Schlussweise*), dass

$$v_\sigma = \sqrt[\lambda]{w_\sigma}$$

ist, worin λ eine ganze positive Zahl bedeutet, und w_σ einer Gleichung genügt, deren Coefficienten ebenfalls rational aus $x, Y_1, \ldots Y_{m-1}, y$ zusammengesetzt sind, und deren Grad niedriger ist als derjenige der die Function v_σ definirenden algebraischen Gleichung, so dass das gegebene Integral auch in der Form

$$z = B_1 \log w_1 + B_2 \log w_2 + \cdots + B_\varrho \log w_\varrho$$

dargestellt werden kann, in welchem die die Grössen w_σ definirenden Gleichungen von resp. niedrigerem Grade sind als diejenigen, welche die algebraischen Functionen v_σ bestimmen. Durch Fortsetzung dieser Schlussweise folgt somit, dass man unter der gemachten Beschränkung für die reducirte Differentialgleichung annehmen darf, dass v_σ durch eine lineare Gleichung bestimmt ist, oder dass die Logarithmanden des Integrales (22.) rational durch $x, Y_1, \ldots Y_{m-1}$ und y ausdrückbar sind. Gehe nun y wiederum bei einem Umlaufe des x, welcher die Functionen $Y_1, Y_2, \ldots Y_{m-1}$ unverändert lässt, in εy über, worin ε eine μ^{te} Einheitswurzel bedeutet, so wird aus früher angegebenen Gründen der Ausdruck

$$(23.) \qquad z_1 = A_1 \log V_1 + A_2 \log V_2 + \cdots + A_\varrho \log V_\varrho$$

ein Integral der Differentialgleichung (16.) sein, wenn $V_1, V_2, \ldots V_\varrho$ aus $v_1, v_2, \ldots v_\varrho$ hervorgehen, indem εy an die Stelle von y gesetzt wird, und daher

$$(24.) \quad z_1 - \varepsilon z = A_1 \{\log V_1 - \varepsilon \log v_1\} + A_2 \{\log V_2 - \varepsilon \log v_2\} + \cdots + A_\varrho \{\log V_\varrho - \varepsilon \log v_\varrho\}$$

*) Vergl. Seite 192 des oben angeführten Werkes.

die reducirte Differentialgleichung befriedigen. Da nun angenommen wurde, dass die letztere gar kein logarithmisches Integral dieser Form besitzt, so wird

$$(25.)\quad A_1\{\log V_1-\varepsilon\log v_1\}+A_2\{\log V_2-\varepsilon\log v_2\}+\cdots+A_\varrho\{\log V_\varrho-\varepsilon\log v_\varrho\} = U$$

sein, worin U eine algebraische Function bedeutet, welche auch eine Constante sein kann, und betrachtet man wieder wie oben $v_1, v_2, \dots v_{\varrho-1}, V_1, V_2, \dots V_\varrho, U$ als algebraische Functionen von v_ϱ, so wird man v_ϱ so oft den Nullpunkt umkreisen lassen können, dass $v_1, v_2, \dots v_{\varrho-1}, V_1, V_2, \dots V_\varrho, U$ ihre Ausgangswerthe wieder annehmen, indem man nur, wenn v_α oder V_α als Functionen von v_ϱ aufgefasst um $v_\varrho=0$ herum einem Cyclus von m_α Elementen angehören, das Product P der Anzahl der Cyclenelemente als Anzahl der Umkreisungen zu wählen hat oder auch jedes Multiplum dieses Productes, wie es gleich nachher geschehen soll; in allen Fällen ergiebt sich eine Beziehung von der Form:

$$(26.)\quad A_1(K_1-\varepsilon k_1)+A_2(K_2-\varepsilon k_2)+\cdots+A_\varrho(K_\varrho-\varepsilon k_\varrho) = 0,$$

worin $k_1, \dots k_\varrho, K_1, \dots K_\varrho$ ganze Zahlen sind, von denen k_ϱ von Null verschieden ist. Da nun die einzelnen Klammern nur dann verschwinden können, wenn ε rational, d. h. $\mu=1$ oder 2 ist, so wird die Gleichung (26.), wenn wir diese Werthe von μ ausschliessen, eine lineare Relation zwischen den Grössen $A_1, A_2, \dots A_\varrho$ liefern, deren Coefficienten rational aus einer μ^{ten} Einheitswurzel zusammengesetzt sind, während eine lineare Relation mit rationalen Coefficienten zwischen eben diesen Grössen von vornherein ausgeschlossen werden konnte. Aus der Gleichung (26.) ergiebt sich

$$(27.)\quad A_\varrho = -A_1\frac{K_1-\varepsilon k_1}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}-A_2\frac{K_2-\varepsilon k_2}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}-\cdots-A_{\varrho-1}\frac{K_{\varrho-1}-\varepsilon k_{\varrho-1}}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho},$$

und es nimmt daher das Integral (22.) die Form an

$$(28.)\quad \begin{cases} z = A_1\left\{\log v_1-\dfrac{K_1-\varepsilon k_1}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}\log v_\varrho\right\}+A_2\left\{\log v_2-\dfrac{K_2-\varepsilon k_2}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}\log v_\varrho\right\}+\cdots \\ \qquad\cdots+A_{\varrho-1}\left\{\log v_{\varrho-1}-\dfrac{K_{\varrho-1}-\varepsilon k_{\varrho-1}}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}\log v_\varrho\right\}. \end{cases}$$

Lässt man nunmehr x einen solchen geschlossenen Umlauf machen, dass y in $\varepsilon^\lambda y$ übergeht, während $Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}$ unverändert bleiben, so mögen $v_1, v_2, \dots v_\varrho$ in $W_1, W_2, \dots W_\varrho$ übergehen, welche dieselben rationalen Functionen von $\varepsilon^\lambda y$ sein werden, wie es $v_1, v_2, \dots v_\varrho$ von y waren, und es wird dann

$$(29.)\quad z_2 = A_1\left\{\log W_1 - \frac{K_1-\varepsilon k_1}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}\log W_\varrho\right\} + A_2\left\{\log W_2 - \frac{K_2-\varepsilon k_2}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}\log W_\varrho\right\} + \cdots$$

ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$(30.)\quad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = \varepsilon^2 y$$

sein. Hieraus folgt, genau wie oben, dass, weil $z_2 - \varepsilon^2 z$ ein Integral der reducirten Differentialgleichung sein muss,

$$(31.)\quad \begin{cases} \;\; A_1\left\{\log W_1 - \varepsilon^2\log v_1 - \frac{K_1-\varepsilon k_1}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}(\log W_\varrho - \varepsilon^2\log v_\varrho)\right\} \\ + A_2\left\{\log W_2 - \varepsilon^2\log v_2 - \frac{K_2-\varepsilon k_2}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}(\log W_\varrho - \varepsilon^2\log v_\varrho)\right\} \\ + \cdots\cdots\cdots \\ + A_{\varrho-1}\left\{\log W_{\varrho-1} - \varepsilon^2\log v_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1}-\varepsilon k_{\varrho-1}}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}(\log W_\varrho - \varepsilon^2\log v_\varrho)\right\} = U \end{cases}$$

ist, worin U eine algebraische Function bedeutet, welche auch eine Constante sein kann. Betrachtet man nun wieder $v_1, v_2, \ldots v_{\varrho-1}, W_1, W_2, \ldots W_\varrho, U$ als algebraische Functionen von v_ϱ, so kann man die Variable v_ϱ so oft den Nullpunkt umkreisen lassen, dass die anderen Variabeln ihre Werthe wieder annehmen, und die Zahl der Umkreisungen wird nach dem Obigen jedes Multiplum von Q sein, wenn Q das Product der Anzahl der Cyclenelemente aller dieser abhängigen Functionen um $v_\varrho = 0$ herum ist; nimmt man somit zur Herstellung der Gleichung (26.) als Anzahl der Umläufe $P.Q$, so wird diese Anzahl von Umläufen auch für die Variabeln der Gleichung (31.) das Geforderte leisten, und es werden somit $v_1, v_2, \ldots v_{\varrho-1}, W_1, W_2, \ldots W_\varrho$, wenn $\log v_\varrho$ um $2k_\varrho\pi i$ zunimmt, Veränderungen erleiden, welche durch die Grössen

$$2k_1\pi i,\quad 2k_2\pi i,\quad \ldots\quad 2k_{\varrho-1}\pi i,\quad 2L_1\pi i,\quad 2L_2\pi i,\quad \ldots\quad 2L_\varrho\pi i$$

dargestellt werden.

Daraus folgt die Beziehung

$$A_1\left\{L_1 - \varepsilon^2 k_1 - \frac{K_1-\varepsilon k_1}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}(L_\varrho - \varepsilon^2 k_\varrho)\right\} + A_2\left\{L_2 - \varepsilon^2 k_2 - \frac{K_2-\varepsilon k_2}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}(L_\varrho - \varepsilon^2 k_\varrho)\right\} + \cdots$$

$$\cdots + A_{\varrho-1}\left\{L_{\varrho-1} - \varepsilon^2 k_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1}-\varepsilon k_{\varrho-1}}{K_\varrho-\varepsilon k_\varrho}(L_\varrho - \varepsilon^2 k_\varrho)\right\} = 0,$$

oder

$$(32.)\quad \begin{cases} \;\; A_1\{(K_1k_\varrho - k_1K_\varrho)\varepsilon^2 + (L_\varrho k_1 - L_1k_\varrho)\varepsilon + (L_1K_\varrho - K_1L_\varrho)\} \\ + A_2\{(K_2k_\varrho - k_2K_\varrho)\varepsilon^2 + (L_\varrho k_2 - L_2k_\varrho)\varepsilon + (L_2K_\varrho - K_2L_\varrho)\} \\ + \cdots\cdots\cdots \\ + A_{\varrho-1}\{(K_{\varrho-1}k_\varrho - k_{\varrho-1}K_\varrho)\varepsilon^2 + (L_\varrho k_{\varrho-1} - L_{\varrho-1}k_\varrho)\varepsilon + (L_{\varrho-1}K_\varrho - K_{\varrho-1}L_\varrho)\} = 0. \end{cases}$$

Für $\varrho = 2$, also für den Fall, dass das Integral der Differentialgleichung die Form hat

$$(33.)\qquad z = A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2,$$

würde die Gleichung (32.) in

$$(34.)\qquad (K_1 k_2 - k_1 K_2)\varepsilon^2 + (L_2 k_1 - L_1 k_2)\varepsilon + (L_1 K_2 - K_1 L_2) = 0$$

übergehen*), somit ε die Lösung einer ganzzahligen quadratischen Gleichung und daher $\mu = 3$, 4 oder 6 sein; wir erhalten also folgenden Satz:

Hat eine nicht homogene, lineare Differentialgleichung, deren rechte Seite der Gleichung (3.) *genügt, ein logarithmisches Integral von der Form* (33.), *so kann μ nur die Werthe* 3, 4 *oder* 6 *haben, vorausgesetzt, dass die reducirte Differentialgleichung kein logarithmisches Integral besitzt.*

Ist $\varrho = 3$, so ergiebt sich aus (32.) wieder

$$(35.)\qquad A_2 = -\frac{(K_1 k_3 - k_1 K_3)\varepsilon^2 + (L_3 k_1 - L_1 k_3)\varepsilon + (L_1 K_3 - K_1 L_3)}{(K_2 k_3 - k_2 K_3)\varepsilon^2 + (L_3 k_2 - L_2 k_3)\varepsilon + (L_2 K_3 - K_2 L_3)} A_1,$$

und das in der Form (28.) gegebene Integral

$$(36.)\qquad z = A_1 \left\{ \log v_1 - \frac{K_1 - \varepsilon k_1}{K_3 - \varepsilon k_3} \log v_3 \right\} + A_2 \left\{ \log v_2 - \frac{K_2 - \varepsilon k_2}{K_3 - \varepsilon k_3} \log v_3 \right\}$$

nimmt in Folge dessen, wenn

$$(37.)\qquad k_{\alpha 2} = K_\alpha k_3 - k_\alpha K_3, \quad k_{\alpha 1} = L_3 k_\alpha - L_\alpha k_3, \quad k_{\alpha 0} = L_\alpha K_3 - K_\alpha L_3$$

gesetzt wird, die Form an

$$(38.)\qquad \begin{cases} z = A_1 \Big\{ \log v_1 - \dfrac{k_{12}\varepsilon^2 + k_{11}\varepsilon + k_{10}}{k_{22}\varepsilon^2 + k_{21}\varepsilon + k_{20}} \log v_2 \\ \qquad - \dfrac{(K_1 - \varepsilon k_1)(k_{22}\varepsilon^2 + k_{21}\varepsilon + k_{20}) - (K_2 - \varepsilon k_2)(k_{12}\varepsilon^2 + k_{11}\varepsilon + k_{10})}{(K_3 - \varepsilon k_3)(k_{22}\varepsilon^2 + k_{21}\varepsilon + k_{20})} \log v_3 \Big\}. \end{cases}$$

---

*) Für den Fall, dass die Gleichung (34.) in eine ganzzahlige lineare Gleichung übergeht, also

$$K_1 k_2 - k_1 K_2 = 0$$

ist, würde das oben gefundene Integral (28.) unter der gemachten Voraussetzung die Form annehmen

$$z = A_1 \left\{ \log v_1 - \frac{k_1}{k_2} \log v_2 \right\} = A_1 \log \frac{v_1}{v_2^{\frac{k_1}{k_2}}}$$

und somit nur aus *einem* Logarithmus einer algebraischen Function bestehen, welcher Fall oben behandelt wurde und in der That auf eine lineare Gleichung in ε, also auf $\mu = 1$ oder 2 führte; und eben dasselbe würde eintreten, wenn das dritte Glied der Gleichung (34.) verschwinden würde, wie denn überhaupt ein rationaler Werth von ε nach der Gleichung (28.) die Reduction auf *einen* Logarithmus ermöglichen würde.

Lässt man nunmehr x einen solchen Umlauf beschreiben, dass, während $Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}$ ihre ursprünglichen Werthe wieder annehmen, y in $\varepsilon^3 y$ übergeht, so mögen v_1, v_2, v_3 die Werthe U_1, U_2, U_3 annehmen, und es wird dann der Ausdruck (38.), wenn in diesem v_1, v_2, v_3 durch U_1, U_2, U_3 ersetzt sind, in ein Integral z_3 der Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = \varepsilon^3 y$$

übergehen, so dass wieder mit Rücksicht auf die für die reducirte Differentialgleichung festgesetzte Bedingung

$$z_3 - \varepsilon^3 z = u$$

sich ergiebt, worin u eine algebraische Function oder eine Constante bedeutet, und wenn man endlich in der so erhaltenen Gleichung wieder x einen solchen geschlossenen Umlauf machen lässt, dass $\log v_1$, $\log v_2$, $\log v_3$ um $2k_1\pi i$, $2k_2\pi i$, $2k_3\pi i$ *), dagegen $\log U_1$, $\log U_2$, $\log U_3$ um $2M_1\pi i$, $2M_2\pi i$, $2M_3\pi i$ sich ändern, so folgt genau wie oben

$$(39.)\quad \begin{cases} M_1 - \varepsilon^3 k_1 - \dfrac{k_{12}\varepsilon^2 + k_{11}\varepsilon + k_1}{k_{22}\varepsilon^2 + k_{21}\varepsilon + k_{20}}(M_2 - \varepsilon^3 k_2) \\ \quad - \dfrac{(K_1 - \varepsilon k_1)(k_{22}\varepsilon^2 + k_{21}\varepsilon + k_{20}) - (K_2 - \varepsilon k_2)(k_{12}\varepsilon^2 + k_{11}\varepsilon + k_{10})}{(K_3 - \varepsilon k_3)(k_{22}\varepsilon^2 + k_{21}\varepsilon + k_{20})}(M_3 - \varepsilon^3 k_3) = 0. \end{cases}$$

Man findet aber leicht mit Benutzung der Werthe von (37.), dass in der Gleichung (39.) nach Wegschaffung der Nenner der Coefficient von ε^6

$$k_1 k_3 k_{22} - k_3 k_2 k_{12} - k_1 k_3 k_{22} + k_2 k_3 k_{12} = 0,$$

und ebenso der Coefficient von ε^5

$$-k_1(K_3 k_{22} - k_3 k_{21}) + k_{12} K_3 k_2 - k_{11} k_2 k_3 + k_3(K_1 k_{22} - k_1 k_{21}) - k_3(K_2 k_{12} - k_2 k_{11})$$
$$= k_{22}(K_1 k_3 - k_1 K_3) - k_{12}(K_2 k_3 - K_3 k_2) = 0$$

ist, während der Coefficient von ε^4 offenbar nicht verschwinden kann, wenn ε nicht zugleich einer quadratischen Gleichung genügen soll, da der Grad der ganzzahligen irreductibeln algebraischen Gleichung, welcher die primitive μ^{te} Einheitswurzel ε genügt, gleich ist der Anzahl $\varphi(\mu)$ der zu μ relativ primen Zahlen, welche kleiner als μ sind, $\varphi(\mu)$ aber wie bekannt nicht gleich 3 sein kann. Dass aber für den Fall der Darstellung des Integrales durch drei selbständige Logarithmen ε nicht die Lösung einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sein darf, geht einfach daraus her-

*) wobei dann die Grössen k_1, k_2, k_3 oben entsprechend zu wählen waren.

vor, dass in diesem Falle die Coefficienten der Logarithmen in dem Integralausdrucke (38.) sich als lineare ganze Functionen von ε mit rationalen Coefficienten darstellen lassen würden, und das Integral somit die Form annähme

$$z = A_1\{\log v_1 + (p_2+\varepsilon q_2)\log v_2 + (p_3+\varepsilon q_3)\log v_3\},$$

worin p_2, q_2, p_3, q_3 rationale Zahlen bedeuten, oder

$$z = A_1 \log\{v_1 v_2^{p_2} v_3^{p_3}\} + A_1 \varepsilon \log\{v_2^{q_2} v_3^{q_3}\}$$

und daher nur aus der Summe von zwei Logarithmen bestände. Daraus folgt, weil $\varphi(\mu) = 4$ sein muss,

dass, wenn eine nicht homogene lineare Differentialgleichung, deren rechte Seite der Gleichung (3.) *genügt, ein aus der Summe von drei Logarithmen bestehendes Integral besitzt, μ nur die Werthe* 5, 6, 8, 10 *oder* 12 *haben kann, vorausgesetzt, dass die reducirte Differentialgleichung keine logarithmischen Integrale besitzt.*

Es ist leicht zu sehen, in welcher Weise sich diese Sätze verallgemeinern lassen, indem für die Darstellung des Integrales durch vier Logarithmen sich für ε eine Gleichung 10. Grades ergiebt, aus welcher sich wieder ähnlich wie oben die zugehörigen Werthe von μ erschliessen lassen.

Endlich bedarf es kaum der Erwähnung, *dass die oben für lineare nicht homogene Differentialgleichungen bewiesenen Sätze im einfachsten Falle der Differentialgleichung erster Ordnung*

$$\frac{dz}{dx} = y = \sqrt[m]{R(x)}$$

die entsprechenden Sätze für die Beziehung der Anzahl der Logarithmen zu der Zahl m für die auf Logarithmen reducirbaren Abelschen Integrale liefern.

Kehren wir jetzt wieder zu der Annahme zurück, dass das Integral der gegebenen linearen nicht homogenen Differentialgleichung sich durch **ein** logarithmisches Glied in der Form

$$z = A \log v$$

darstellt, setzen aber voraus, dass y einem Cyclus angehört, der durch die Gleichungen (11.) und (12.) näher bestimmt ist, so werden die Differentialgleichungen

$$(40.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \dfrac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\dfrac{dz}{dx} = y_1, \\ \dfrac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \dfrac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\dfrac{dz}{dx} = y_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \dfrac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\dfrac{dz}{dx} = y_{\mu+1} \end{cases}$$

die resp. Integrale besitzen

$$(41.)\quad z_1 = A\log v_1,\quad z_2 = A\log v_2,\quad \dots\quad z_{\mu+1} = A\log v_{\mu+1},$$

worin $v_1, v_2, \dots v_{\mu+1}$ dieselben rationalen Functionen von $x, Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}$ und resp. $y_1, y_2, \dots y_{\mu+1}$ bedeuten. Multiplicirt man nun die letzte der Gleichungen (40.) mit 1, die vorletzte mit $-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\dots+\varepsilon^{\nu_\mu})$, die drittletzte mit $\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}+\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_3}+\dots+\varepsilon^{\nu_{\mu-1}}\varepsilon^{\nu_\mu}$, u. s. w., endlich die erste mit $(-1)^\mu\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\dots\varepsilon^{\nu_\mu}$, und addirt sämmtliche Gleichungen, so ergiebt sich vermöge (12.), dass

$$(42.)\quad Z = z_{\mu+1}-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\dots+\varepsilon^{\nu_\mu})z_\mu+\dots+(-1)^\mu\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\dots\varepsilon^{\nu_\mu}z_1,$$

oder

$$(43.)\quad Z = \log v_{\mu+1}-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\dots+\varepsilon^{\nu_\mu})\log v_\mu+\dots+(-1)^\mu\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\dots\varepsilon^{\nu_\mu}\log v_1$$

ein Integral der reducirten Differentialgleichung sein wird. Vermöge der Annahme ist aber Z eine algebraische Function oder eine Constante, und es wird sich somit, indem man $v_{\mu+1}, v_\mu, \dots v_2$ als algebraische Functionen von v_1 auffasst, genau wie früher die Beziehung ergeben

$$(44.)\quad \begin{cases} k_{\mu+1}-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\dots+\varepsilon^{\nu_\mu})k_\mu+(\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}+\dots+\varepsilon^{\nu_{\mu-1}}\varepsilon^{\nu_\mu})k_{\mu-1}-\dots \\ \qquad\qquad \dots+(-1)^\mu\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\dots\varepsilon^{\nu_\mu}k_1 = 0, \end{cases}$$

worin $k_1, k_2, \dots k_{\mu+1}$ ganze Zahlen bedeuten, von denen eine von Null verschieden ist. Da nun der Cyclus ϱ Elemente besitzt, so werden die $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_\mu$, worin $\mu < \varrho-1$ ist, sämmtlich kleiner als ϱ sein, und es wird (44.) eine Gleichung in ε mit ganzzahligen Coefficienten definiren, welche erfüllt sein muss, wenn die gegebene nicht homogene lineare Differentialgleichung ein aus *einem* logarithmischen Gliede bestehendes Integral besitzen soll. Sei $\mu = 2$, also die Entwicklung von y um einen Verzweigungspunkt herum von der Form

$$(45.)\quad y = \psi_{\nu_1}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_1}{\varrho}}+\psi_{\nu_2}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_2}{\varrho}},$$

so würde die Gleichung (44.) übergehen in

$$(46.)\quad k_3-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2})k_2+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2}k_1 = 0;$$

ist nun ϱ eine Primzahl, so wird, weil ε einer ganzzahligen irreductibeln Gleichung $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades genügt, welche also $\varrho-1$ Potenzen von ε enthält, und weil $\mu < \varrho-1$ sein soll, somit ϱ mindestens 5 sein muss, die Gleichung (46.) nicht bestehen können, und wir erhalten daher den Satz:

Eine nicht homogene lineare Differentialgleichung, deren rechte Seite die Eigenschaft hat, dass für einen primzahligen ϱ-fachen Verzweigungspunkt

drei Zweige in einem homogenen linearen Zusammenhange stehen), kann, wenn die reducirte Differentialgleichung keine logarithmischen Integrale hat, überhaupt kein mit einer Constanten multiplicirtes einfaches logarithmisches Integral besitzen.*

Die Modification dieses Satzes für zusammengesetzte ϱ ergiebt sich aus der Irreductibilität der Gleichung, deren Lösungen alle primitiven ϱ^{ten} Einheitswurzeln sind, und deren Grad durch die Anzahl der Zahlen bestimmt wird, die kleiner als ϱ und relativ prim zu ϱ sind; ebensowenig bedarf die Uebertragung auf die zu derartigen algebraischen Gleichungen gehörigen *Abel*schen Integrale einer Erläuterung.

Besteht die Entwicklung aus drei Gliedern, ist also

$$y = \psi_{\nu_1}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_1}{\varrho}} + \psi_{\nu_2}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_2}{\varrho}} + \psi_{\nu_3}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_3}{\varrho}},$$

so geht die Gleichung (44.) in

$$(47.)\qquad k_4-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\varepsilon^{\nu_3})k_3+(\varepsilon^{\nu_1+\nu_2}+\varepsilon^{\nu_1+\nu_3}+\varepsilon^{\nu_2+\nu_3})k_2-\varepsilon^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}k_1 = 0$$

über, und es folgt hieraus wieder, dass, wenn ϱ eine Primzahl ist, ϱ nur $=5$ oder $=7$ sein kann, weil die Gleichung (47.) nur sieben Potenzen von ε enthält; man überzeugt sich aber leicht, dass sich für $\varrho=5$ die Gleichung (47.) für keine der Combinationen der Zahlen 1, 2, 3, 4 befriedigen lässt, und dass für $\varrho=7$ sich nur die zwei möglichen Fälle ergeben:

$$\nu_1=1,\quad \nu_2=2,\quad \nu_3=4,\quad k_4-k_1=1,\quad k_3=-1,$$
$$\nu_1=3,\quad \nu_2=5,\quad \nu_3=6,\quad k_4-k_1=1,\quad k_3=-1,$$

in denen allein ein einfaches logarithmisches Integral existiren kann, so dass sich der folgende Satz ergiebt:

Eine nicht homogene lineare Differentialgleichung, deren rechte Seite die Eigenschaft hat, dass für einen primzahligen ϱ-fachen Verzweigungspunkt vier Zweige in einem homogenen linearen Zusammenhange stehen, kann, wenn die reducirte Differentialgleichung überhaupt keine logarithmischen Integrale besitzt, nur dann einen mit einer Constanten multiplicirten Logarithmus zum Integral haben, wenn $\varrho=7$ und die Entwicklung der rechten Seite

$$y = \psi_1(x)(x-\alpha)^{\frac{1}{7}}+\psi_2(x)(x-\alpha)^{\frac{2}{7}}+\psi_4(x)(x-\alpha)^{\frac{4}{7}},$$

oder

$$y = \psi_3(x)(x-\alpha)^{\frac{3}{7}}+\psi_5(x)(x-\alpha)^{\frac{5}{7}}+\psi_6(x)(x-\alpha)^{\frac{6}{7}}$$

lautet, somit die Zähler der Exponenten entweder die quadratischen Reste oder die quadratischen Nichtreste von 7 sind.

---

*) Es darf hier und im Folgenden, wie man leicht sieht, von dem Falle $\nu_1=0$ abgesehen werden.

Ebenso wird für $\varrho = 11$ die Darstellung des Integrales der Differentialgleichung unter den bekannten Bedingungen durch *einen* Logarithmus für den Fall der homogenen linearen Relation zwischen sechs Elementen des Cyclus wieder die eine der beiden Entwicklungen

$$y = \psi_1(x)(x-\alpha)^{\frac{1}{11}}+\psi_3(x)(x-\alpha)^{\frac{3}{11}}+\psi_4(x)(x-\alpha)^{\frac{4}{11}}+\psi_5(x)(x-\alpha)^{\frac{5}{11}}+\psi_9(x)(x-\alpha)^{\frac{9}{11}}$$

oder

$$y = \psi_2(x)(x-\alpha)^{\frac{2}{11}}+\psi_6(x)(x-\alpha)^{\frac{6}{11}}+\psi_7(x)(x-\alpha)^{\frac{7}{11}}+\psi_8(x)(x-\alpha)^{\frac{8}{11}}+\psi_{10}(x)(x-\alpha)^{\frac{10}{11}}$$

erfordern, worin wiederum 1, 3, 4, 5, 9 sämmtliche quadratischen Reste und 2, 6, 7, 8, 10 sämmtliche quadratischen Nichtreste von 11 vorstellen, und ähnliche Schlüsse gelten für beliebige ϱ-fache Verzweigungen.

Mag nunmehr unter der Annahme der Existenz der Gleichungen (11.) und (12.) das Integral der nicht homogenen linearen Differentialgleichung die Form haben

$$(48) \qquad z = A\log v + B\log w,$$

so werden die Differentialgleichungen (40.) die resp. Integrale besitzen

$$\begin{aligned} z_1 &= A\log v_1 \;\; + B\log w_1, \\ z_2 &= A\log v_2 \;\; + B\log w_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{\mu+1} &= A\log v_{\mu+1} + B\log w_{\mu+1}; \end{aligned}$$

hieraus ergiebt sich wieder wie oben, dass

$$(49.) \quad \begin{cases} Z = \; A\{\log v_{\mu+1}-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\cdots+\varepsilon^{\nu_\mu})\log v_\mu+\cdots+(-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\ldots\varepsilon^{\nu_\mu}\log v_1\} \\ \qquad +B\{\log w_{\mu+1}-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\cdots+\varepsilon^{\nu_\mu})\log w_\mu+\cdots+(-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\ldots\varepsilon^{\nu_\mu}\log w_1\} \end{cases}$$

ein Integral der reducirten Differentialgleichung, und somit, wie früher aus Gleichung (25.) gefolgert wurde,

$$(50.) \quad \begin{cases} \;\; A\{k_{\mu+1}-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\cdots+\varepsilon^{\nu_\mu})k_\mu+\cdots+(-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\ldots\varepsilon^{\nu_\mu}k_1\} \\ +B\{l_{\mu+1}-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\cdots+\varepsilon^{\nu_\mu})l_\mu+\cdots+(-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\ldots\varepsilon^{\nu_\mu}l_1\} = 0 \end{cases}$$

sein muss, worin die Grössen k und l ganze Zahlen bedeuten, von denen eine von Null verschieden ist. Aus der letzten Gleichung folgt

$$B = -A\cdot\frac{k_{\mu+1}-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\cdots+\varepsilon^{\nu_\mu})k_\mu+\cdots+(-1)^\mu\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\ldots\varepsilon^{\nu_\mu}k_1}{l_{\mu+1}-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\cdots+\varepsilon^{\nu_\mu})l_\mu+\cdots+(-1)^\mu\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\ldots\varepsilon^{\nu_\mu}l_1},$$

und es nimmt somit das Integral (48.) die Form an

$$(51.) \quad z_1 = A\left\{\log v_1-\frac{k_{\mu+1}-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\cdots+\varepsilon^{\nu_\mu})k_\mu+\cdots+(-1)^\mu\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\ldots\varepsilon^{\nu_\mu}k_1}{l_{\mu+1}-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2}+\cdots+\varepsilon^{\nu_\mu})l_\mu+\cdots+(-1)^\mu\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\ldots\varepsilon^{\nu_\mu}l_1}\log w_1\right\},$$

worin wir uns y durch y_1 ersetzt denken wollen. Um das für die weitere Behandlung zur Anwendung kommende Princip zu erläutern, wollen wir den Fall $\mu = 2$ durchführen, für den also das durch (51.) dargestellte Integral lautet

$$(52.)\qquad z = A\left\{\log v_1 - \frac{k_3-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2})k_2+\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}k_1}{l_3-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2})\,l_2+\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\,l_1}\log w_1\right\},$$

und die durch die Gleichung (12.) gegebene Beziehung zwischen den Elementen des Cyclus

$$(53.)\qquad y_3-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2})y_2+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2}y_1 = 0;$$

lassen wir nunmehr in dieser letzten Relation x einen Umkreis um den betreffenden Verzweigungspunkt machen, so gehe y_1 in y_2, y_2 in y_3, y_3 in y_4 über, und man erhält

$$(54.)\qquad y_4-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2})y_3+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2}y_2 = 0,$$

woraus, wenn y_3 zwischen (53.) und (54.) eliminirt wird, folgt, dass

$$(55.)\qquad y_4-(\varepsilon^{2\nu_1}+\varepsilon^{2\nu_2}+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2})y_2+(\varepsilon^{2\nu_1+\nu_2}+\varepsilon^{2\nu_2+\nu_1})y_1 = 0$$

ist. Wenn nun z_1, z_2, z_4 diejenigen Integrale der resp. Differentialgleichungen

$$\frac{d^m z}{dx^m}+Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\cdots+Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = y_1,$$

$$\frac{d^m z}{dx^m}+Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\cdots+Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = y_2,$$

$$\frac{d^m z}{dx^m}+Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\cdots+Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = y_4$$

sind, welche durch (52.) dargestellt werden, wenn daselbst für die Logarithmanden die Ausdrücke v_1, w_1, v_2, w_2, v_4, w_4 genommen werden, worin v_2, w_2, v_4, w_4 aus v_1 und w_1 hervorgehen, wenn an Stelle von y_1 resp. y_2 und y_4 gesetzt wird, so ist wieder

$$z_4-(\varepsilon^{2\nu_1}+\varepsilon^{2\nu_2}+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2})z_2+(\varepsilon^{2\nu_1+\nu_2}+\varepsilon^{2\nu_2+\nu_1})z_1$$

oder

$$\log v_4-(\varepsilon^{2\nu_1}+\varepsilon^{2\nu_2}+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2})\log v_2+(\varepsilon^{2\nu_1+\nu_2}+\varepsilon^{2\nu_2+\nu_1})\log v_1$$

$$-\frac{k_3-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2})k_2+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2}k_1}{l_3-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2})\,l_2+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2}\,l_1}\left[\log w_4-(\varepsilon^{2\nu_1}+\varepsilon^{2\nu_2}+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2})\log w_2+(\varepsilon^{2\nu_1+\nu_2}+\varepsilon^{2\nu_2+\nu_1})\log w_1\right]$$

als Integral der reducirten Differentialgleichung der gemachten Voraussetzung gemäss eine algebraische Function oder eine Constante, und daher, wie wiederholt oben geschlossen worden,

$$k_4-(\varepsilon^{2\nu_1}+\varepsilon^{2\nu_2}+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2})k_2+(\varepsilon^{2\nu_1+\nu_2}+\varepsilon^{2\nu_2+\nu_1})k_1$$
$$-\frac{k_3-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2})k_2+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2}k_1}{l_3-(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2})\,l_2+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2}\,l_1}[l_4-(\varepsilon^{2\nu_1}+\varepsilon^{2\nu_2}+\varepsilon^{\nu_1+\nu_2})l_2+(\varepsilon^{2\nu_1+\nu_2}+\varepsilon^{2\nu_2+\nu_1})l_1] = 0;$$

die Ausrechnung dieser Gleichung liefert

$$K_0+K_1(\varepsilon^{\nu_1}+\varepsilon^{\nu_2})+K_2\varepsilon^{\nu_1+\nu_2}+K_3(\varepsilon^{2\nu_1}+\varepsilon^{2\nu_2})+K_4\varepsilon^{2\nu_1+2\nu_2}+K_5(\varepsilon^{2\nu_1+\nu_2}+\varepsilon^{2\nu_2+\nu_1}) = 0,$$

worin die K ganze Zahlen bedeuten. Da die Gleichung nur neun Potenzen von ε enthält, so wird, wenn ϱ eine Primzahl ist, ϱ im Allgemeinen nur die Zahlen 5 und 7 bedeuten können, und wir erhalten den folgenden Satz:

Eine nicht homogene lineare Differentialgleichung, deren rechte Seite die Eigenschaft hat, dass für einen primzahligen ϱ-fachen Verzweigungspunkt drei Zweige in einem homogenen linearen Zusammenhange stehen, kann, wenn die reducirte Differentialgleichung kein logarithmisches Integral hat, im Allgemeinen nur dann ein aus der Summe zweier mit Constanten multiplicirter Logarithmen bestehendes Integral besitzen, wenn $\varrho = 5$ oder 7 ist, die Entwicklung der rechten Seite also die Form hat

$$y = \psi_{\nu_1}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_1}{5}}+\psi_{\nu_2}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_2}{5}}$$

oder

$$y = \psi_{\nu_1}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_1}{7}}+\psi_{\nu_2}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_2}{7}}.$$

Genau in derselben Weise entwickeln sich die entsprechenden Sätze für $\mu > 2$.

Ganz ähnliche Untersuchungen lassen sich für diejenigen Fälle anstellen, in denen das Integral der Differentialgleichung aus Producten von algebraischen Functionen und Logarithmen ebensolcher Functionen zusammengesetzt ist, und es mag genügen, die Untersuchung für den Fall durchzuführen, dass die Differentialgleichung

$$(56.)\qquad \frac{d^m z}{dx^m}+Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\cdots+Y_{m-1}\frac{dz}{dx}+Y_m z = y,$$

worin y wiederum der Gleichung (3.) genügen soll, ein Integral von der Form

$$(57.)\qquad z = u\log v$$

besitzt, worin u und v algebraische Functionen von x sind, von denen die erstere sich rational durch x, Y_1, Y_2, ... Y_m und y ausdrücken lassen mag und, wie bekannt, ein Integral der reducirten Differentialgleichung ist. Es ist sogleich einzusehen, dass, wenn man sich v als Lösung einer algebraischen Gleichung vorstellt, deren Coefficienten rational aus x, Y_1, Y_2, ... Y_m

und y zusammengesetzt sind, und x solche geschlossenen Umkreise beschreiben lässt, dass, während $Y_1, Y_2, \dots Y_m, y$ ihre Werthe wieder annehmen, v in eine andere Lösung der diese Grösse definirenden Gleichung übergeht,

$$z = u \log v_1$$

ebenfalls ein Integral der Differentialgleichung (56.) ist, und daher

$$u \log \frac{v_1}{v}$$

der reducirten Differentialgleichung Genüge leistet. Nimmt man nun an, dass diese letztere gar keine logarithmischen Integrale dieser Form besitzt, so wird dieser Ausdruck eine algebraische Function, also $\frac{v_1}{v}$ eine Constante sein müssen, und somit aus früheren Auseinandersetzungen, wenn

$$v = \sqrt[\lambda]{w}$$

gesetzt wird, w durch eine Gleichung niedrigeren Grades, als es für v der Fall war, und von demselben Charakter wie jene definirt sein, und das Integral die Form annehmen

$$z = \frac{u}{\lambda} \log w.$$

Schliesst man so weiter, so folgt, dass das Integral (57.) der Differentialgleichung sich in die Form setzen lässt

$$(58.) \qquad z = U \log V,$$

worin U und V rational in $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ und y ausgedrückt sind; beachtet man aber, dass, wenn man x einen solchen Umkreis beschreiben lässt, dass y in εy übergeht, worin $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ ist,

$$(59.) \qquad z = U_1 \log V_1$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m z = \varepsilon y$$

wird, worin U_1 und V_1 aus U und V hervorgehen, wenn εy an die Stelle von y gesetzt ist, so wird

$$(60.) \qquad Z = U_1 \log V_1 - \varepsilon U \log V$$

ein Integral der reducirten Differentialgleichung, von der wiederum angenommen werden mag, dass sie keine logarithmischen Integrale besitze, so

dass Z eine algebraische Function sein muss, welche auch in eine Constante übergehen kann. Denkt man sich wiederum Z, U, U_1 und V_1 als algebraische Functionen von V und die letztere Grösse den Nullpunkt so oft umkreisend, bis die davon abhängigen Functionen ihren früheren Werth wieder annehmen, so folgt aus (60.) nach Früherem

$$(61.) \qquad l_1 U_1 - \varepsilon l U = 0,$$

worin l und l_1 ganze Zahlen bedeuten. Da nun U als rationale Function von y vermöge der Gleichung (3.) in der Form darstellbar ist

$$(62.) \qquad U = \psi_0 + \psi_1 y + \psi_2 y^2 + \cdots + \psi_{\varkappa\mu-1} y^{\varkappa\mu-1},$$

worin $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{\varkappa\mu-1}$ rationale Functionen von $x, Y_1, \ldots Y_m$ bedeuten, also

$$U_1 = \psi_0 + \psi_1 \varepsilon y + \psi_2 \varepsilon^2 y^2 + \cdots + \psi_{\varkappa\mu-1} \varepsilon^{\varkappa\mu-1} y^{\varkappa\mu-1}$$

ist, so folgt aus (61.)

$$\psi_0(l_1 - \varepsilon l) + \psi_1 y (l_1 \varepsilon - \varepsilon l) + \psi_2 y^2 (l_1 \varepsilon^2 - \varepsilon l) + \cdots + \psi_{\varkappa\mu-1} y^{\varkappa\mu-1} (l_1 \varepsilon^{\varkappa\mu-1} - \varepsilon l) = 0,$$

oder

$$\begin{aligned}
&(l_1 - \varepsilon l)[\psi_0 + \psi_\mu y^\mu + \psi_{2\mu} y^{2\mu} + \cdots + \psi_{(\varkappa-1)\mu} y^{(\varkappa-1)\mu}] \\
+\; & y(l_1 \varepsilon - \varepsilon l)[\psi_1 + \psi_{\mu+1} y^\mu + \psi_{2\mu+1} y^{2\mu} + \cdots + \psi_{(\varkappa-1)\mu+1} y^{(\varkappa-1)\mu}] \\
+\; & y^2(l_1 \varepsilon^2 - \varepsilon l)[\psi_2 + \psi_{\mu+2} y^\mu + \cdots\cdots + \psi_{(\varkappa-1)\mu+2} y^{(\varkappa-1)\mu}] \\
+\; & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
+\; & y^{\mu-1}(l_1 \varepsilon^{\mu-1} - \varepsilon l)[\psi_{\mu-1} + \psi_{2\mu-1} y^\mu + \cdots\cdots + \psi_{\varkappa\mu-1} y^{(\varkappa-1)\mu}] = 0.
\end{aligned}$$

Da aber diese Gleichung vom $(\varkappa\mu-1)^{\text{ten}}$ Grade in y ist, während die Gleichung (3.) in y irreductibel sein sollte, so müssen die Coefficienten der y-Potenzen, die in den einzelnen Posten verschieden sind, verschwinden, und beachtet man nun, dass die Beziehung

$$l_1 \varepsilon^\alpha - \varepsilon l = 0$$

für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots \mu-1$ nur erfüllbar ist, wenn $\alpha = 0, 1, 2$ oder $= \frac{\mu}{2} + 1$ ist, d. h. wenn ε rational $= \pm 1$, also $\mu = 1, 2$, oder $\varepsilon^{\frac{\mu}{2}} = -1$ ist, so folgt, dass, wenn μ eine von der Einheit verschiedene ungerade Zahl ist, sämmtliche ψ-Functionen mit Ausnahme derer, welche sich in der zweiten Klammer befinden, verschwinden müssen, und dass somit U die Form hat

$$(63.) \qquad U = y[\psi_1 + \psi_{\mu+1} y^\mu + \psi_{2\mu+1} y^{2\mu} + \cdots + \psi_{(\varkappa-1)\mu+1} y^{(\varkappa-1)\mu}],$$

und das gegebene Integral die Gestalt annimmt

$$(64.) \qquad z = y[\psi_1 + \psi_{\mu+1} y^\mu + \cdots + \psi_{(\varkappa-1)\mu+1} y^{(\varkappa-1)\mu}] \log V.$$

Wir erhalten somit den Satz:

Hat die nicht homogene lineare Differentialgleichung, deren rechte Seite y durch die Gleichung (3.) *definirt ist, ein algebraisch-logarithmisches Integral von der Form* (58.), *und besitzt die reducirte Differentialgleichung keine logarithmischen Integrale, so muss, wenn das μ der Gleichung* (3.) *eine von der Einheit verschiedene ungerade Zahl bedeutet, in dem Integralausdrucke* $U \log V$ *das algebraische Integral U der reducirten Differentialgleichung von der Form* (63.) *sein, wenn* $\psi_1, \psi_{\mu+1}, \ldots \psi_{(\varkappa-1)\mu+1}$ *rational aus den Coefficienten der reducirten Differentialgleichung zusammengesetzt sind.*

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{3x} = y,$$

für welche y durch die Gleichung definirt ist

$$y^3 x^2 - 1 = 0,$$

und deren reducirte Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{3x} = 0$$

nur die durch x und y rational ausdrückbaren Integrale besitzt

$$z = cxy,$$

das algebraisch-logarithmische Integral

$$z = xy \log x.$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, in welcher Weise sich die Verallgemeinerung dieser Sätze gestaltet, wenn das Integral der linearen nicht homogenen Differentialgleichung durch eine Summe von Producten algebraischer Functionen in Logarithmen ebensolcher Functionen gegeben ist.

Wien, im October 1882.

Ueber Coordinaten-Transformationen n^{ten} Grades.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

Zwei Räume R_x und R_y werden collinear auf einander bezogen, wenn man die homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punktes X von R_x beliebigen linearen Functionen der Coordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 eines Punktes Y von R_y proportional setzt. Die Collineation ist demnach ein specieller Fall derjenigen Beziehung von R_x zu R_y, welche durch die Gleichungen:

$$(a.)\quad \varrho x_1 = \varphi_1,\quad \varrho x_2 = \varphi_2,\quad \varrho x_3 = \varphi_3,\quad \varrho x_4 = \varphi_4 \quad \text{oder} \quad \frac{\varphi_1}{x_1} = \frac{\varphi_2}{x_2} = \frac{\varphi_3}{x_3} = \frac{\varphi_4}{x_4}$$

bedingt wird, wenn die φ_i vier quaternäre Formen n^{ten} Grades der Coordinaten y_i bedeuten und ϱ einen Proportionalitätsfactor darstellt.

Wir nennen zwei Punkte der beiden Räume „homolog" oder „einander entsprechend", wenn ihre Coordinaten x_i und y_i der Substitution n^{ten} Grades $(a.)$ genügen. Homologe Curven oder Flächen der Räume können durch homologe Punkte beschrieben werden. Den vier Coordinaten-Ebenen $(x_i = 0)$ von R_x entsprechen sonach in R_y vier beliebige Flächen F^n von der n^{ten} Ordnung $(\varphi_i = 0)$, und jeder fünften Ebene von R_x entspricht eine fünfte F^n von R_y, welche aus den vier ersteren linear ableitbar ist. Die Gleichungen:

$$(b.)\quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4 = 0$$

repräsentiren bei beliebigen Werthen der Parameter λ_i eine Ebene von R_x und die ihr entsprechende Fläche F^n von R_y; und zwar wird die Beziehung der beiden Räume durch diese Gleichungen $(b.)$ ebenso festgestellt wie durch die Substitution n^{ten} Grades $(a.)$. Die rationalen Coordinaten-Transformationen der Herren *Cayley*, *Cremona* und *Nöther* *) sind Specialfälle der obigen.

---

*) *Cayley* in den Proceedings of the Lond. math. Soc. vol. 3; *Nöther* in den Math. Annalen Bd. 2 und 3; *Cremona* in den Rendiconti del R. Istituto Lombardo 1871 Vol. 4.

Die Flächen n^{ter} Ordnung F^n von R_y, welche den sämmtlichen Ebenen des Raumes R_x entsprechen, bilden eine lineare Mannigfaltigkeit dritter Stufe, ein „F^n-Gebüsch"; dasselbe ist bestimmt durch die vier Flächen $\varphi_i = 0$, welche wir als von einander linear unabhängig annehmen. Wenn eine Ebene von R_x sich um eine ihrer Geraden g dreht, so beschreibt die ihr entsprechende Fläche von R_y einen F^n-Büschel; der Geraden g entspricht also die reelle oder imaginäre Grundcurve $C^{n.n}$ dieses Büschels. Die Gleichungen (*b.*) repräsentiren einen beliebigen Ebenenbüschel von R_x und den entsprechenden Flächenbüschel von R_y, wenn darin die λ_i als lineare Functionen eines Parameters μ angenommen werden; diese homologen Büschel sind projectiv auf einander bezogen. Ebenso ergiebt sich, dass den Ebenen eines Punktes X' von R_x die Flächen eines F^n-Bündels von R_y projectiv entsprechen; dem Punkte X' aber sind diejenigen Punkte Y' homolog, durch welche drei beliebige und folglich alle Flächen dieses Bündels gehen.

Einem Punkte von R_y, welcher nicht allen Flächen des F^n-Gebüsches gemein ist, entspricht ein und nur ein Punkt von R_x; einem Punkte von R_x dagegen entsprechen im Allgemeinen $n.n.n$ Punkte von R_y, welche ich associirte Punkte nenne. Wir rechnen zu dem F^n-Gebüsche auch die Raumcurven $C^{n.n}$ und Gruppen associirter Punkte $[n, n, n]$, in welchen ihre Flächen büschel- und bündelweise sich schneiden. Zwei resp. drei Gruppen associirter Punkte können allemal durch eine $C^{n.n}$ resp. F^n des Gebüsches verbunden werden; derselben entspricht in R_x die Gerade oder Ebene, welche die entsprechenden zwei resp. drei Punkte von R_x verbindet. Zwei associirte Curven oder Flächen von R_y können durch associirte Punkte beschrieben werden.

Durch einen beliebigen Punkt Y' von R_y gehen doppelt unendlich viele Flächen des F^n-Gebüsches; dieselben entsprechen den Ebenen des homologen Punktes X' von R_x. Jene Flächen haben in Y' nur dann eine gemeinschaftliche Tangente oder Berührungsebene, wenn Y' mit einem oder mehreren seiner associirten Punkte zusammenfällt, also sich selbst associirt ist. Im Allgemeinen bilden die Berührungsebenen und Tangenten der Flächen in Y' einen Strahlenbündel, welcher auf den Bündel X' collinear bezogen ist; denn jeder Ebene oder Geraden durch X' entspricht eine Fläche resp. Curve durch Y' und deren Berührungsebene oder Tangente, und wenn eine Ebene um eine Gerade von X' sich dreht, so dreht sich die entsprechende Berührungsebene um die homologe Tangente von Y'. Daraus schliessen wir:

Homologe unendlich kleine Raum- oder Flächenelemente) der Räume R_x und R_y sind collinear; eine Ausnahme bilden diejenigen Elemente von R_y, welche sich selbst associirte Punkte enthalten.*

Von homologen Flächenelementen gilt der Satz, weil er von homologen Raumelementen gilt. Associirte unendlich kleine Raum- oder Flächenelemente von R_y sind i. A. zu einem und demselben Elemente von R_x und folglich zu einander collinear.

Wenn beliebige Curven und Flächen des Raumes R_y sich in einem Punkte Y' berühren, so tangiren sich die entsprechenden Curven und Flächen von R_x in dem entsprechenden Punkte X'. Eine Ausnahme kann jedoch eintreten, wenn Y' sich selbst associirt ist; denn in diesem Falle haben die Flächen und Raumcurven von R_y, welche den Ebenen und Geraden des Punktes X' entsprechen, mindestens eine gemeinschaftliche Tangente t im Punkte Y'. Legt man nun durch einen sich selbst associirten Punkt Y' eine beliebige Fläche F_y, welche die zu Y' gehörige Tangente t schneidet, und an die entsprechende Fläche von R_x eine Berührungsebene τ im Punkte X', so entspricht dieser Ebene eine F^n in R_y, welche die Fläche F_y und ausserdem die Tangente t in Y' berührt und folglich Y' zum Doppelpunkt hat.

Jeder sich selbst associirte Punkt Y' von R_y ist demnach Doppelpunkt einer Fläche des F^n-Gebüsches, und umgekehrt;
denn eine beliebig durch den Doppelpunkt gehende Raumcurve $C^{n.n}$ des Gebüsches hat zwei in ihm zusammenfallende associirte Punkte mit der Fläche gemein. Zugleich ergiebt sich:

Dieser Fläche des Gebüsches entspricht in R_x eine Ebene τ, welche in dem entsprechenden Punkte X' von allen Flächen berührt wird, deren homologe durch Y' gehen.

Den unendlich kleinen Flächenelementen von R_y, welche durch den sich selbst associirten Punkt Y' gehen, entspricht hiernach in R_x ein und dasselbe durch X' gehende Element der Ebene τ; und den unendlich kleinen Linienelementen von R_x, welche den Punkt X' enthalten, entspricht in R_y ein und dasselbe durch Y' gehende Element der Geraden t. Den in τ liegenden Geraden des Punktes X' entsprechen Raumcurven $C^{n.n}$ in R_y, welche Y' zum Doppelpunkt haben und in Y' von je zwei mit t in einer Ebene liegenden Geraden berührt werden. Den unendlich kleinen Flächen-

*) d. h. solche, deren sämmtliche Dimensionen unendlich klein sind.

elementen von R_x, welche mit τ ein bestimmtes durch X' gehendes Linienelement gemein haben, entspricht folglich in R_y ein und dasselbe durch t gehende Flächenelement von Y'; den unendlich kleinen Linienelementen des letzteren entspricht ebenso jenes eine in τ liegende Linienelement durch X'. Die zwischen den Strahlenbündeln homologer Punkte X', Y' bestehende collineare Beziehung artet in der hier angegebenen Weise aus, wenn Y' sich selbst associirt ist, und zwar sind die Ebene τ von X' und der Strahl t von Y' ausgezeichnete Elemente der beiden Bündel. — Den Specialfall, in welchem Y' zwei- oder mehrfach sich selbst associirt ist, übergehen wir der Kürze wegen.

Der Ort aller sich selbst associirten Punkte des Raumes R_y ist die *Jacobi*sche Fläche $(4n-4)^{ter}$ Ordnung, welche die Doppelpunkte aller Flächen des F^n-Gebüsches enthält; er wird dargestellt durch die Gleichung:

$$\Sigma \pm \varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33}\varphi_{44} = 0, \quad \text{worin} \quad \varphi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}.$$

Dieser *Jacobi*schen Fläche entspricht in R_x eine Fläche Φ [von der Ordnung $4n^2(n-1)$ und der Klasse $4(n-1)^3$], deren Berührungsebenen τ den mit Doppelpunkten behafteten Flächen des Gebüsches homolog sind. Einer nicht sich selbst associirten Fläche oder Curve des Raumes R_y, welche die *Jacobi*sche Fläche in beliebigen Punkten schneidet, entspricht in R_x eine Fläche resp. Curve, welche die Fläche Φ in den entsprechenden Punkten berührt, also derselben eingeschrieben ist.

Einer Geraden von R_y entspricht in R_x im Allgemeinen eine rationale Raumcurve n^{ter} Ordnung, welche die Fläche Φ in $4n-4$ Punkten berührt und auf die Gerade eindeutig bezogen ist; dieselbe hat mit einer Ebene von R_x die n Punkte gemein, welche den n Schnittpunkten der Geraden und der homologen F^n von R_y entsprechen. Der Punkt Y liegt auf der Geraden PQ, wenn $y_i = p_i + \mu q_i$ ist für $i = 1, 2, 3, 4$; für die Coordinaten des entsprechenden Punktes X ergeben sich dann aus (a.) Gleichungen von der Form

$$\varrho x_i = A_i + B_i\mu + C_i\mu^2 + \cdots + N_i\mu^n \quad \text{für } i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

woraus durch Elimination von ϱ und μ die Gleichungen der jener Geraden entsprechenden Curve folgen.

Einer beliebigen Ebene von R_y entspricht in R_x eine eindeutig auf sie bezogene rationale Fläche von der Ordnung n^2 und der Klasse $3(n-1)^2$, welche die Fläche Φ längs einer Raumcurve $4n(n-1)^{ter}$ Ordnung berührt;

nämlich diese Fläche hat mit einer Geraden ebenso viele Punkte gemein, wie die Ebene mit der entsprechenden Raumcurve $C^{n.n}$, und ein beliebiger Ebenenbüschel enthält von ihr i. A. $3(n-1)^2$ Berührungsebenen, weil von dem entsprechenden F^n-Büschel ebenso viele Flächen die gegebene Ebene berühren. Jeder Fläche m^{ter} Ordnung von R_x entspricht eine Fläche nm^{ter} Ordnung in R_y; man erhält die Gleichung der letzteren, wenn man in derjenigen der ersteren die Coordinaten x_i durch die Functionen φ_i ersetzt. Einer Fläche m^{ter} Ordnung von R_y entspricht in R_x i. A. eine eindeutig auf sie bezogene Fläche nnm^{ter} Ordnung, und ihr ist folglich i. A. eine Fläche von der Ordnung $(n^3-1)m$ in R_y associirt; nämlich die ihr entsprechende Fläche hat mit einer Geraden von R_x i. A. ebenso viele Punkte gemein, wie die Fläche m^{ter} Ordnung mit der entsprechenden $C^{n.n}$. Eine Ausnahme machen jedoch die sich selbst associirten Flächen von R_y. Einer Curve k^{ter} Ordnung von R_x entspricht in R_y eine Curve nnk^{ter} Ordnung; dagegen entspricht einer Curve k^{ter} Ordnung von R_y i. A. eine eindeutig auf sie bezogene Curve nk^{ter} Ordnung in R_x, und ihr ist in R_y eine Curve von der Ordnung $(n^3-1)k$ associirt. Der Beweis ist dem vorigen leicht nachzubilden.

Nächst dem Falle $n=1$ der Collineation ist derjenige der quadratischen Substitution $(n=2)$ der einfachste; derselbe bildet den Gegenstand mehrerer synthetisch-geometrischen Arbeiten*). Die *Jacobi*sche Fläche ist für $n=2$ von der vierten Ordnung und heisst die „Kernfläche" des F^2-Gebüsches; die ihr in R_x entsprechende Fläche Φ ist von der vierten Klasse und der sechzehnten Ordnung. Man erhält die Gleichung von Φ in Ebenencoordinaten λ_i, wenn man aus den vier Gleichungen:

$$\lambda_1\varphi_{1k}+\lambda_2\varphi_{2k}+\lambda_3\varphi_{3k}+\lambda_4\varphi_{4k} = 0 \qquad (k=1,2,3,4)$$

die Punktcoordinaten y_i eliminirt. Nur in ganz speciellen Fällen sind die Verhältnisse der y_i als explicite Functionen der x_i darstellbar für $n=2$, z. B. wenn alle Flächen des F^2-Gebüsches einem Tetraëder umschrieben sind, oder wenn sie ein gemeinschaftliches Poltetraëder haben; i. A. ergeben sich aus (*a.*) für die Verhältnisse der Coordinaten y_i Gleichungen achten Grades, deren Coefficienten Functionen der Coordinaten x_i sind.

Wird $n=2$ und zugleich $y_i = p_i+\mu q_i$ gesetzt, so nehmen die Gleichungen (*a.*) die Form an:

---

*) Vgl. meine „Geometrie der Lage II." und dieses Journal Bd. 86, S. 84.

$$\varrho x_i = A_i + B_i\mu + C_i\mu^2 \quad \text{für } i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

und es ergeben sich aus ihnen durch Elimination von ϱ und μ für die x_i i. A. eine lineare und eine quadratische Gleichung. Der beliebigen Geraden PQ von R_y entspricht also i. A. ein Kegelschnitt in R_x. Wenn jedoch die A_i zu den C_i proportional oder auch die B_i alle Null sind, so ergeben sich für die x_i zwei lineare Gleichungen; also jeder Geraden PQ von R_y, welche zwei associirte Punkte verbindet, oder von welcher zwei Punkte P, Q conjugirt sind bezüglich aller Flächen des F^2-Gebüsches, entspricht in R_x eine (sich selbst associirte) Gerade. — Einer beliebigen Ebene von R_y entspricht bekanntlich in R_x eine *Steiner*sche Fläche vierter Ordnung dritter Klasse, welche mit ihren Berührungsebenen je zwei Kegelschnitte gemein hat und die Fläche Φ längs einer Raumcurve achter Ordnung berührt. Eliminirt man die Coordinaten y_i aus einer linearen Gleichung und den quadratischen Gleichungen (a.), so erhält man demnach für die x_i eine biquadratische Gleichung, die allerdings wenig übersichtlich ist.

Ersetzt man in den allgemeinen Gleichungen (a.) und (b.) die Punktcoordinaten x_i durch homogene Ebenencoordinaten ξ_i, so entspricht jeder Ebene von R_x eine Gruppe associirter Punkte in R_y und jedem Punkte von R_x eine Fläche des F^n-Gebüsches in R_y; auch sind alsdann homologe unendlich kleine Raumelemente von R_x und R_y nicht mehr collinear, sondern i. A. reciprok auf einander bezogen. Einen bemerkenswerthen Fall dieser verallgemeinerten reciproken Beziehung erhält man, wenn man jedem Punkte seine erste Polare bezüglich einer algebraischen Fläche als entsprechende Fläche zuweist. — Bekanntlich ist der Ort Φ eines Punktes, dessen erste Polare bezüglich einer Fläche F^3 dritter Ordnung einen Doppelpunkt hat, identisch mit der Kernfläche K^4 der F^3, d. h. mit dem Orte dieses Doppelpunktes. Daraus und aus dem Obigen ergiebt sich beispielsweise sofort der *Steiner*sche Satz*): Die Polarebene eines Punktes P bezüglich einer F^3 umhüllt, wenn P eine Gerade oder Ebene beschreibt, i. A. eine Kegelfläche zweiter Ordnung resp. eine Fläche vierter Klasse dritter Ordnung, welche die Kernfläche K^4 der F^3 in vier Punkten resp. längs einer Raumcurve (sechster Ordnung) berührt. Die Fläche vierter Klasse ist der *Steiner*schen Fläche vierter Ordnung reciprok.

Um zwei Räume R_x und R_y so auf einander zu beziehen, dass ihre

*) *Steiners* Werke II. S. 658.

homologen. kleinsten Theile collinear sind, kann man statt der Gleichungen (*a.*) beliebige drei bezüglich der x_i sowie auch der y_i homogene Gleichungen annehmen und zwei Punkte der Räume homolog nennen, wenn ihre Coordinaten diesen Gleichungen genügen. Den Punkten eines jeden dieser Räume entsprechen dann die Schnittpunkte von je drei transcendenten oder algebraischen Flächen des andern; doch gehören diese Flächentripel i. A. nicht mehr einem Gebüsche an. Die Räume enthalten i. A. keine eindeutig auf einander bezogenen homologen Curven oder Flächen. Durch diejenigen einander entsprechenden Curven und Flächen, welche durch zwei homologe Punkte X', Y' gehen, sind aber die Strahlenbündel X', Y' ebenso wie im Falle der Substitution n^{ten} Grades collinear auf einander bezogen.

Strassburg i. E., 8. Januar 1882.

Zur Polarentheorie der Complexe zweiten Grades.

(Von Herrn *Wilhelm Stahl* in Aachen.)

Jeder Geraden l des Raumes ist in Bezug auf einen Complex zweiten Grades eine Polare l' zugeordnet, als Ort aller Pole der Geraden l in Bezug auf die in den Ebenen des Büschels l gelegenen Complexcurven und gleichzeitig als Schnitt aller Polarebenen von l in Bezug auf die Complexkegel, deren Spitzen auf l sich befinden. Aber im Allgemeinen ist nicht umgekehrt l die Polare von l', doch besteht zwischen beiden Linien eine gewisse Art von Gegenseitigkeit. Es ist nämlich l stets die Polare von l' in Bezug auf einen zweiten Complex, welcher mit dem ersten die Singularitätenfläche gemein hat. Dieser Satz soll hier auf synthetischem Wege bewiesen werden. Bei der analytischen Behandlung des Gegenstandes ergiebt sich dann die volle Bedeutung des Satzes, indem alle diejenigen Linien betrachtet werden, welche für einen Complex dieselbe Polare haben. Die Beziehungen zwischen diesen Geraden gewinnen an Anschaulichkeit bei dem tetraedralen Complexe, für welchen einige hierher gehörende Constructionen und Sätze zum Schlusse mitgetheilt werden. Ich beziehe mich in diesem Aufsatze auf zwei frühere Arbeiten, welche in diesem Journale erschienen sind *).

§ 1.

Wir betrachten alle Liniencomplexe zweiten Grades, welche eine *gemeinschaftliche Singularitätenfläche* Φ_4 haben.

1. Durch eine beliebige Gerade t lassen sich an Φ_4 vier Tangentialebenen legen. Man ordne dieselben in zwei Paare und bestimme die Ordnungsebenen μ und ν der durch diese Paare gegebenen Involution. Der Pol der Ebene μ in Bezug auf alle Complexe ist ein in ν liegender Punkt

---

*) Das Strahlensystem dritter Ordnung zweiter Klasse Bd. 91, S. 1. Zur synthetischen Construction der Complexe zweiten Grades Bd. 93, S. 215.

K. Die Gerade t ist in der Ebene μ und ebenso in ν Tangente der *Cayley*schen Curve des Kegelschnittnetzes, dem alle in μ resp. ν liegenden Complexcurven angehören. Es seien ferner U, V, W, Z die vier Schnittpunkte von t mit Φ_4.

Einem Complexe I gehört die in μ liegende Complexcurve k_1 an, welche Φ_4 in U und V berührt, sowie die in ν liegende Complexcurve k'_1, welche Φ_4 in W und Z berührt.

Einem Complexe II gehört die in μ liegende Complexcurve k_2 an, welche Φ_4 in W und Z berührt, sowie die in ν liegende Complexcurve k'_2, welche Φ_4 in U und V berührt.

Die Gerade t und eine zweite in μ liegende Linie t' bilden zusammen einen dem Curvennetze in μ angehörenden Kegelschnitt. Der Punkt (t, t') liegt auf der *Hesse*schen Curve des Netzes und wird von K durch eine Gerade projicirt, welche je zwei Doppelpunkte derjenigen Brennflächen enthält, die von den Polaren und Polaraxen der Ebene μ in Bezug auf den Complex I oder II umhüllt werden.

Die beiden Doppelpunkte T und T' für I sind harmonisch von einander getrennt durch K und μ. Der eine Punkt T ist Mittelpunkt eines Strahlenbüschels in ν, welcher aus Polaraxen von μ in Bezug auf I besteht; der andere Punkt T' ist Mittelpunkt eines Büschels in ν, dessen Strahlen Polaren von Geraden der Ebene μ sind. Durch den Punkt T gehen die Tangenten von k'_1 in W und Z, da sie als singuläre Linien von I Polaraxen von μ sind. Durch den Punkt T' gehen die Tangenten von k'_2 in U und V, weil die Polaren von singulären Linien des Complexes Tangenten von Φ_4 sind. Die vier Tangentialebenen von Φ_4 in den Punkten U, V, W, Z enthalten demnach paarweise die Punkte T und T'. Man erkennt nun, dass die Punkte T und T' für den Complex I die Punkte T' und T für den Complex II sind. Durch einen beliebigen Punkt von t gehen in Bezug auf I und II zwei Polaraxen der Ebene μ, welche durch K und μ harmonisch getrennt sind.

2. Durch einen beliebigen Punkt P der Ebene μ gehen an die ihr zugehörende *Cayley*sche Curve drei Tangenten. Jede derselben liefert zwei Polaraxen für zwei Complexe, welche die zwischen I und II gefundene Beziehung haben. Da nun die Polaraxen der Ebene μ für die Complexkegel P aller zu Φ_4 gehörenden Complexe einen Kegel zweiter Ordnung bilden, so erkennt man, ***dass*** $\overline{PK}$ ***die Polare von*** μ ***in Bezug auf diesen***

Polaraxenkegel ist, und weiter, *dass die Gesammtheit aller Polaren von Geraden der Ebene μ übereinstimmt mit derjenigen aller Polaraxen von μ in Bezug auf alle zu Φ_4 gehörenden Complexe.* Für einen beliebigen Complex sind nämlich die durch einen Punkt P von μ gehenden Polaren und Polaraxen harmonisch durch μ und K getrennt. Die sämmtlichen Polaren und Polaraxen von μ bilden, beiläufig bemerkt, einen Strahlencomplex sechsten Grades.

Die Polarstrahlen eines beliebigen Punktes P in Bezug auf alle zu Φ_4 gehörenden Complexe bilden einen Strahlencomplex, welcher in jeder durch P gelegten Ebene einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung besitzt. Die Polaren von P bezüglich dieser Strahlenbüschel liegen sämmtlich in einer Ebene, der Polarebene k von P in Bezug auf Φ_4.

3. Ein beliebiger Punkt P in μ ist Mittelpunkt eines Kegels, der aus Polaraxen von μ besteht, und in μ liegt ein Strahlenbüschel, welcher aus Polarstrahlen von P besteht. Kegel und Büschel haben zwei gemeinsame Strahlen und sind projectiv auf einander bezogen, wenn diejenigen Strahlen einander entsprechen, welche Polaraxen von μ und Polarstrahlen von P für denselben Complex sind. Die gemeinschaftlichen Strahlen beider Gebilde entsprechen jeder sich selbst. Die Involution auf dem Kegel durch das Centrum K wird eine Involution auf dem Strahlenbüschel hervorrufen, dessen Centrum P ist. Ein Paar dieser Involution auf dem Kegel sei a und b; das entsprechende Paar auf dem Büschel a_1 und b_1. Ist a eine Polaraxe, so ist für den nun bestimmten Complex P der Pol von a_1 bezüglich der in μ liegenden Complexcurve, und desshalb ist b die Polare von a_1 für diesen Complex. Ebenso schliesst man: Da a_1 Polarstrahl von P ist, so ist b_1 Polare von a für denselben Complex. Für einen zweiten Complex sei b Polaraxe von μ, dann ist a Polare von b_1 und a_1 Polare von b.

Die Gerade a hat für einen Complex die Gerade b_1 zur Polare und ist für einen zweiten Complex, der mit dem ersten die Singularitätenfläche gemein hat, Polare von b_1.

4. Die Fläche R_8, der Ort aller Polaren von a bezüglich der zu Φ_4 gehörenden Complexe, ist nun auch der Ort aller Geraden, für welche a Polare ist. Mit Hülfe des *Chasles*schen Correspondenzprincips kann *die Zahl n der Geraden bestimmt werden, welche dieselbe Linie a für einen gegebenen Complex als Polare haben.* Zu jeder Erzeugenden a' auf R_8 als Polare von a gehört eine Gruppe von n Erzeugenden auf R_8, welche für

denselben Complex die Linie a zur Polare haben. Eine Gerade der Gruppe fällt mit a' im Ganzen zehnmal zusammen; nämlich viermal, wenn a' mit a sich vereinigt, und sechsmal, wenn a' in diejenigen Erzeugenden von R_8 rückt, welchen a in den sechs Fundamentalcomplexen ersten Grades zugeordnet ist. Man schliesst daraus, dass n gleich *neun* ist. Dies findet sich in § 2 bestätigt.

5. Die Polaraxen einer Ebene μ in Bezug auf alle zu Φ_4 gehörenden Complexe bilden unendlich viele specielle Strahlensysteme dritter Ordnung zweiter Klasse, deren Brennflächen von der sechsten Ordnung und vierten Klasse sind. Jede dieser Brennflächen besitzt ausserhalb μ sechs Doppelpunkte, welche paarweise durch μ und K harmonisch von einander getrennt sind. Die Doppelpunkte werden von K aus auf μ in die Punkte der *Hesse*schen Curve des Kegelschnittnetzes projicirt, dem alle in μ befindlichen Complexcurven angehören. Der Ort aller Doppelpunkte ist demnach eine Raumcurve C_6 sechster Ordnung, welche auf dem Kegel dritten Grades liegt, dessen Spitze K und dessen Leitcurve die *Hesse*sche Curve der Ebene μ ist. Für einen speciellen Complex, der aus einem doppelt zählenden Fundamentalcomplex ersten Grades besteht, in Bezug auf welchen der Ebene μ der Punkt A zugeordnet ist, reducirt sich das System der Polaraxen auf ein Strahlensystem zweiter Ordnung und Klasse und den Strahlenbündel A. Ein Paar der oben betrachteten Doppelpunkte vereinigt sich in diesem Falle mit A. Die C_6 geht desshalb durch die sechs Punkte $A, B, C, \dots F$, welche der Ebene μ in Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe zugeordnet sind, und die Tangenten der C_6 in diesen Punkten gehen sämmtlich durch K. Bestimmt man eine Fläche zweiter Ordnung, welche die sechs Punkte $A, \dots F$ und einen beliebigen der Doppelpunkte enthält, ferner für μ den Pol K liefert, so muss diese Fläche C_6 vollständig enthalten. *C_6 ist der vollständige Durchschnitt eines Kegels dritter Ordnung mit einer Fläche zweiten Grades.*

§ 2.

Die neun Geraden, welche in Bezug auf einen Complex dieselbe Polare l besitzen, bilden mit der Linie l eine bemerkenswerthe Gruppe von zehn Geraden. Jede Gerade l' der Gruppe ist nämlich die Polare der neun übrigen in Bezug auf einen durch den ersten Complex und l' bestimmten zweiten Complex mit derselben Φ_4.

Dieser Satz soll hier auf analytischem Wege bewiesen werden. Wir benutzen zu diesem Zwecke die von Herrn *F. Klein**) eingeführten homogenen Coordinaten, welche gleich Null gesetzt die sechs linearen Fundamentalcomplexe darstellen. Diese Coordinaten seien mit $x_\alpha \dots$, $y_\alpha \dots$ bezeichnet, wobei $\alpha = 1, \dots 6$. Dann ist $\Sigma_\alpha x_\alpha^2 = 0$; $\Sigma_\alpha y_\alpha^2 = 0$ etc.

$$(1.) \quad \Sigma_\alpha \frac{y_\alpha^2}{k_\alpha + \lambda} = 0$$

ist die Gleichung eines Complexes zweiten Grades, und bei variablem Werthe von λ sind hierdurch alle Complexe mit derselben Singularitätenfläche dargestellt.

Eine beliebige Gerade habe die Coordinaten x_α; dann sind die linearen Polarcomplexe von x in Bezug auf den Complex λ durch die Gleichung:

$$(2.) \quad \Sigma_\alpha \left(\nu y_\alpha \frac{x_\alpha}{k_\alpha + \lambda} + \mu y_\alpha x_\alpha \right) = 0$$

gegeben, wobei μ und ν beliebige Parameter sind. Diese Polarcomplexe bilden einen Büschel, dessen Träger eine Strahlencongruenz ersten Grades ist. Die Leitgeraden letzterer sind die Linie x und die Polare derselben für den Complex λ. Man findet die Coordinaten dieser Linie durch Bestimmung der speciellen linearen Complexe des Büschels; also durch:

$$\nu^2 \Sigma_\alpha \left(\frac{x_\alpha}{k_\alpha + \lambda} \right)^2 + 2\mu\nu \Sigma_\alpha \frac{x_\alpha^2}{k_\alpha + \lambda} = 0.$$

Die Wurzel $\nu = 0$ dieser Gleichung liefert die Gerade x; die zweite Wurzel die Polare von x. Mit Hülfe von (2.) folgt die Gleichung des speciellen linearen Complexes, dessen Leitgerade die Polare z von x ist,

$$\Sigma_\alpha \left(\frac{x_\alpha}{k_\alpha + \lambda} \right)^2 \Sigma_\alpha x_\alpha y_\alpha - 2 \Sigma_\alpha \frac{x_\alpha^2}{k_\alpha + \lambda} \Sigma_\alpha \frac{x_\alpha y_\alpha}{k_\alpha + \lambda} = 0.$$

Die Polare z von x hat desshalb die Coordinaten:

$$\varrho z_\beta = x_\beta \Sigma_\alpha \left(\frac{x_\alpha}{k_\alpha + \lambda} \right)^2 - \frac{2 x_\beta}{k_\beta + \lambda} \Sigma_\alpha \frac{x_\alpha^2}{k_\alpha + \lambda},$$

oder:

$$(3.) \quad \varrho z_\beta (k_\beta + \lambda)^2 = x_\beta \Sigma_\alpha \left(\frac{k_\alpha - k_\beta}{k_\alpha + \lambda} \right)^2 x_\alpha^2.$$

Soll nun für einen zweiten Complex λ_1 die Linie x Polare von z sein, so folgt:

*) Math. Annal. Bd. 2. S. 203 u. flgd.

$$(4.)\quad \sigma(k_\beta+\lambda_1)^2 x_\beta = z_\beta \Sigma_\alpha \Big(\frac{k_\alpha-k_\beta}{k_\alpha+\lambda_1}\Big)^2 z_\alpha^2.$$

Fügen wir hinzu:

$$(5.)\quad \Sigma_\alpha x_\alpha^2 = 0;\quad \Sigma_\alpha z_\alpha^2 = 0,$$

so müssen sich für gegebene x_α und λ die Gleichungen (3.), (4.), (5.) befriedigen lassen. Sie sind erfüllt, wenn wir setzen:

$$\frac{z_\beta}{k_\beta+\lambda_1} = \frac{x_\beta}{k_\beta+\lambda},$$

dann folgt:

$$(6.)\quad \Sigma_\alpha z_\alpha^2 = \Sigma_\alpha x_\alpha^2 \Big(\frac{k_\alpha+\lambda_1}{k_\alpha+\lambda}\Big)^2 = 0,$$

oder:

$$\lambda_1 = \lambda - 2\frac{\Sigma_\alpha \frac{x_\alpha^2}{k_\alpha+\lambda}}{\Sigma_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(k_\alpha+\lambda)^2}} \quad \text{und} \quad \varrho = \sigma = \Sigma_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(k_\alpha+\lambda)^2}.$$

Die Gleichung:

$$\Sigma_\alpha x_\alpha'^2 \Big(\frac{k_\alpha+\lambda_1}{k_\alpha+\lambda}\Big)^2 = 0$$

ist für λ vom zehnten Grade; eine Wurzel ist λ_1, die übrigen seien $\lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_{10}$. Sind x' und λ_1 gegeben, so finden sich neun Complexe $\lambda_2, \dots \lambda_{10}$, in Bezug auf welche die Gerade x' Polaren hat, deren Polaren in Bezug auf λ_1 mit x' zusammenfallen. Die Coordinaten dieser Geraden seien $x_\alpha'', x_\alpha''', \dots x_\alpha^X$. Dann ist:

$$x_\alpha'(k_\alpha+\lambda_1) = x_\alpha''(k_\alpha+\lambda_2) = x_\alpha'''(k_\alpha+\lambda_3) = \dots = x_\alpha^X(k_\alpha+\lambda_{10}),$$

und:

$$\Sigma_\alpha x_\alpha^{(\mu)2} = \Sigma_\alpha x_\alpha^{(\nu)2}\Big(\frac{k_\alpha+\lambda_\nu}{k_\alpha+\lambda_\mu}\Big)^2 = 0,$$

woraus wir schliessen:

Für den Complex λ_1 ist x' Polare der Geraden $x'', \dots x^X$,
- - - λ_2 - x'' - - - $x', x''', \dots x^X$,
- - - λ_ν - $x^{(\nu)}$ - - - $x', x'', \dots x^{(\nu-1)}, x^{(\nu+1)}, \dots x^X$.

Wodurch der oben ausgesprochene Satz erwiesen ist.

§ 3.

Der *Reye*sche oder tetraedrale Complex.

Bei speciellen Complexen zweiten Grades treten die sechs linearen Fundamentalcomplexe nicht mehr in der Weise auf, dass sie dem in § 2

benutzten Coordinatensysteme zu Grunde gelegt werden können. Eine Gerade hat aber stets noch ihre Polare und ist Polare einer Gruppe von Geraden, deren Zahl kleiner als neun ist, welche aber mit der ersten Geraden eine neue Gruppe bilden, die stets den in § 2 bewiesenen Satz erfüllt. Wir wollen hier auf synthetischem Wege einige wichtige Sätze aus der Polarentheorie des *Reye*schen Complexes erörtern.

1. Es sei ein beliebiges Tetraeder mit den Ecken A, B, C, D und den diesen Punkten gegenüberstehenden Seitenflächen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gegeben. Wir betrachten alle Flächen zweiten Grades F_2, welche das Tetraeder zu einem *Polartetraeder* haben. Die Flächen F_2 bilden ein *Flächennetz*, das sich selbst reciprok ist. Durch *jede Gerade a* des Raumes lässt sich im Allgemeinen *eine* F_2 legen. Die durch einen Punkt P gehenden Geraden a und a' einer F_2 sind harmonisch von einander getrennt durch die drei Ebenenpaare, welche P mit den gegenüberstehenden Kantenpaaren des Tetraeders verbinden.

Es sind desshalb die Geraden a und a' conjugirte Strahlen in Bezug auf einen Kegelbüschel, dessen Mittelpunkt P ist, und dessen Grundstrahlen durch die Ecken des Tetraeders gehen. In der Ebene μ der beiden Strahlen a und a' sind diese einander conjugirt in Bezug auf eine Kegelschnittschaar, deren Grundtangenten die Schnitte von μ mit den Seitenflächen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind.

2. Hat ein Complex zweiten Grades das Tetraeder (A, B, C, D) zur Singularitätenfläche, so enthält jeder Complexkegel mit der beliebigen Spitze P die vier Strahlen $\overline{PA}, \dots \overline{PD}$. Die Polare einer durch P gehenden Geraden a bezüglich dieses Complexes schneidet desshalb die durch P gehende Gerade a', welche mit a auf einer F_2 liegt. Lässt man P auf der festen Linie a sich bewegen, so erkennt man, *dass die Polare von a bezüglich des Complexes derselben Fläche F_2 und auf dieser derselben Geradenschaar angehört wie a.* Man kann der Geraden a eine beliebige Linie dieser Schaar als Polare bezüglich eines zum Tetraeder gehörenden Complexes zuweisen und letzterer ist dadurch eindeutig bestimmt. Jeder Geraden des Raumes ist dann eindeutig eine Polare zugewiesen, wie sich dies auch mittelst einer einfachen Construction verfolgen lässt.

3. Die Fläche R_8, der Ort aller Polaren einer Geraden a bezüglich der Complexe mit gemeinsamer Singularitätenfläche besteht in unserem Falle aus vier Flächen zweiten Grades, welche sämmtlich a enthalten.

Eine derselben ist F_2; jede der drei übrigen verbindet a mit zwei gegenüberstehenden Kanten des Tetraeders. Zu den betrachteten Complexen gehören drei specielle, deren sämmtliche Complexcurven und Complexkegel je eine Strahlencongruenz ersten Grades bilden. Die Linie a hat in Bezug auf jeden dieser drei Complexe unendlich viele Polaren.

4. Wir betrachten einen zu (A, B, C, D) gehörenden Complex und fragen nach dem Orte der Polaren einer Geraden, welche eine beliebige Ebene μ beschreibt. Gleichzeitig mit diesen Polaren untersuchen wir die Polaraxen der Ebene μ und bemerken folgende Beziehungen. Die Polare einer Geraden a von μ schneidet alle Polaraxen von μ bezüglich derjenigen Complexkegel, deren Mittelpunkte auf a liegen. Die Polaraxe von μ, welche diese Ebene in P trifft, schneidet die Polaren aller Strahlen des Büschels $(P\mu)$. Zeigen wir nun, dass zu dem Systeme der Polaren zwei Strahlenbüschel gehören, welche verschiedene Ebenen und Mittelpunkte, aber einen gemeinsamen Strahl besitzen, so ist damit bewiesen, dass die Systeme der Polaraxen und der Polaren zwei specielle Strahlensysteme dritter Ordnung zweiter Klasse bilden, welche dieselbe Brennfläche umhüllen*).

Die Ebene μ schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in Tangenten der in μ liegenden Complexcurve. Dieselben bilden ein vollständiges Vierseit, dessen sechs Ecken auf den sechs Kanten des Tetraeders liegen. Wir suchen die Polaren derjenigen Geraden von μ auf, welche durch L, einen dieser Eckpunkte, der in der Kante $\overline{AB}$ liegen möge, gehen. Jede dieser Geraden projiciren wir von der Kante $\overline{AB}$ aus durch eine Ebene, deren Complexcurve jedesmal aus den beiden Strahlenbüscheln A und B besteht. Die Polaren der betrachteten Geraden in μ gehen desshalb sämmtlich durch den Punkt G, welcher von L durch A und B harmonisch getrennt ist, und bilden einen Strahlenbüschel, dessen Ebene die Polare l von L bezüglich der in μ liegenden Complexcurve enthält; l ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Ebenen γ und δ mit der Complexcurve. Einen zweiten Strahlenbüschel erhält man in den Polaren des Büschels $(L'\mu)$, wenn L' der L gegenüberliegende Punkt in dem vollständigen Vierseit ist. Beide Büschel von Polaren haben einen gemeinschaftlichen Strahl in der Polare von LL'.

---

*) Vgl. Bd. 91 S. 1—21.

Es ist hierdurch der Nachweis erbracht, ***dass die sämmtlichen Polaren und Polaraxen von μ zwei specielle Strahlensysteme dritter Ordnung zweiter Klasse mit einer gemeinsamen Brennfläche bilden.*** Letztere besitzt auf den Kanten des Tetraeders sechs Doppelpunkte, welche von μ durch die auf den Kanten liegenden Ecken des Tetraeders harmonisch getrennt sind. Die Verbindungsgeraden je zweier Doppelpunkte, welche auf gegenüberliegenden Kanten liegen, treffen sich in einem Punkte K, dem Pole von μ in Bezug auf den Complex. Wir bemerken, dass weder die ***sechs Doppelpunkte*** der Brennfläche, noch ***der Pol von μ*** sich ändern, wenn wir zu einem anderen Complexe übergehen. Analog ergeben sich die reciproken Sätze.

5. Eine beliebige Gerade ist in Bezug auf einen gegebenen Complex Polare von mehreren anderen Geraden, welche construirt werden sollen.

In der Tetraederebene δ oder (ABC) ist durch den Complex jedem Punkte eine durch ihn gehende Gerade und jeder Geraden ein auf ihr liegender Punkt in folgender Art zugeordnet. Jeder Punkt P von δ ist Mittelpunkt eines Complexkegels, welcher aus δ und einer zweiten durch D gehenden Ebene besteht. Letztere Ebene schneidet δ in einer Geraden p, welcher P zugeordnet ist. Liegt P auf einer Seite des Dreiecks (ABC), so ist ihm diese Seite zugeordnet, und einer Ecke des Dreiecks sind alle durch sie gehenden Geraden zugewiesen. Der Schnitt eines beliebigen Complexkegels S mit δ ist ein dem Dreiecke (ABC) umschriebener Kegelschnitt ϱ, welcher von der Geraden $\overline{DS}$ im Punkte R getroffen werden möge. Den Punkten des Kegelschnittes ϱ entsprechen dann die Strahlen des Büschels R. Wird ϱ beliebig durch die Punkte A, B, C gelegt, so findet man R durch die Bedingung, dass die projective Relation von $\varrho(A, B, C, R)$ gleich sein muss derjenigen der vier Ebenen, durch welche von einer beliebigen Complexgeraden aus die vier Punkte A, B, C, D projicirt werden. Ebenso ist zu jedem Punkte R von μ der Kegelschnitt ϱ leicht zu finden. Liegt R auf einer Seite von (ABC), so zerfällt ϱ in diese Seite und eine zweite den gegenüberliegenden Eckpunkt enthaltende Gerade.

Ist nun eine beliebige Gerade r gegeben, welche δ in R trifft, so construire man die zu R gehörende Curve ϱ und den Kegelschnitt λ, in welchem die durch r gehende Fläche F_2 des Netzes die Ebene δ schneidet. Ausser R haben λ und ϱ noch drei gemeinsame Punkte M, N, O, durch welche die auf F_2 liegenden zu derselben Schaar wie r gehörenden Ge-

raden *m, n, o* gehen mögen. Die Gerade *r* ist dann die Polare dieser drei Geraden. Je *vier* so wie *r, m, n, o* zusammengehörende Gerade einer Schaar von F_2 bilden eine *besondere Involution vierter Ordnung zweiter Stufe,* wenn wir alle Complexe in Betracht ziehen. Man erkennt nun, *dass je vier solcher Strahlen eine Gruppe bilden, wie sie in* § 2 *für zehn Geraden bei den allgemeinen Complexen mit derselben Singularitätenfläche gefunden worden ist.*

6. Jede Gerade ist in Bezug auf einen tetraedralen Complex Polare von drei anderen Geraden. Jedoch giebt es bemerkenswerthe Ausnahmen. Eine *Gerade m,* welche die *Kanten* $\overline{AB}$ *und* $\overline{CD}$ *schneidet,* ist ein *Hauptstrahl* des Flächennetzes F_2. Zu *m* gehören drei andere dieselben Kanten treffende Geraden, welche mit *m* ein windschiefes Vierseit, die Grundcurve eines Büschels des Netzes, bilden. In jeder Fläche dieses Büschels finden sich drei Linien, deren Polare *m* ist. Eine dieser Linien ist stets die gegenüberstehende Seite von *m* in dem windschiefen Vierseit; die beiden anderen schneiden die übrigen zwei Seiten des Vierseits und die Gerade, welche mit $\overline{AB}$ zusammen die dem Schnittpunkte R von *m* mit $\overline{AB}$ in der Ebene δ entsprechende Curve ϱ ist. Die Linie *m* ist desshalb *Polare von unendlich vielen Geraden, welche eine die Kanten* $\overline{AB}$ *und* $\overline{CD}$ *enthaltende Regelschaar zweiten Grades bilden.*

7. Alle Linien, deren Polaren die Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ schneiden, bilden einen *zweiten Strahlencomplex* zweiten Grades, dessen Singularitätenfläche das Tetraeder $(ABCD)$ ist. Ist das Doppelverhältniss der vier Schnittpunkte eines Strahles des ursprünglichen Complexes mit den vier Ebenen α, β, γ, δ gleich k, wenn die Punkte auf γ und δ ein Paar, diejenigen auf α und β das andere Paar bilden, so beweist man leicht, dass das in derselben Weise gebildete Doppelverhältniss für die Strahlen des zweiten Complexes gleich k^2 ist. *Dieser Complex besteht auch aus allen Verbindungsgeraden von Berührungspunkten ebener Complexcurven des ersten Complexes mit den Ebenen* α *und* β *oder* γ *und* δ, *und reciprok aus den Schnittgeraden der Tangentialebenen der Complexkegel in den Punkten A und B oder C und D.*

Aachen, im October 1882.

Ueber die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien.

(Von Herrn *A. Enneper* in Göttingen.)

Auf Seite 116—117 dieses Bandes erwähnt Hr. *Dobriner* die Arbeiten über Flächen mit nur einem Systeme sphärischer Krümmungslinien. Hierbei wird die Bemerkung gemacht, dass bisher bloss Lösungen einiger besonderen Fälle gelungen seien, dass die allgemeine analytische Bestimmung der Flächen mit nur einem Systeme sphärischer Krümmungslinien eine Lücke in den von den Hrn. *Bonnet, Serret, Dini* und mir angestellten Untersuchungen lasse. Da augenscheinlich Hr. *Dobriner* die vollständige Literatur über den betreffenden Gegenstand bei Abfassung seiner Arbeit nicht gekannt hat, so erlaubt sich der Verfasser dieser Note auf einige Arbeiten hinzuweisen, in welchen die in Rede stehenden Untersuchungen schon vor längerer Zeit vollständig erledigt worden sind. Es existiren zwei Abhandlungen u. d. T.: *Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien.* Von *Alfred Enneper*. Die erste findet sich im XXIII. Bande der Abhandlungen d. K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Göttingen, 1878), die andere, mit dem Zusatz „Zweite Abhandlung", ist im XXVI. Bande der Schriften derselben Gesellschaft enthalten (1880). Die zweite Abhandlung behandelt auf p. 62—103 die verschiedenen Fälle, welche die Flächen mit nur einem Systeme sphärischer Krümmungslinien darbieten können. Aus dieser zweiten Abhandlung mögen die wesentlichsten Resultate ohne weitere Deduction, sowie die Einleitung zu No. XII hier Platz finden, da diese Einleitung die fundamentalen Arbeiten über die Flächen mit sphärischen Krümmungslinien enthält.

„„Die Lösung des Problems, die Coordinaten eines Punktes einer Fläche mit einem Systeme sphärischer Krümmungslinien in Function zweier Variabeln darzustellen, lässt sich auf analoge Weise durchführen, wie bei den

Von den beiden Systemen der Krümmungslinien möge das System (v) sphärisch sein, also jede Krümmungslinie des Systems (v) auf einer Kugelfläche liegen. Die Centra dieser osculatorischen Kugelflächen liegen im Allgemeinen auf einer Curve doppelter Krümmung. Es ist weniger diese Curve, welche im Folgenden in Betracht kommt, wie eine zweite Curve, auf deren Tangentenfläche die Curve der Centra liegt. Da die geometrischen Elemente einer Curve doppelter Krümmung in den Gleichungen für die Coordinaten x, y, z eines Punktes einer Fläche mit einem System sphärischer Krümmungslinien erscheinen, so mögen in Beziehung auf eine Raumcurve die wesentlichsten geometrischen Quantitäten in der nachfolgenden Art bezeichnet werden.

Es seien ξ, η, ζ die orthogonalen Coordinaten eines Punktes Π einer beliebigen Curve doppelter Krümmung. Bezeichnet man durch ds das Bogenelement der Curve, so ist:

$$(1.)\qquad ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Es werden ξ, η, ζ als Functionen einer Variabeln angesehen, für welche man s oder einen der weiter vorkommenden Winkel ε oder ω nehmen kann. Im Punkte Π der Curve existiren bekanntlich drei, gegenseitig zu einander, orthogonale Richtungen: die Tangente, die Hauptnormale und die Binormale. In Beziehung auf ein festes orthogonales Coordinatensystem sei die Tangente durch die Winkel α, β, γ; die Hauptnormale durch die Winkel λ, μ, ν; endlich die Binormale durch die Winkel l, m, n bestimmt. Es sei $d\varepsilon$ der Contingenzwinkel, durch $d\omega$ werde der Torsionswinkel der Curve bezeichnet, d. i. der Winkel, welchen zwei successive osculatorische Ebenen bilden. Diesen Winkeln entsprechen im Punkte Π der Curve der osculatorische Radius ϱ und der Torsionsradius r mittels der Gleichungen

$$(2.)\qquad d\varepsilon = \frac{ds}{\varrho},\quad d\omega = \frac{ds}{r}.$$

Mit Rücksicht auf die angewandten Bezeichnungen finden nachstehende Differentialformeln statt, von denen jede ein System von drei Gleichungen vertritt:

$$(3.)\qquad \begin{cases} d\xi = \cos\alpha\, ds,\quad d\cos\alpha = \dfrac{\cos\lambda}{\varrho}\, ds,\quad d\cos l = \dfrac{\cos\lambda}{r}\, ds, \\[2mm] \qquad d\cos\lambda = -\dfrac{\cos\alpha}{\varrho}\, ds - \dfrac{\cos l}{r}\, ds. \end{cases}$$

Die sphärische Krümmungslinie (v), welche durch den Punkt (x, y, z) der Fläche geht, liege auf einer Kugelfläche, der Radius derselben sei R_2; ferner

seien $\xi_2^{\bullet}$, $\eta_2^{\bullet}$, $\zeta_2^{\bullet}$ die Coordinaten des Mittelpunkts und σ der Winkel, welchen der Radius der Kugelfläche mit der Normalen des Punktes (x, y, z) einschliesst. Diese sämmtlichen Quantitäten sind in Beziehung auf v constant, so dass also R_2, $\xi_2^{\bullet}$, $\eta_2^{\bullet}$, $\zeta_2^{\bullet}$ und σ beliebige Functionen von u sind. Zur Vereinfachung setze man:

$$(4.)\qquad R_2\cos\sigma = p_2,\quad R_2\sin\sigma = q_2.$$

Die Bedingung, dass die Krümmungslinie (v) des Punktes (x, y, z) auf einer Kugelfläche liegt, ist:

$$(5.)\qquad 1 = \frac{p_2}{r''}+\frac{q_2}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du}.$$

Zu dieser Gleichung treten noch die folgenden:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \xi_2^{\bullet} = x+p_2\cos a-\frac{q_2}{\sqrt{E}}\frac{dx}{du},\quad \eta_2^{\bullet} = y+p_2\cos b-\frac{q_2}{\sqrt{E}}\frac{dy}{du},\\ \zeta_2^{\bullet} = z+p_2\cos c-\frac{q_2}{\sqrt{E}}\frac{dz}{du}. \end{cases}$$

Von den Gleichungen (5.) und (6.) lässt sich folgender Gebrauch machen. Es seien X, Y, Z die Coordinaten des Endpunkts des Hauptkrümmungsradius r'', so dass:

$$(7.)\qquad X = x+r''\cos a,\quad Y = y+r''\cos b,\quad Z = z+r''\cos c.$$

Die Gleichungen (7.) führen in Verbindung mit den Gleichungen (5.) und (6.) zu den folgenden Relationen:

$$(8.)\qquad (X-\xi_2^{\bullet})^2+(Y-\eta_2^{\bullet})^2+(Z-\zeta_2^{\bullet})^2 = (r''-p_2)^2+q_2^2.$$

$$(9.)\qquad \frac{\frac{dX}{du}}{X-\xi_2^{\bullet}} = \frac{\frac{dY}{du}}{Y-\eta_2^{\bullet}} = \frac{\frac{dZ}{du}}{Z-\zeta_2^{\bullet}} = \frac{\frac{dr''}{du}}{r''-p_2}.$$

$$(10.)\qquad \frac{dX}{dv} = \frac{dr''}{dv}\cos a,\quad \frac{dY}{dv} = \frac{dr''}{dv}\cos b,\quad \frac{dZ}{dv} = \frac{dr''}{dv}\cos c.$$

Das Problem, die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien analytisch zu definiren, kommt auf die Behandlung der Gleichungen (7.), (8.), (9.) und (10.) zurück. Aus den Gleichungen (8.) und (9.), in welchen $\xi_2^{\bullet}$, $\eta_2^{\bullet}$, $\zeta_2^{\bullet}$, p_2 und q_2 beliebige Functionen von u sind, hat man die Werthe von X, Y, Z und r'' zu finden. Die arbiträren Constanten, welche diese Werthe durch Integrationen enthalten, sind nur von u unabhängig, müssen also als Functionen von v angesehen werden. Die Gleichungen (10.) bestimmen die Werthe von $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$; sind dieselben bekannt, so geben

die Gleichungen (7.) x, y, z in Function von u und v. Die Summe der Quadrate der Gleichungen (10.) giebt:

$$(11.)\qquad \left(\frac{dX}{dv}\right)^2+\left(\frac{dY}{dv}\right)^2+\left(\frac{dZ}{dv}\right)^2 = \left(\frac{dr''}{dv}\right)^2.$$

Durch diese Gleichung ist eine Relation zwischen den arbiträren Functionen von v bestimmt, welche in den Werthen von X, Y, Z und r'' vorkommen. Die Bestimmung der Werthe von x, y, z aus den Gleichungen (7.) bis (10.) soll im Folgenden kurz durchgeführt werden mit Weglassung aller entbehrlichen Zwischenrechnungen, soweit dieses ohne Beeinträchtigung der Uebersicht thunlich ist. An Stelle der Quantitäten ξ_2, η_2, ζ_2 und p_2 mögen vier andere ξ, η, ζ und w mittels folgender Gleichungen eingeführt werden:

$$(12.)\qquad \begin{cases} \xi_2 = \int\cos\alpha\, ds+\frac{q_2}{\sin w}\cos\alpha = \xi+\frac{q_2}{\sin w}\cos\alpha, \\ \eta_2 = \int\cos\beta\, ds+\frac{q_2}{\sin w}\cos\beta = \eta+\frac{q_2}{\sin w}\cos\beta, \\ \zeta_2 = \int\cos\gamma\, ds+\frac{q_2}{\sin w}\cos\gamma = \zeta+\frac{q_2}{\sin w}\cos\gamma, \\ p_2 = \int\cos w\, ds+\frac{q_2}{\sin w}\cos w. \end{cases}$$

Sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes einer beliebigen Curve doppelter Krümmung, so enthält die Tangentenfläche dieser Curve die von den Mittelpunkten der osculatorischen Kugelflächen des sphärischen Systems (v) gebildete krumme Linie. In den Gleichungen (12.) kann man u als Function von s oder umgekehrt ansehen. Bedeutet Ω eine beliebige Function von u, so sei der Zusammenhang zwischen den Variabeln u und s durch folgende Gleichung bestimmt:

$$(13.)\qquad \frac{ds}{du} = -\frac{1}{\Omega}\,\frac{d\,\frac{q_2\Omega}{\sin w}}{du}.$$

Die Substitution der Werthe von ξ_2, η_2, ζ_2 und p_2 aus den Gleichungen (12.) in die Gleichungen (8.) giebt:

$$(14.)\qquad \begin{cases} (X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2-\left(r''-\int\cos w\, ds\right)^2 \\ = \frac{2q_2}{\sin w}\left[(X-\xi)\cos\alpha+(Y-\eta)\cos\beta+(Z-\zeta)\cos\gamma-\left(r''-\int\cos w\, ds\right)\cos w\right]. \end{cases}$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$(15.)\qquad (X-\xi)\cos\alpha+(Y-\eta)\cos\beta+(Z-\zeta)\cos\gamma-\left(r''-\int\cos w\, ds\right)\cos w = \Omega\Delta,$$

so giebt die Gleichung (14.):

$$(16.)\quad (X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2-\left(r''-\int\cos w\,ds\right)^2 = \frac{2q_2\Omega}{\sin w}\cdot\varDelta.$$

Durch Differentiation der Gleichung (16.) in Beziehung auf u erhält man unter Zuziehung der Gleichungen (9.), (12.), (13.), (15.) und (16.) die einfache Relation:

$$(17.)\quad \frac{d\varDelta}{du} = \frac{\varDelta}{r''-p_2}\frac{dr''}{du}.$$

Zur weiteren Behandlung der Gleichungen (8.) und (9.) führe man die Quantitäten x_1, y_1, z_1 und T_1 durch folgende Gleichungen ein:

$$(18.)\quad x_1 = \frac{X-\xi}{\varDelta},\quad y_1 = \frac{Y-\eta}{\varDelta},\quad z_1 = \frac{Z-\zeta}{\varDelta},\quad T_1 = \frac{r''-\int\cos w\,ds}{\varDelta},$$

wo $\varDelta$ durch eine der Gleichungen (15.) oder (16.) definirt ist. In Verbindung mit den Gleichungen (9.), (12.), (13.) und (17.) geben die Gleichungen (18.) nach u differentiirt:

$$(19.)\quad \frac{1}{\cos\alpha}\frac{dx_1}{du} = \frac{1}{\cos\beta}\frac{dy_1}{du} = \frac{1}{\cos\gamma}\frac{dz_1}{du} = \frac{1}{\cos w}\frac{dT_1}{du} = \frac{1}{\Omega}\frac{d\dfrac{q_2\Omega}{\varDelta\sin w}}{du}.$$

Ist $\cos w$ von Null verschieden, so setze man an Stelle der vorstehenden Gleichungen die folgenden:

$$(20.)\quad \frac{dx_1}{du} = \frac{\cos\alpha}{\cos w}\frac{dT_1}{du},\quad \frac{dy_1}{du} = \frac{\cos\beta}{\cos w}\frac{dT_1}{du},\quad \frac{dz_1}{du} = \frac{\cos\gamma}{\cos w}\frac{dT_1}{du}.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die Bestimmung von T_1 von der Integration einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung abhängt. Nach Ausführung der Integration hat man zur Bestimmung von x_1, y_1, z_1 drei lineare Gleichungen. Mit Rücksicht auf die Gleichung (15.) geben die Gleichungen (18.):

$$(21.)\quad x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma = \Omega+T_1.\cos w.$$

Vor der Bestimmung der Werthe von x_1, y_1, z_1 und T_1 möge der Zusammenhang dieser Quantitäten mit den Coordinaten x, y, z und dem Hauptkrümmungshalbmesser r'' dargestellt werden.

Die Gleichungen (16.) und (18.) geben:

$$(22.)\quad \varDelta = \frac{2q_2\Omega}{\sin w}\frac{1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}.$$

Man setze aus den Gleichungen (7.) die Werthe von X, Y, Z in die Gleichungen (18.). Mit Rücksicht auf den Werth von $\varDelta$ aus der Gleichung

(22.) erhält man:

$$(23.)\quad \begin{cases} x+r''\cos a-\xi = \dfrac{2q_2\Omega}{\sin w}\,\dfrac{x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}, \\ y+r''\cos b-\eta = \dfrac{2q_2\Omega}{\sin w}\,\dfrac{y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}, \\ z+r''\cos c-\zeta = \dfrac{2q_2\Omega}{\sin w}\,\dfrac{z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}, \\ r'' = \int \cos w\, ds = \dfrac{2q_2\Omega}{\sin w}\,\dfrac{T_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}. \end{cases}$$

Die Substitution der Werthe von X, Y, Z und Δ aus den Gleichungen (18.) und (22.) in die Gleichungen (10.) giebt:

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\dfrac{x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}}{dv} = \dfrac{d\dfrac{T_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}}{dv}\cdot\cos a, \\ \dfrac{d\dfrac{y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}}{dv} = \dfrac{d\dfrac{T_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}}{dv}\cdot\cos b, \\ \dfrac{d\dfrac{z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}}{dv} = \dfrac{d\dfrac{T_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-T_1^2}}{dv}\cdot\cos c. \end{cases}$$

Aus der Summe der Quadrate dieser Gleichungen folgt:

$$(25.)\quad \left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dv}\right)^2 = \left(\frac{dT_1}{dv}\right)^2.$$

Sind die Werthe von x_1, y_1, z_1 und T_1 bekannt, so geben die Gleichungen (24.) die Werthe von $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, ihre Substitution in die Gleichungen (23.) führt zur Bestimmung der Coordinaten x, y, z in Function der Argumente der Krümmungslinien u und v. Hierdurch ist die analytische Definition der Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien vollständig durchgeführt.

In den Gleichungen (20.) kann man an Stelle von u eine beliebige Function dieser Variabeln nehmen, man kann z. B. einfach u mit s vertauschen. Im Folgenden soll der Einfachheit halber ω, definirt durch $ds = rd\omega$, als unabhängige Variable genommen werden. Der Kürze halber setze man:

$$(26.)\quad \frac{r\cot w}{\varrho} = p,$$

und führe T statt T_1 mittels der Gleichung:

$$(27.)\quad T = T_1 \sin w$$

ein. Die Gleichung (21.) nimmt hierdurch die Form an:

$$(28.)\qquad x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma = \Omega+T\cot w.$$

Man differentiire diese Gleichung, unter Zuziehung der Gleichungen (3.), (20.) und (26.), mehrfach in Beziehung auf ω. Hierdurch erhält man die Gleichungen:

$$(29.)\qquad \begin{cases} x_1\cos\lambda+y_1\cos\mu+z_1\cos\nu = \dfrac{\varrho}{r}\dfrac{d\Omega}{d\omega}-\dfrac{1}{p}\dfrac{dT}{d\omega} \\ -(x_1\cos l+y_1\cos m+z_1\cos n) = d\dfrac{\dfrac{\varrho}{r}\dfrac{d\Omega}{d\omega}-\dfrac{1}{p}\dfrac{dT}{d\omega}}{d\omega}+\dfrac{r\Omega}{\varrho}+pT. \end{cases}$$

Wird die zweite der vorstehenden Gleichungen nach ω differentiirt und zur ersten addirt, so ergiebt sich zur Bestimmung von T die Differentialgleichung:

$$(30.)\qquad d\frac{d\dfrac{\dfrac{1}{p}\dfrac{dT}{d\omega}}{d\omega}-pT}{dw}+\frac{1}{p}\frac{dT}{d\omega} = d\frac{d\dfrac{\dfrac{\varrho}{r}\dfrac{d\Omega}{d\omega}}{d\omega}+\dfrac{r\Omega}{\varrho}}{d\omega}+\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{d\omega}.$$

Zur Integration dieser Differentialgleichung sei der Winkel φ durch die Differentialgleichung:

$$(31.)\qquad \frac{d\varphi}{d\omega} = 1+p\cos\varphi$$

definirt. Es soll angenommen werden, dass der Ausdruck für φ *keine* arbiträre Constante enthalte und nur der Gleichung (31.) zu genügen habe. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen setze man:

$$(32.)\qquad q=\int p\sin\varphi\, d\omega,\quad M=\int e^{-q}p\cos\varphi\, d\omega.$$

Nimmt man weiter:

$$(33.)\qquad t=e^q,\quad t_1=Me^q,\quad t_2=e^{-q}+M^2e^q,$$

so verificirt man mit Hülfe der Gleichungen (31.) und (32.), dass t, t_1, t_2 particuläre Integrale der Gleichung (30.) sind, für den Fall, dass $\Omega=0$. Durch Anwendung der Methode von *Lagrange* erhält man für T den folgenden Ausdruck:

$$(34.)\qquad T = \Omega\cot w+\frac{V-J_2}{2}t+(V_1+J_1)t_1+\frac{V_2-J}{2}t_2.$$

Es sind V, V_1, V_2 Functionen von v. Durch J, J_1, J_2 sind folgende Integrale bezeichnet:

$$(35.)\quad J=\int\frac{\Omega}{\cos w}d\frac{\dfrac{t}{\sin w}}{d\omega}d\omega,\; J_1=\int\frac{\Omega}{\cos w}d\frac{\dfrac{t_1}{\sin w}}{d\omega}d\omega,\; J_2=\int\frac{\Omega}{\cos w}d\frac{\dfrac{t_2}{\sin w}}{d\omega}d\omega.$$

Den Werth von T aus der Gleichung (34.) setze man in die Gleichungen (27.), (28.) und (29.), substituire ferner darauf die Werthe von t, t_1, t_2 aus den Gleichungen (33.). Nimmt man noch nach der Gleichung (26.)

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{\cot w}{p},$$

so ergeben sich zur Bestimmung von T_1, x_1, y_1, z_1 folgende Gleichungen:

$$(36.)\quad \begin{cases} T_1 \sin w = \Omega \cot w + \frac{V-J_2}{2} e^q + (V_1+J_1) M e^q + \frac{V_2-J}{2} (M^2 e^q + e^{-q}), \\ x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = \frac{\Omega}{\sin^2 w} \\ \qquad + \left[\frac{V-J_2}{2} e^q + (V_1+J_1) M e^q + \frac{V_2-J}{2} (M^2 e^q + e^{-q})\right] \cot w, \\ x_1 \cos\lambda + y_1 \cos\mu + z_1 \cos\nu = -[V_1+J_1+(V_2-J)M] \cos\varphi \\ \qquad - \left[\frac{V-J_2}{2} e^q + (V_1+J_1) M e^q + \frac{V_2-J}{2} (M^2 e^q - e^{-q})\right] \sin\varphi, \\ x_1 \cos l + y_1 \cos m + z_1 \cos n = -[V_1+J_1+(V_2-J)M] \sin\varphi \\ \qquad + \left[\frac{V-J_2}{2} e^q + (V_1+J_1) M e^q + \frac{V_2-J}{2} (M^2 e^q - e^{-q})\right] \cos\varphi. \end{cases}$$

Die Gleichung (25.) reducirt sich mittels der vorstehenden Gleichungen auf:

$$(37.)\quad \left(\frac{dV_1}{dv}\right)^2 = \frac{dV}{dv} \cdot \frac{dV_2}{dv}.$$

Nimmt man V_1 statt v als unabhängige Variable, so folgt:

$$1 = \frac{dV}{dV_1} \cdot \frac{dV_2}{dV_1}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die Gleichungen (36.) in Beziehung auf V_1, also auch allgemein in Beziehung auf v, nur eine arbiträre Function enthalten. Die Gleichungen (23.), (24.), (36.) und (37.), nebst den in den Gleichungen (26.), (31.) und (32.) enthaltenen Definitionen, finden sich, abgesehen von einigen unwesentlichen Modificationen der Bezeichnungen, vollständig in den „Nachrichten" aus dem Jahre 1872.

Ist die Curve, gebildet aus den Mittelpunkten der osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien, plan, so können für die Curve, auf welcher der Punkt (ξ, η, ζ) liegt, zwei Fälle eintreten. Die bemerkte Curve bleibt eine beliebige Curve doppelter Krümmung, oder sie ist ebenfalls plan. Im letztgenannten Falle erfordern die oben aufgestellten allgemeinen Formeln einige Modificationen, welche namentlich darauf beruhen, dass x_1, y_1, z_1 nicht mehr wie im allgemeinen Falle, durch symmetrisch

gestaltete Gleichungen bestimmt werden. Es sei ζ constant, dann geben die Gleichungen (12.) auch ζ_2 constant. Man nehme einfach $\zeta = 0$, also $r = \infty$. Man führe den Winkel ε durch die Gleichung $ds = \varrho\, d\varepsilon$ ein und setze:

$$(38.)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \sin\varepsilon, & \cos\beta = -\cos\varepsilon, & \cos\gamma = 0, \\ \cos\lambda = \cos\varepsilon, & \cos\mu = \sin\varepsilon, & \cos\nu = 0. \end{cases}$$

Wegen der vorstehenden Gleichungen geben die Gleichungen (20.), wenn ε als unabhängige Variable genommen wird,

$$(39.)\quad \frac{dx_1}{d\varepsilon} = \frac{\sin\varepsilon}{\cos w}\frac{dT_1}{d\varepsilon}, \quad \frac{dy_1}{d\varepsilon} = -\frac{\cos\varepsilon}{\cos w}\frac{dT_1}{d\varepsilon}, \quad \frac{dz_1}{d\varepsilon} = 0.$$

Man nehme zur Abkürzung

$$(40.)\quad \cot w = p.$$

Es reducirt sich die Gleichung (21.) auf:

$$(41.)\quad x_1 \sin\varepsilon - y_1 \cos\varepsilon = \Omega + T_1 \cos w.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (39.) leitet man durch Differentiationen nach ε aus der Gleichung (41.) die folgenden ab:

$$(42.)\quad x_1\cos\varepsilon + y_1 \sin\varepsilon = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} - \frac{1}{p}\frac{dT_1 \sin w}{d\varepsilon}.$$

$$(43.)\quad d\frac{\frac{1}{p}\, d\frac{T_1 \sin w}{d\varepsilon}}{d\varepsilon} - p\, T_1 \sin w = \frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2} + \Omega.$$

Man führe die Integration der vorstehenden Gleichung aus und setze wieder

$$p = \cot w.$$

Werden die Bezeichnungen:

$$(44.)\quad q = \int \cot w\, d\varepsilon, \quad J_1 = \int \frac{\Omega}{\sin^2 w}\Big(1 + \frac{dw}{d\varepsilon}\Big)e^{-q}\, d\varepsilon, \quad J_2 = \int \frac{\Omega}{\sin^2 w}\Big(1 - \frac{dw}{d\varepsilon}\Big)e^{q}\, d\varepsilon,$$

eingeführt, so geben die Gleichungen (41.), (42.) und (43.):

$$(45.)\quad \begin{cases} T_1 \sin w = \Omega \cot w + \dfrac{V_1 + J_1}{2} e^{q} + \dfrac{V_2 - J_2}{2} e^{-q}, \\ x_1 \sin\varepsilon - y_1 \cos\varepsilon = \dfrac{\Omega}{\sin^2 w} + \Big[\dfrac{V_1 + J_1}{2} e^{q} + \dfrac{V_2 - J_2}{2} e^{-q}\Big]\cot w, \\ x_1 \cos\varepsilon + y_1 \sin\varepsilon = -\dfrac{V_1 + J_1}{2} e^{q} + \dfrac{V_2 - J_2}{2} e^{-q}. \end{cases}$$

Es sind V_1 und V_2 Functionen von v. Mittels der vorstehenden Gleichungen nimmt die Gleichung (25.) folgende Form an:

$$(46.)\quad \Big(\frac{dz_1}{dv}\Big)^2 = \frac{dV_1}{dv}\frac{dV_2}{dv};$$

es ist z_1 eine beliebige Function von v. Die Gleichungen (45.) und (46.) entsprechen den Gleichungen (36.) und (37.).

Die verschiedenen Fälle, je nachdem die Mittelpunkte der Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien auf einer planen Curve oder auf einer Geraden liegen, geben zu einer Reihe interessanter Detailuntersuchungen Veranlassung. In Beziehung auf die Curve, welcher der Punkt (ξ, η, ζ) angehört, sind immer zwei Untersuchungen zu führen, je nachdem diese Curve mit der Curve der Centra plan ist oder nicht plan ist, und je nachdem die bemerkte Curve mit der Curve der Centra eine Gerade ist oder eine beliebige plane Curve ist. Die weitere Ausführung dieser Fälle, welche in der zweiten Abhandlung der „Untersuchungen über Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien" auf p. 90—103 enthalten ist, soll hier unterbleiben, um dieser Abhandlung keine zu grosse Ausdehnung zu geben. Es handelte sich bei Abfassung dieser Zeilen hauptsächlich um eine kurze Darlegung der vom Verfasser angewandten Methode. Es möge schliesslich noch eines besonderen Falls Erwähnung geschehen, wegen der Ausdehnung einer bekannten geometrischen Transformation und eines sich daran knüpfenden Theorems.

Bei der sogenannten Transformation durch reciproke Radii vectores entsprechen sich zwei Punkte P und P_1 zweier geometrischen Gebilde S und S_1 derart, dass die beiden Punkte P und P_1 mit einem festen Punkte O auf einer Geraden liegen und ihre Distanzen durch die Relation $OP.OP_1 = g^2$ verbunden sind, wo g eine Constante bedeutet. Man kann statt eines festen Punktes O zwei feste Punkte O und Π nehmen und die Punkte P und P_1 sich so entsprechen lassen, dass die Verbindungslinien OP_1 und ΠP parallel sind und die Gleichung $OP_1.\Pi P = g^2$ besteht, wo wieder g eine Constante ist. Sind S und S_1 zwei Flächen, so entsprechen bei der bemerkten Transformation bekanntlich den Krümmungslinien der Fläche S auf der Fläche S_1 ebenfalls Krümmungslinien. Es werde nun der Punkt Π und die Quantität g variabel angenommen, und zwar unter den folgenden Bedingungen. Für eine bestimmte Curve K möge der Punkt Π eine bestimmte Lage und g einen bestimmten Werth haben. Die Transformation der Curve K in eine Curve K_1 geschehe auf die oben bemerkte Weise in Beziehung auf die Punkte O und Π. Die Curve K liege auf einer Fläche und gehöre einem bestimmten Systeme an. Da diese Untersuchung sich auf Krümmungslinien bezieht, so sei K einfach eine Linie des Systems (u).

Einem bestimmten Werthe $u = u_0$ entspricht eine bestimmte Curve K_0, ferner ein bestimmter Punkt Π_0 und ein bestimmter Werth g_0 von g. Lässt man u variiren, so nimmt der Punkt Π verschiedene Lagen an, die eine Curve Γ bilden; ebenso nimmt g eine Reihe von Werthen an, die nur von u abhängen. Werden alle Krümmungslinien der Fläche S transformirt, oder einfacher die Fläche S_1 in Beziehung auf eine Curve Γ und einen variabeln Radius der Transformation, so geschieht dieses analytisch mittels der Gleichungen:

$$(\Theta.)\quad x_1 = U\frac{x-\xi}{N},\quad y_1 = U\frac{y-\eta}{N},\quad z_1 = U\frac{z-\zeta}{N},\quad N = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2.$$

Es bedeuten ξ, η, ζ und U Functionen von u, ferner sind x, y, z die Coordinaten von P, x_1, y_1, z_1 die Coordinaten von P_1. In Beziehung auf diese Gleichungen besteht folgendes

Theorem:

Entsprechen bei der angegebenen Transformation der Krümmungslinien der Fläche S auf der Fläche S_1 ebenfalls Krümmungslinien, so ist das System der Krümmungslinien (v) auf der Fläche S sphärisch und die Kugelflächen des Systems schneiden die Fläche S orthogonal. Auf der Fläche S_1 ist dann das System (v) sphärisch oder plan, die osculatorischen Kugelflächen oder die Krümmungsebenen des Systems schneiden die Fläche S_1 ebenfalls orthogonal.

Da die Gleichungen $(\Theta.)$ mehrere Functionen von u enthalten, so lässt sich nach dem vorstehenden Theorem, eine derartige Verbindung herstellen, dass die sphärischen Krümmungslinien von S, deren Kugelflächen die Fläche S orthogonal schneiden, auf der Fläche S_1 in plane Curven übergehen, deren Ebenen die Normalen der Fläche S_1 enthalten. Ist die Fläche S_1 bekannt, so lässt sich aus derselben leicht die Fläche S deduciren.

Göttingen, 1883.

Zur conformen Abbildung der Cyklide.

(Von Herrn *Holzmüller* in Hagen.)

In dem Aufsatze über die Abbildung der Cyklide auf pag. 237 dieses Bandes ist ein Versehen zu berichtigen. Statt des Ausdruckes $\frac{r+\varrho\cos\varphi-\varrho}{r}$ ist der reciproke zu integriren, so dass bei $r > 2\varrho$ die halbe Rechteckshöhe wird

$$\frac{h}{2} = r\varrho\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(r-\varrho)+\varrho\cos\varphi} = \frac{r\varrho\pi}{\sqrt{r(r-2\varrho)}} = \frac{(r-r_1)\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{r_1}},$$

das Verhältniss der Rechtecksseiten also

$$(1.)\qquad h:b = r-r_1 : 2\sqrt{rr_1}.$$

Die zu einem gegebenen Rechteck gehörige Cyklide lässt sich also leicht construiren, und zwar ergiebt sich dabei, wie hier hinzugefügt werden mag, ein eigenthümlicher Zusammenhang mit dem Modul der elliptischen Function.

Schreibt man der Einfachheit halber $\frac{n}{1}$ statt $\frac{h}{b}$, und setzt man $r=1$, so lautet die Proportion

$$(2.)\qquad n:1 = 1-r_1 : 2\sqrt{r_1},$$

woraus folgt

$$r_1 = 1+2n^2-\sqrt{(1+2n^2)^2-1},$$

sobald r_1 als kleinerer Radius gilt, z. B. für $n=1$, den Fall des Quadrates, $r_1 = 3-\sqrt{8}$, während $k = 3-\sqrt{8}$ der Modul bei der Abbildung des Quadrates auf den Einheitskreis ist *).

Der Zusammenhang klärt sich folgendermassen auf. Die Abbildung des Rechtecks auf den Einheitskreis geschieht nach Hrn. *Schwarz* durch die

*) Vergl. *H. A. Schwarz,* dieses Journal Bd. 70, Seite 105, über einige Abbildungsaufgaben; ausserdem *Jochmann,* zur Abbildung des Rechtecks auf die Quadratfläche *Schlömilchs* Zeitschrift, Bd. 14 und § 104 meiner „Einführung in die Theorie der isog. Verwandtschaften".



Function

$$Z = \frac{1+i\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\, z}{i+\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\, z}.$$

Den Eckpunkten $\pm K$ und $\pm K+K'i$ des Rechtecks entsprechen dabei die Bildpunkte

$$\pm\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\pm i\frac{1-k}{1+k},$$

wobei $\frac{K'i}{K}$ das Periodenverhältniss, k der zugehörige Modul ist. Die Coordinaten jedes Bildpunktes verhalten sich also wie

$$n_1 : 1 = 1-k : 2\sqrt{k},$$

was in der Form mit der Proportion (2.) übereinstimmt, für die man auch $\frac{r}{r_1} = (n+\sqrt{n^2+1})^2$ schreiben kann. Für das Quadrat ist $n = n_1 = 1$, so dass volle Uebereinstimmung stattfindet.

Für rationale Verhältnisse lassen sich nun die quadratischen Eintheilungen der Cyklidenoberfläche constructiv erledigen, was zu einem gewissen Ausbau der Geometrie auf der Cyklide allgemeinerer Form führt.

Hagen, den 29. Mai 1883.

Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs in ihre irreductibeln Factoren.

(Von *Kronecker*.)

Im § 4 meiner „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" (Bd. 92, S. 10 u. flgde.) habe ich den Inductionsbeweis für die Möglichkeit und die völlige Bestimmtheit der Zerlegung ganzer Grössen eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs in irreductible Factoren angedeutet. Ich will diesen Beweis hier vollständig ausführen, und zwar in derselben Weise, in welcher ich ihn bereits im Wintersemester 1861/62 in meinen ersten über die Theorie der algebraischen Gleichungen an der hiesigen Universität gehaltenen Vorlesungen, und seitdem regelmässig, gegeben habe.

Es seien $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}$ unbestimmte oder von einander unabhängige veränderliche Grössen, so dass die ganzen ganzzahligen Functionen derselben die sämmtlichen *„ganzen"* Grössen des *„natürlichen Rationalitäts-Bereichs* $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$" repräsentiren, d. h. desjenigen Bereichs, den ich im § 5 meiner citirten Arbeit mit $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ bezeichnet habe. Ferner sei vorausgesetzt, dass jede ganze Grösse des natürlichen Bereichs von nur $n-1$ Elementen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}$ in irreductible Factoren zerlegt werden kann, und zwar nur auf eine einzige Weise. Alsdann lässt sich die Möglichkeit und die Bestimmtheit der Zerlegung der ganzen Grössen des natürlichen aus n Elementen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}$ gebildeten Rationalitäts-Bereichs in irreductible Factoren folgendermassen nachweisen.

I. Bedeuten $r_0, r_1, \ldots r_n$ beliebige, von einander verschiedene, positive oder negative ganze Zahlen, und definirt man die ganzen Functionen:

$$G_0(\mathfrak{R}), \quad G_1(\mathfrak{R}), \quad G_2(\mathfrak{R}), \quad \ldots \quad G_n(\mathfrak{R})$$

durch die Gleichung:

$$(\mathfrak{R}-r_k)\, G_k(\mathfrak{R}) = \prod_k (\mathfrak{R}-r_k) \qquad (k=0, 1, 2, \ldots n),$$

so ist jede ganze Grösse $F(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ des Bereichs $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$, deren Grad in Beziehung auf $\mathfrak{R}$ nicht grösser als n ist, in der Form:

$$F(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}) = \sum_k F(r_k, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}) \cdot \frac{G_k(\mathfrak{R})}{G_k(r_k)} \qquad (k=0,1,2,\ldots n)$$

darstellbar. Bei einer solchen Darstellung des Divisors $F(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ einer ganzen Grösse $\Phi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ des Bereichs $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ ist offenbar $F(r_k, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ ein Divisor von $\Phi(r_k, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$, und man braucht, um alle Divisoren F einer ganzen Grösse $\Phi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ des Bereichs $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ zu finden, die Zahl n nicht grösser als die Hälfte derjenigen Zahl anzunehmen, welche den Grad von Φ in Beziehung auf $\mathfrak{R}$ bezeichnet; denn alsdann ist sicher je *einer* von zwei complementären Divisoren von Φ gleich einem der verschiedenen Ausdrücke:

$$\sum_k D_k(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}) \cdot \frac{G_k(\mathfrak{R})}{G_k(r_k)} \qquad (k=0,1,2,\ldots n),$$

welche man erhält, wenn man für $D_k(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ nach einander die sämmtlichen verschiedenen Divisoren von $\Phi(r_k, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ nimmt. Die Möglichkeit der Aufstellung aller dieser Ausdrücke ist aber durch die Voraussetzung gegeben, dass die zu einem Bereiche von nur $\mathfrak{n}-1$ Elementen $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ gehörigen Grössen $\Phi(r_k, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ in irreductible Factoren zerlegt und also die sämmtlichen Divisoren von $\Phi(r_k, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ gefunden werden können, und die Untersuchung, ob einer derjenigen dieser Ausdrücke, durch welche Grössen des Bereichs $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ dargestellt, d. h. in denen die sämmtlichen Coefficienten der verschiedenen Producte von Potenzen der Unbestimmten $\mathfrak{R}$ ganze Zahlen sind, in der That ein Divisor von Φ ist, erfordert nur die algebraische in Beziehung auf die Variable $\mathfrak{R}$ allein auszuführende Division und ferner für den Fall, dass der Quotient sich dabei als ganze Function von $\mathfrak{R}$ ergiebt, die weitere Untersuchung, ob die Coefficienten *ganze* Grössen des Bereichs von nur $\mathfrak{n}-1$ Elementen $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ sind. Die Möglichkeit dieser letzteren Untersuchung ist aber ebenfalls durch jene Voraussetzung über die Zerlegbarkeit der ganzen Grössen des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ in irreductible Factoren gegeben.

Durch die hiermit dargelegte Methode, alle Theiler einer gegebenen ganzen Grösse des Bereichs $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ aufzufinden, ist die Möglichkeit nachgewiesen, zu erkennen, ob eine ganze Grösse eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs von $\mathfrak{n}$ Elementen überhaupt einen Theiler hat oder

nicht. Man kann demnach diejenigen ganzen Grössen eines natürliche
Rationalitäts-Bereichs von $\mathfrak{n}$ Elementen, welche keine **andere** ganze Gröss
(die Einheit ausgenommen) zum Theiler haben, als *„irreductibel"* definirer
da nunmehr gezeigt ist, wie entschieden werden kann, ob eine gegeben
Grösse der aufgestellten Definition gemäss irreductibel ist oder nicht.

II. Bedeuten F, Φ, Ψ ganze Grössen des natürlichen Rationalitäts
Bereichs $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots \mathfrak{R}^{(\mathfrak{n}-1)}]$, und ist F irreductibel, so ist aus den beiden Vor
aussetzungen, dass das Product $\Phi . \Psi$ durch F theilbar, Φ selbst aber durc
F **nicht** theilbar sei, zu erschliessen, dass Ψ durch F theilbar sein muss.

Dieser Satz ist, wenn man die oben nachgewiesene Möglichkeit de
Zerlegung jeder ganzen Grösse in irreductible Factoren hinzunimmt, völli
äquivalent der „**Bestimmtheit**" eben dieser Zerlegung. Denn wenn dies
Bestimmtheit vorausgesetzt und der Quotient der Division von $\Phi\Psi$ durc
F mit G bezeichnet wird, so folgt aus der Gleichung $\Phi\Psi = FG$, dass di
irreductible Grösse F unter den irreductibeln Factoren von Φ oder unte
denen von Ψ vorkommen muss. Wenn aber andrerseits der obige Satz
vorausgesetzt wird, so folgt unmittelbar, dass zwei Producte irreductible
Factoren nicht einander gleich sein können, ohne dass jeder dieser Factore
in jedem der beiden Producte gleich oft enthalten ist. Da nun die Be-
stimmtheit der Zerlegung in irreductible Factoren für Bereiche von $\mathfrak{n}-1$ Ele-
menten vorausgesetzt ist, so kann der obige Satz für eben solche Bereiche
als gültig angenommen werden, und da nur noch die Bestimmtheit de
Zerlegung in irreductible Factoren für Bereiche von $\mathfrak{n}$ Elementen darzuthu
ist, so kann statt dessen der obige Satz für eben solche Bereiche als gültig
nachgewiesen werden. Dieser Nachweis sondert sich in drei Theile.

1. Ist F eine Grösse des Bereichs von nur $\mathfrak{n}-1$ Elemente
$[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots \mathfrak{R}^{(\mathfrak{n}-1)}]$ und

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \mathfrak{R} + \Phi_2 \mathfrak{R}^2 + \cdots\cdots, \qquad \Psi = \Psi_0 + \Psi_1 \mathfrak{R} + \Psi_2 \mathfrak{R}^2 + \cdots\cdots,$$

so muss gemäss der Voraussetzung, dass Φ nicht durch F theilbar ist, wenig-
stens **eine** der Grössen $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ nicht durch F theilbar sein. Ist nun
Φ_h die **erste** dieser Grössen, welche nicht durch F theilbar ist, und sind
demnach $\Phi_0, \Phi_1, \dots \Phi_{h-1}$ durch F theilbar und ebenso auch $\Psi_0, \Psi_1, \dots \Psi_{k-1}$,
so ist gemäss der Voraussetzung, dass $\Phi\Psi$ durch F theilbar ist, das Product

$$(\Phi_h \mathfrak{R}^h + \Phi_{h+1} \mathfrak{R}^{h+1} + \cdots\cdots)(\Psi_k \mathfrak{R}^k + \Psi_{k+1} \mathfrak{R}^{k+1} + \cdots\cdots)$$

durch F theilbar. Es ist also $\Phi_h \Psi_k$ durch F theilbar, und da Φ_h als nicht
durch F theilbar, der zu beweisende Satz aber für die dem Bereich

$[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ angehörigen Grössen F, Φ_k, Ψ_k als gültig angenommen ist, so folgt, dass Ψ_k durch F theilbar sein muss. Es müssen daher alle Coefficienten $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ den Factor F enthalten, und die Grösse Ψ selbst muss demnach in der That durch F theilbar sein.

2. Ist X eine Grösse des Bereichs von n Elementen $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$, welche keinen von $\mathfrak{R}$ unabhängigen Divisor enthält, und ist der Quotient $\frac{\Psi}{X}$ eine ganze Function von $\mathfrak{R}$, so sind auch deren Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}$, d. h. es ist der Quotient $\frac{\Psi}{X}$ eine *ganze* Grösse des Bereichs $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$. Wäre nämlich:

$$\frac{\Psi}{X} = \frac{\theta_0 + \theta_1 \mathfrak{R} + \theta_2 \mathfrak{R}^2 + \cdots}{G},$$

wo $G, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ ganze Grössen des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ bedeuten, welche nicht sämmtlich einen und denselben Factor gemein haben, so wäre das Product $(\theta_0 + \theta_1 \mathfrak{R} + \theta_2 \mathfrak{R}^2 + \cdots).X$ durch jeden irreductibeln Factor von G theilbar. Da aber X der Voraussetzung nach keinen solchen Factor enthält, so müsste nach dem, was unter No. 1 bewiesen ist, $\theta_0 + \theta_1 \mathfrak{R} + \theta_2 \mathfrak{R}^2 + \cdots$ selbst durch jeden solchen Factor theilbar sein, d. h. es hätten, der gemachten Annahme entgegen, die sämmtlichen Grössen $G, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ einen und denselben irreductibeln Factor mit einander gemein. Die Grösse G kann also gar keinen irreductibeln Factor haben und muss demnach gleich Eins sein.

3. Ist die irreductible Grösse F nicht (wie unter No. 1 angenommen war) von $\mathfrak{R}$ unabhängig, und setzt man wieder das Product $\Phi\Psi$ als durch F theilbar, Φ selbst aber als durch F nicht theilbar voraus, so kann gemäss No. 2 der Quotient $\frac{\Phi}{F}$ auch nicht ganz in $\mathfrak{R}$ allein sein. Nach der Definition der Irreductibilität kann F nicht gleich einem Product *ganzer* Grössen des Bereichs $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ sein; es kann aber auch nicht gleich dem Product ganzer Functionen von $\mathfrak{R}$ sein, deren Coefficienten rationale Functionen von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}$ wären. Denn ist:

$$F = \frac{\theta X}{G},$$

wo θ und X ganze Grössen des Bereichs $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ bedeuten und G von $\mathfrak{R}$ unabhängig also eine ganze Grösse des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ ist, so kann X irreductibel vorausgesetzt werden, und es ist alsdann nach No. 2 zu erschliessen, dass $G = 1$ sein muss.

Da hiernach F, auch als Function von $\mathfrak{R}$ allein betrachtet, irreductibel und nicht als Factor in Φ enthalten ist, so ergiebt jenes Verfahren successiver Divisionen, mittels dessen man den grössten gemeinsamen Theiler zweier Functionen von $\mathfrak{R}$ findet, auf Φ und F angewendet, eine Gleichung:

$$\Phi_1 F + F_1 \Phi = 1,$$

in welcher F_1 und Φ_1 ganze Functionen von $\mathfrak{R}$ bedeuten, deren Coefficienten dem Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots \mathfrak{R}^{(n-1)})$ angehören, d. h. rationale (ganze oder gebrochene) Functionen von $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, ... $\mathfrak{R}^{(n-1)}$ sind. Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{\Psi}{F}$ so kommt:

$$\frac{\Psi}{F} = \Phi_1 \Psi + \frac{\Phi\Psi}{F} F_1,$$

und es muss also, da $\Phi\Psi$ durch F theilbar ist, der Quotient $\frac{\Psi}{F}$ eine ganze Function von $\mathfrak{R}$ sein. Alsdann muss aber (gemäss No. 2) eben dieser Quotient auch eine *ganze* Grösse des Bereichs $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ sein, d. h. es muss in der That, wie bewiesen werden sollte, die mit Ψ bezeichnete ganze Grösse des natürlichen Rationalitäts-Bereichs $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots \mathfrak{R}^{(n-1)}]$ durch die demselben Bereich angehörige irreductible ganze Grösse F theilbar sein.

Algebraische Ableitung der Multiplication von $\cos\operatorname{am} u$.

(Von Herrn *C. Runge*.)

Setzt man

$$x = \cos\operatorname{am} u, \quad y = \cos\operatorname{am} v, \quad z = \cos\operatorname{am}(u \pm v),$$

so besteht zwischen x, y, z die Gleichung:

$$g(x, y, z) = -k^2 x^2 y^2 z^2 + k^2 (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) - 2xyz + k'^2 (x^2 + y^2 + z^2) - k'^2 = 0.$$

Giebt man v den Werth $(n-1)u$, so resultiren aus dieser Gleichung die beiden Werthe:

$$z = \cos\operatorname{am} nu \quad \text{und} \quad z = \cos\operatorname{am}(n-2)u,$$

und man kann deshalb, wenn man $\cos\operatorname{am}(n-1)u$ und $\cos\operatorname{am}(n-2)u$ bereits durch x ausgedrückt hat, den Ausdruck für $\cos\operatorname{am} nu$ in folgender Weise ableiten.

Sei

$$y = \cos\operatorname{am}(n-1)u = \frac{f_1(x)}{f_0(x)} \quad \text{und} \quad \cos\operatorname{am}(n-2)u = \frac{g_1(x)}{g_0(x)}.$$

Dabei sollen sowohl f_1 und f_0 als auch g_1 und g_0 ohne gemeinsamen Theiler vorausgesetzt werden. Setzt man nun $\frac{f_1}{f_0}$ für y in $g(x, y, z)$ ein und multiplicirt mit f_0^2, so hat die ganze Function von x und z:

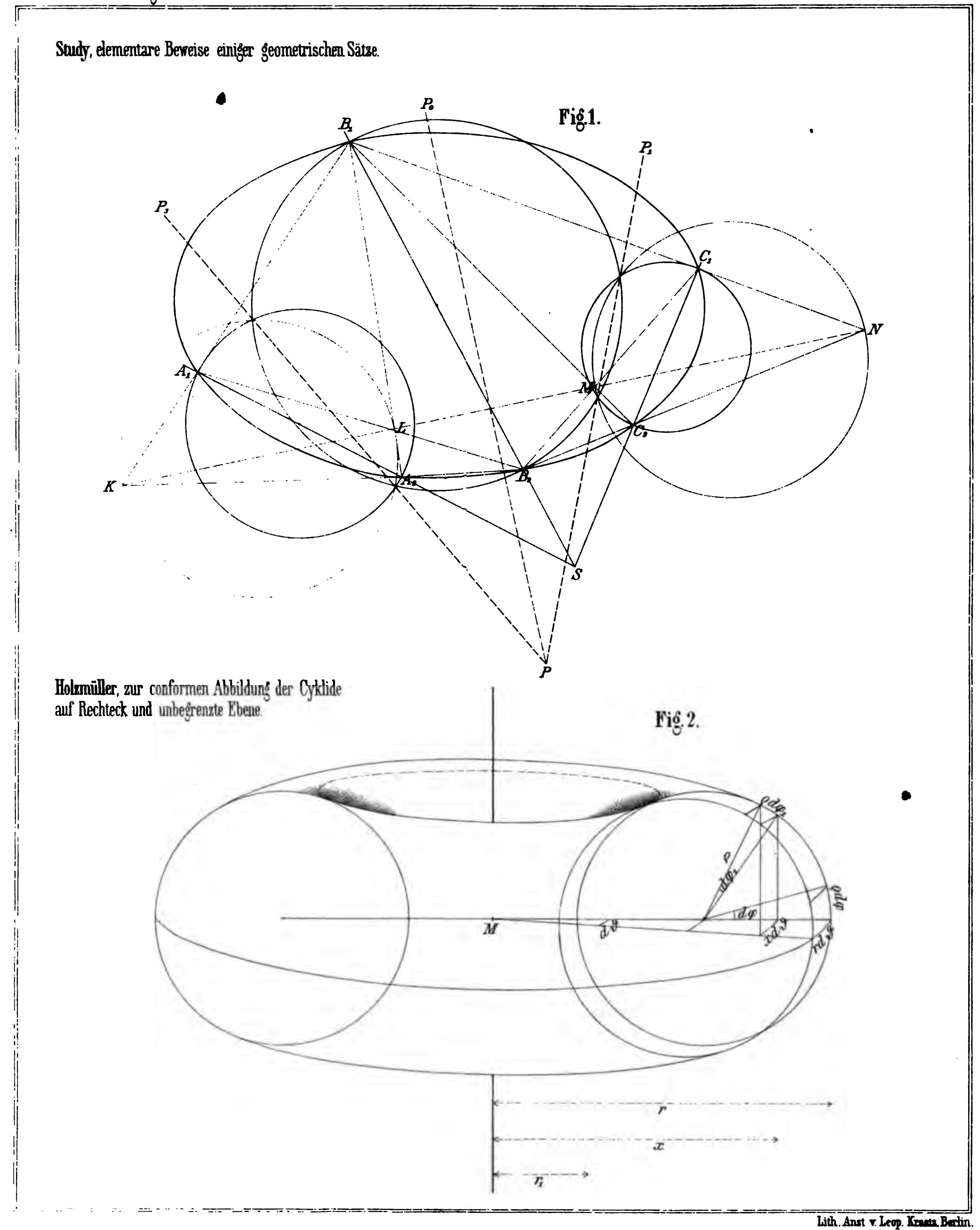
$$f_0^2 g\left(x, \frac{f_1}{f_0}, z\right)$$

keinen von z unabhängigen Theiler. Denn existirte ein solcher, so wäre er auch Theiler von

$$f_0^2 g\left(x, \frac{f_1}{f_0}, 1\right) \quad \text{und} \quad f_0^2 g\left(x, \frac{f_1}{f_0}, -1\right),$$

d. h. von:

$$(xf_0 - f_1)^2 \quad \text{und} \quad (xf_0 + f_1)^2.$$


Study, elementare Beweise einiger geometrischen Sätze.
Fig. 1.
Holzmüller, zur conformen Abbildung der Cyklide auf Rechteck und unbegrenzte Ebene.
Fig. 2.
M
r
x
Lith. Anst v. Leop. Kraatz, Berlin.

